Wałęcki.

DOWÓD TWIERDZENIA D'ALEMBERTA[1].

Każde równanie algebraiczne $E(x)=0$, gdzie $E(x)$ jest wielomianem całkowitym o spółczynnikach rzeczywistych lub urojonych posiada przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty lub urojony postaci $a+bi$.

Dajmy, że wielomian $E(x)$ jest stopnia p. Równanie dane możemy napisać w postaci $P+Qi=0$, gdzie P i Q są wielomiany całkowite o spółczynnikach rzeczywistych; równaniem sprzężonem będzie $P-Qi=0$. Równanie $P^2+Q^2=0$ stopnia $2p$ ma spółczynniki rzeczywiste. Jeżeli to równanie posiada pierwiastek postaci $a+bi$, to napewno i równanie $P+Qi=0$ będzie miało pierwiastek. Gdy bowiem napiszemy $a+bi$ zamiast x, w iloczynie $(P+Qi)(P-Qi)$, otrzymamy w wyniku zero; stąd jeden z czynników iloczynu musi znikać; jeżeliby tym czynnikiem był $P-Qi$, to ilość $a-bi$ byłaby pierwiastkiem równania $P+Qi=0$.

Połóżmy $P^2+Q^2=f(x)$ i zamiast x napiszemy $y+z$, tak że będzie:

$$f(x)=\varphi(z^2,y)+z\psi(x^2,y),$$

[1]) Podany tu dowód twierdzenia zasadniczego teoryi równań algebraicznych ogłoszony został najprzód w nocie w „Comptes rendus" Akademii paryskiej **96** str. 772–773 (1883), następnie w „Nouvelles Annales de mathématiques" (3), **2**, str. 241—248 (1883). Powtórzył je B. Niewęgłowski w swojej „Algebrze" (Patrz Sprawozdanie nasze w zeszycie 1—2 „Wiadomości z r. b. str. 76—81). Loria „Esame di alcune ricerche concernenti l'esistanza di radici nelle equazioni algebriche" (Bibliotheca mathem. 189.) i „Il teorema fondamentale della teoria della equazioni algebriche", (Rivista di matematica I, 1892) zalicza ten dowód do kategoryi dowodów wcześniejszych Clifforda (1870) i Maleta (1878). Mimo to uważaliśmy za właściwe ogłosić go w piśmie naszem (według tekstu u Niewęgłowskiego), ponieważ jest u nas prawie nieznany.

gdzie $\varphi(z^2, y)$ $\psi(z^2, y)$ będą wielomiany całkowite co do z^2 o spółczynnikach całkowitych co do y.

Dajmy najprzód, że liczba p jest nieparzysta. Wypadkowa wielomianów [1] $\varphi(z^2, y)$ i $\psi(z^2, y)$ względem z^2 jest stopnia $p(2p-1)$ co do zmiennej y, a więc stopnia nieparzystego i o wszystkich spółczynnikach rzeczywistych; będzie więc miała przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty $y=b$. Wstawmy tę wartość b zamiast y w wielomiany $\varphi(z^2, y)$, $\psi(z^2, y)$, inaczej mówiąc: w wielomianie $f(x)$ napiszmy $b+z$ zamiast x. Może się zdarzyć, że $\psi(z^2, b)$ będzie wtedy tożsamościowo zerem, ale nie może to stać się z wielomianem $\varphi(z^2, b)$, gdyż można założyć, że spółczynnik wyrazu najwyższego stopnia w wielomianie $\varphi(z^2)$ jest jednością. Jeżeli $\psi(z^2, b)=0$, będzie $f(x)=f(b+z=\varphi(z^2; b)$. Lecz $\varphi(z^2, b)$ jest stopnia nieparzystego p co do z^2, a zatem posiada przynajmniej jeden czynnik $z^2-a=(x-b)^2-a^2$. W tym przypadku równanie $f(x)=0$ posiada pierwiastki $x=b\pm\sqrt{a}$.

Dajmy teraz, że $\psi(z^2, b)$ nie jest tożsamościowo zerem, wtedy wielomiany $\psi(z^2. b)$, $\varphi(z^2, b)$, których wypadkowa jest zerem, mają pewien czynnik wspólny $\theta(z^2)$, w skutek czego $f(x)$ jest iloczynem dwóch wielomianów całkowitych $f_1(x)$ i $f_2(x)$, które są oba stopni parzystych: $2p'$ i $2p''$, tak że $p=p'+p''$. Otóż p jest liczbą nieparzyrzystą, przeto jedna z dwóch liczb p', p'' jest nieparzysta, druga—parzysta. Dajmy, że nieparzystą jest liczba p'. Z funkcyą $f_1(x)$ postępujemy tak samo jak z funkcyą $f(x)$; stopień $2p'$ funkcyi $f_1(x)$ jest mniejszy od stopnia funkcyi $f(x)$. Funkcya $f_1(x)$ albo posiada dzielnik stopnia drugiego $(x-b')^2-a'$, albo będzie można ją rozłożyć na iloczyn dwu wielomianów. W ten sposób można iść dalej; ale ponieważ liczba działań jest ograniczona, albowiem ich stopnie wciąż zmniejszają się, to dojdziemy z koniecznością do dzielnika rzeczywistego stopnia pierwszego lub drugiego.

Rozpatrzmy teraz równanie o spółczynnikach rzeczywistych lub urojonych stopnia $m=2^k.p$, gdzie p jest liczbą nieparzystą. Dla skrócenia mówić będziemy, że m jest parzystości k-tej i okażemy, że gdy twierdzenie jest dowiedzione dla wszystkich równań, których stopień

[1]) Zakłada się tu, że teorya wypadkowej dwóch wielomianów jest utworzona niezależnie od pytania o istnieniu pierwiastkach wspólnych.

jest parzystości niższej niż k-ta, to jest także prawdziwe i dla stopnia parzystości k-tej; będzie tedy ogólnie prawdziwe, bo jest prawdziwe dla parzystości zero.

Niechaj $f(x)$ będzie stroną pierwszą równania. Jeżeli założymy, jak wyżej, $x=y+z$, oraz $f(x)=\varphi(z^2, y)$, to wypadkowa dwóch wielomianów $\varphi(z^2, y)$, $\psi(z^2, y)$ względem z^2 będzie stopnia $m(m-1)=2^{k-1}.p(2^k p-1)$ co do y. Jest ona tedy parzystości $k-1$ i dla tego znika dla pewnej wartości rzeczywistej lub urojonej wielkości y.

Wielomian $\varphi(z^2, y)$ jest względem z^2 parzystości $k-1$; jeżeli tedy b jest pierwiastkiem wypadkowej i jeżeli $\psi(z^2, b)=0$, to $\varphi(z^2, b)$ ma dzielnik z^2-a, a wtedy $f(x)$ ma dzielnik stopnia drugiego, $(x-b)^2-a$; jeżeli zaś $\psi(z^2, b)$ nie jest tożsamościowo zerem, to, jak wyżej, będzie $f(x)$ iloczynem dwóch wielomianów całkowitych $f_1(x)$, $f_2(x)$. Jeżeli $2^{k'}p'$ i $2^{k''}p''$ są stopnie tych czynników, wtedy:

$$2^k . p = 2^{k'}p' + 2^{k''}p''.$$

Nie może być, oczywiście, jednocześnie $k' > k$ i $k'' > k$, lecz może być naprzykład $k' = k$, $k'' > k'$ i jeżeli $k'' = k + h$, wtedy:

$$2^k p' + 2^{k''}p'' = 2^k (p' + 2^h p'');$$

w tym razie $p' + 2^h p'' = p$, a więc $p' < p$. Nakoniec jedna z liczb k' np. może być mniejsza od k. Tym sposobem stopień jednego z czynników, np. czynnika $f_1(x)$ będzie tej samej parzystości co m lecz mniejszy od m, albo parzystości mniejszej niż k. W tym ostatnim przypadku $f(x)$ posiada pierwiastek; w innych razach będziemy $f(x)$ traktowali tak, jak wyżej $f(x)$. Otrzymujemy tym sposobem widocznie ciąg ograniczony wielomianów, których stopnie wciąż zmniejszają się tak, że wreszcie dojdziemy koniecznie do czynnika stopnia 1-go funkcyi $f(x)$.