M. T. HUBER.

Z teoryi zgięcia belki prostokątnej na podstawie „prawa potęgowego".

Zboczenie od prawa Hooke'a, stwierdzone doświadczalnie dla wielu materyałów budowlanych (żelazo lane, kamień, beton i t. d.), usiłowano od dawna ująć we wzór empiryczny, przedstawiający z dostateczną dokładnością zależność odkształceń od natężeń. Znalezione tą drogą prawa odkształceń zestawił R. Mehmke[1] w rozprawie „Zum Gesetz der elastischen Dehnungen" (Zeitschr. f. Math. u. Ph. 1897). Z nich największy rozgłos zyskało proponowane już w r. 1729 przez Bülffingera, a obecnie przez C. Bacha i Schülego na nowo podjęte „prawo potęgowe", wyrażone równaniem:

$$\varepsilon = a\sigma^m, \tag{1}$$

w którem ε oznacza wydłużenie jednostkowe, odpowiadające natężeniu σ, a a i m stałe zależne od materyału. (W przypadku $m = 1$ sprowadza się oczywiście powyższe równanie do prawa Hooke'a). Za przykładem Bacha[2], gorącego zwolennika prawa potęgowego, usiłowano w ostatnich latach niejednokrotnie stosować to prawo w teoryi wytrzymałości, zwłaszcza w praktycznie ważnym przypadku zgięcia, i na tej podstawie obliczono położenie osi obojętnej, tudzież największe natężenia dla belki o przekroju prostokątnym, ażeby porównać teoryę z wynikami doświadczeń nad zgięciem. W pracach o tym przedmiocie[3] nie

---

[1]) Streszczenie tej pracy znaleść można w znakomitej książce A. Föppla p. t. „Vorles. über techn. Mechanik" (t. III, str. 55).

[2]) Ob. jego „Elastizität und Festigkeit" (IV wyd. Berlin 1902).

[3]) R. Latowski. „Zeitschr. d. Ver. d. Ing." 1897, str. 941 „Zeitschr. d. öst. Ing. u. Arch. V", 1898, str. 56; W. Carling, tamże 1898, str. 249; L. Geusen, Z. d. V. d. I." 1898, str. 463; Fr. Engesser tamże str. 303.

znalazłem jednakże nigdzie dostatecznie prostego wzoru na wyznaczenie wymiarów przekroju, któryby się dał wygodnie zastosować w praktyce.

Okażę poniżej, w jaki sposób dojść można do tego wzoru, bez uciekania się do przybliżeń [1].

Niech równania

$$\varepsilon = a_d \sigma^m , \quad \varepsilon = a_z \sigma^n , \tag{2}$$

przedstawiają prawa odkształceń odpowiednio dla ciśnionych i ciągnionych włókien belki, zgiętej w płaszczyźnie równoległej do boku h prostokątnego przekroju. Oś obojętna, równoległa do drugiego boku b dzieli h na dwie części e_d i e_z. Oznaczywszy nadto przez σ_d i σ_z ciśnienia i ciągnienia jednostkowe we włóknach skrajnych, zaś przez y odległość dowolnego włókna od osi obojętnej, mamy ze względu na przyjęcie Naviera (poparte najnowszemi doświadczeniami):

$$y : e_d = \sigma^m : \sigma_d^m \quad \text{dla ciśnionej,}$$

$$y : e_z = \sigma^n : \sigma_z^n \quad \text{dla ciągnionej części przekroju,}$$

z czego wynika dalej:

$$\sigma = \sigma_d \sqrt[m]{\frac{y}{e_d}} , \tag{3a}$$ $$\sigma = \sigma_z \sqrt[n]{\frac{y}{e_z}} \tag{3b}$$

Warunki równowagi natężeń, przyłożonych do elementów przekroju $dF = bdy$, z siłami zewnętrznemi dają teraz, po pierwsze:

$$\int\limits_{y=0}^{y=e_z} \sigma dF = \int\limits_{y=0}^{y=e_z} \sigma dF ; \tag{4}$$

powtóre:

$$\text{(Moment zgięcia)} \quad M = \int\limits_0^{e_d} \sigma y dF + \int\limits_0^{e_e} \sigma y dF . \tag{5}$$

[1]) Jak to czyni M. Koenen w „Zentralblatt d. Bauv" 1902, str. 229.

Po wstawieniu wartości na σ z równań (3a) i (3b) i zcałkowaniu znajdziemy równania:

(4a) $$\frac{m}{m+1}\,\sigma_d e_d = \frac{n}{n+1}\,\sigma_z e_z\,,$$

(5a) $$M = \frac{m}{1+2m}\,\sigma_d b\, e_d^2 + \frac{n}{1+2n}\,\sigma_z b\, e_z^2\,.$$

Ale do wyznaczenia niewiadomych σ_d, σ_z, e_d, e_z potrzebne są jeszcze dwa równania. Jednem jest oczywiście:

(6) $$e_d + e_z = h\,,$$

drugie zaś wynika z założonej proporcyonalności wydłużeń włókien krajnych względem ich odległości od osi obojętnej:

(7) $$\frac{e_d}{e_z} = \frac{a_d\,\sigma_d{}^m}{a_z\,\sigma_z{}^n}\,,$$

Powyższe cztery równania najłatwiej rozwiązać przez wprowadzenie pomocniczej niewiadomej:

(7a) $$u = \frac{e_d}{e_z} = \frac{a_d\sigma_d{}^m}{a_z\,\sigma_z{}^n}\,.$$

W istocie z połączenia (6) i (7a) wypada:

8) $$e_d = \frac{hu}{1+u}\,,\quad e_z = \frac{h}{1+u}\,,$$

a po wstawieniu tych wartości w równanie (5a), otrzymamy:

9) $$\begin{aligned} M &= \frac{m}{1+2m}\,b\sigma_d\,\frac{u^2h^2}{(1+u)^2} + \frac{n}{1+2n}\,b\sigma_z\,\frac{h^2}{(1+u)^2} \\ &= \frac{bh^2}{(1+u)^2}\left[\frac{m}{1+2m}\,\sigma_d u^2 + \frac{n}{1+2n}\,\sigma_z\right], \end{aligned}$$

albo wreszcie wskutek (7a):

$$M = \frac{bh^2}{(a_d\sigma_d{}^m + a_z\sigma_z{}^m)^2}\left[\frac{m}{1+2m}a_d{}^2\sigma_d{}^{2m+1} + \frac{n}{1+2n}a_z{}^2\sigma_z{}^{2n+1}\right]. \tag{10}$$

Obok tego daje rugowanie ilości e_d i e_z z równań (4a) i (7):

$$\frac{m}{m+1}a_d\sigma_d{}^{m+1} = \frac{n}{n+1}a_z\,\sigma_z{}^{n+1}. \tag{11}$$

Równania zatem (10) i (11) mają tylko dwie niewiadome σ_d i σ_z. Przy obliczeniach przekroju należy jednak jedno z tych natężeń, mianowicie niebezpieczne, uważać za dane. Dla wyżej wymienionych materyałów o stosunkowo małej wytrzymałości na ciągnienie będzie σ_z nateżeniem niebezpiecznem, wskutek czego można przyjąć natężenie dopuszczalne $\sigma_{\text{dop}} = \sigma_z$.

Z równania (11) wypada więc:

$$\sigma_d = \left(\frac{m+1}{m}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{a_z}{a_d}\right)^{\frac{1}{m+1}}\sigma_{\text{dop}}^{\frac{n+1}{m+1}}. \tag{I}$$

Pisząc teraz równanie (10) w formie:

$$M = \frac{bh^2}{6}\sigma_{\text{red}} = W\sigma_{\text{red}}, \tag{II}$$

przyczem W oznacza zwyczajny moduł przekroju prostokątnego a natężenie sprowadzone

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{6}{(a_d\sigma_d{}^m + a_z\sigma_{\text{dop}}^n)^2}\left[\frac{m}{1+2m}a_d^2\sigma_d^{2m+1} + \frac{n}{1+2n}a_z^2\sigma_{\text{dop}}^{2n+1}\right] \tag{III}$$

jest niezależne od wymiarów przekroju, uzyskujemy bardzo prosty sposób obliczenia przekroju belki prostokątnej, narażonej na zgięcie danym momentem M, mianowicie zapomocą równania (II), jeżeli tylko wartości σ_{red}, odpowiadające natężeniu dopuszczalnemu danych materyałów, są raz na zawsze obliczone zapomocą równań (I) i (III).