II. MECHANIKA ANALITYCZNA.

1. Zasada prędkości przygotowanych i Statyka Lagrange'a.

Czy uważać będziemy przyciągania i odpychania wzajemne punktów materyalnych za rzeczywistości nieprzywiedlne do postaci i ruchu, czy też, przeciwnie, za skutki ruchów, ukrytych jeszcze przed naszem badaniem, w każdym razie fizyk może i powinien nietylko wprowadzać do swych rozumowań figury i ruchy wyraźne, lecz odwoływać się musi i do sił, istotnie różnych od pojęć, należących do Geometryi i Kinematyki. Wyrazy: wyjaśnić zjawisko fizyczne mają skutkiem tego znaczenie zupełnie inne niż to, które nadawali im filozofowie kartezyańscy lub atomiści; wyjaśnienie, zatrzymujące się na sile, uważanej za element rzeczywiście lub tymczasowo prosty, ma analogię z wyjaśnieniem scholastycznem przez jakości i własności ukryte.

Według Newtona, jak i według Leibniza, Fizykę nową od Fizyki Szkoły różni zasadniczo ogólność zasad pierwszej z nich. Fizyka nowa nie powinna wyjaśniać żadnego zjawiska przez stwarzanie z powodu niego nowej specyalnej przyczyny; powinna ona starać się o rozwikłanie wszystkich szczegółów faktów, obserwowanych w Przyrodzie ciał, przy pomocy najmniejszej liczby zasad, możliwie najrozleglejszych.

Bezwątpienia, Fizyka, której plan nakreślił i podstawy założył Newton a całkowitą budowę zanalizował Boscovich, zadziwia nas już prostotą i rozległością swych zasad; ale czyż obok hypotezy podstawowej, że w świecie istnieją: czas, rozciągłość masa i siła, Fizyka ta nie czyni żadnych innych założeń, które możnaby wyeliminować? Czy zamiast sprowadzania materyi do mnogości punktów nierozciągłych i odosobnionych, nie możnaby przyjąć ciał rozciągłych, zmiennej postaci, mogących się wzajemnie dotykać? Czy zamiast uważania wszystkich sił za wzajemne przyciągania lub odpychania, będące funkcyami jedynie odległości punktów, na które działają, nie możnaby pozostawić tym siłom zupełnej nieoznaczoności, jednocząc jedynie z każdem działaniem przeciwdziałanie, równe mu i wprost przeciwne? Czy nie możnaby tym sposobem dojść do zasad Mechaniki w najwyższym, jaki pojąć się daje, stopniu ogólności?

Najwięksi geometrowie XVIII wieku pozostawili nam przyczynki do takiej konstrukcyi Mechaniki rozumowej; Daniel Bernoulli, d'Alembert, Euler, że wymienię tylko najznakomitszych, związali imię swoje z tą lub ową częścią tej budowy; całkowite zaś wykończenie jej zawdzięczamy Lagrange'owi.

Lagrange, powiedział Fourier[1], był urodzony na to, aby czynić odkrycia i bogacić wszystkie gałęzie Rachunku. Na każdem stanowisku, pasterza czy księcia, byłby on został wielkim geometrą; stał się nim z konieczności i bez wysiłku..."

„Rys wybitny jego geniuszu polega na jedności i wielkości jego widoków. We wszystkiem trafiał na myśl prostą, prawdziwą i bardzo wzniosłą. Jego główne dzieło „Mechanika analityczna" mogłaby być nazwana Mechaniką filozoficzną, albowiem sprowadza w niej wszystkie prawa równowagi i ruchu do jedynej zasady, i, co jest niemniej godnem podziwu, poddaje wszystko jednej metodzie Rachunku, którego sam jest wynalazcą.

Pierwsza część „Mechaniki analitycznej" jest poświęcona Statyce; zaczyna się ona od słów:

„Przez siłę lub potęgę rozumiemy ogólnie przyczynę jakąkolwiek, która nadaje lub usiłuje nadać ruch ciału, do którego uważamy ją za przyłożoną; siła ta lub potęga wyraża się ilością ruchu nadanego lub gotowego do nadania. W stanie równowagi siła nie ma istotnego skutku; wytwarza wtedy tylko dążność do ruchu, lecz należy zawsze mierzyć ją skutkiem, któryby wytworzyła, gdyby nie doznawała przeszkody".

Saint Venant na marginesie egzemplarza „Mechaniki analitycznej", który kierował jego rozmyślaniami, napisał te słowa: „Tak więc autor „Mechaniki analitycznej" nie poddaje

---

[1] „Éloge historique de M. la marquis de Laplace prononcé dans la séance de l'Académie Royale des sciences le 15 juin 1829" par M. le baron Fourier.

w wątpliwość istnienia sił lub przyczyn specyalnych każdego ruchu.“ W rzeczy samej, przytoczony ustęp odtwarza prawie dosłownie myśl, zawartą w pewnych fragmentach u Leibniza; Lagrange podobnie, jak Leibniz, uważa pojęcie siły jako jedno z pierwszych pojęć Mechaniki; jeżeli wymienia ruch, to dlatego, aby dla pojęcia tego, przestępnego dla Geometryi, módz znaleść odpowiedni symbol liczbowy, nadający się do występowania we wzorach.

Lagrange zajmuje się na początku postawieniem zasad Statyki, t. j. ustaleniem okoliczności, w których siły, działające na układ materyalny, utrzymują go w równowadze.

Problemat statyczny był łatwy w Fizyce newtoniańskiej. Ponieważ każdy układ sprowadzał się do punktów swobodnych, równowaga układu wypływała z równowagi każdego punktu; każdy zaś punkt znajdował się w równowadze, gdy pozostawał pod dzialaniem sił, których wypadkowa jest zerem. Tak więc cała Statyka wynikała z jednej reguły równoległoboku sił.

Pytanie to staje się atoli subtelnem, gdy przywrócimy ciałom ich rozciągłość, postać, możność ślizgania się i toczenia jednych po drugich, wreszcie odkształcania się.

Już Archimedes, badając równowagę takich układów, przynajmniej w przypadkach bardzo prostych, postawił zasadę równowagi drąga. Długie opracowywania, które w biegu czasów nowszych urobiły Mechanikę, przekształciły powoli tę starą regułę na zasadę nieskończenie ogólniejszą: Zasadę przesunięć przygotowanych.

Aby znaleść źródło zasady przesunięć przygotowanych, należy cofnąć się do czasów Odrodzenia, do Leonarda da Vinci i Guida Ubaldi. Widzimy ją już wyraźnie w pismach Galileusza, którego rozumowania są komentarzem formuły: „zysk na sile, jaki daje mechanizm, pociąga za sobą równoważną stratę na prędkości; w pismach Descartes'a, który wychodzi z twierdzenia: „ta sama siła, która może podnieść ciężar 100 funtów na wysokość dwóch stóp, może podnieść ciężar 200 funtów na wysokość jednej stopy; Toricelli'ego, Pascala, który przyjmował zasadę: „nigdy ciało nie porusza przez swój ciężar, jeżeli przytem jego środek ciężkości nie spada.“

Zaniedbanej nieco w czasie, gdy Huygens i Newton tworzyli naukę ruchu, zasadzie prędkości albo lepiej przesunięć przygotowanych nadał formę zupełniejszą i ogólniejszą Jan II Bernoulli, który zakomunikował ją w r. 1717 Varignonowi; ten ostatni w „Nowej Mechanice“ podał liczne tej tej zasady zastosowania; Lagrange'owi wszakże pozostawiona została zasługa odkrycia dość szerokiej podstawy, aby można było osadzić na niej całą Mechanikę [1].

Ciała, składające układ materyalny, nie mogą doznawać jakiejkolwiek dowolnej zmiany swej postaci i położenia; natura, którą im przypisujemy, od której nadajemy im nazwy, która stanowi właściwie ich definicyę, wyłącza pewne przesunięcia, pewne odkształcenia, których bez wprowadzenia sprzeczności ciałom przypisywać nie można. Weźmy ciało stałe. Jego miejsce może się zmieniać, lecz postać i rozmiary muszą pozostawać bez zmiany. Dwa ciała stałe są w zetknięciu. Mogą one tworzyć się i ślizgać jedno po drugiem, nie przenikając się, ani odkształcając. Nitka giętka i nierozciągliwa może zakreślać wszelkie gatunki linij, byleby nie zmieniała swej długości. Płyn nieściśliwy może zajmować przestrzenie najrozmaitszej postaci, byleby one miały tę samą objętość. Nazywamy połączeniami te warunki ścieśniające, wypływające z samej definicyi układu mechanicznego, a równaniami połączeń nazywamy równości algebraiczne, przez które wyrażają się te warunki.

Jeżeli nie chcemy być w sprzeczności z definicyą układu, nie możemy myślą narzucać ciałom go składającym wszystkich możliwych przesunięć, lecz jedynie tylko takie, które są zgodne z połączeniami. Są to właśnie przesunięcia, które nazywamy przygotowanemi.

Nadajmy układowi, który mamy zbadać, nieskończenie małe przesunięcie; punkt przyłożenia każdej z sił, działających na układ, opisuje drogę nieskończenie małą, którą można uważać za prostoliniową. Weźmy składową siły względem tej drogi nieskończenie

---

[1] Lagrange. „Mécanique analytique“, I-re partie sect II. (Cytujemy zawsze to dzieło według wydania 2-go, ostatniego, które przygotował sam Lagrange).

małej i pomnóżmy wielkość składowej przez długość drogi. Otrzymany iloczyn będzie p r a c ą siły w kierunku rozważanego nieskończenie małego przesunięcia. Jeżeli przesunięcie jest przygotowanem, i praca będzie p r a c ą p r z y g o t o w a n ą.

Jesteśmy teraz w stanie wypowiedzieć zasadę podstawową Statyki: A b y u k ł a d s i ł u t r z y m y w a ł w r ó w n o w a d z e u k ł a d m a t e r y a l n y, j e s t k o n i e c z n e m, b y d l a k a ż d e g o p r z e s u n i ę c i a n i e s k o ń c z e n i e m a ł e g o, n a d a n e g o u k ł a d o w i m a t e r y a l n e m u, s u m a p r a c p r z y g o t o w a n y c h s i ł d z i a ł a j ą c y c h b y ł a r ó w n a z e r u.

Ileż to myśli nowych i płodnych grupuje się na około tej zasady w pierwszej części „Mechaniki analitycznej"! Wykład jej u L a g r a n g e'a mieści się w kilku wierszach, których wielka doniosłość z każdym dniem niemal rosła.

Jest rzeczą jasną, że praca przygotowana pewnej liczby sił, działających na układ materyalny, doznający danego przesunięcia, zmienia tylko znak, skoro zwrot wszystkich sił zmieniany na przeciwny, nie zmieniając ani wielkości, ani punktu przyłożenia żadnej z nich. Wyobraźmy sobie teraz dwa układy sił, różne od siebie, lecz takie, by działając na jeden i ten sam układ materyalny, wytwarzały dla każdego przesunięcia przygotowanego tęż samą pracę. Pozwólmy tym dwóm układom sił działać równocześnie, zmieniwszy uprzednio zwrot wszystkich sił w jednym z nich na przeciwny. Każde przesunięcie przygotowane wytworzy teraz pracę zero, tak że układ materyalny będzie w równowadze. Tym sposobem jeden którykolwiek z naszych dwóch układów sił jest równoważony przez drugi, gdy w tym ostatnim zmienimy zwrot wszystkich sił na przeciwny. Innemi słowy, nasze dwa układy sił są ściśle równoważne dla badanego układu materyalnego: jeden z nich można podstawić za drugi, nie zmieniając w niczem własności mechanicznych tego układu.

Nie jest tedy rzeczą ważną znać poszczególnie każdą z sił, działających na różne ciała układu, jej punkt przyłożenia, jej wielkość i kierunek. Wystarczy, jeżeli mamy tylko należyte dane o układzie sił, pozwalające wyznaczyć pracę, wykonaną w kierunku pewnego przesunięcia przygotowanego. Wszelkie dane uzupełniające byłyby już zbyteczne; dane różne co do formy, lecz prowadzące do tego samego wyrażenia pracy przygotowanej, są tożsamemi w oczach mechanika [1].

Tak więc, zamiast różnych sił, działających na ciało stałe, można podstawić układ dwóch sił, albo też jednę siłę i jednę parę, albo też inne kombinacye sił. Wszystkie te kombinacye, różne dla geometry, dają tę samą prącę dla danego przesunięcia przygotowanego ciała stałego; mechanik nie odróżnia przeto jednej od drugiej.

Wynika stąd, że mechanik, badając równowagę i ruch ciała stałego, nie będzie mógł rozstrzygnąć, czy grupa sił, której to ciało istotnie podlega, jest tą lub inną z tych kombinacyj; pytanie to nie ma dla niego żadnego znaczenia. Zachodzić tu będzie nieoznaczoność w rozwiązaniu zadania dla geometry; nie ma jej dla mechanika, który choć krótko zastanowić się zechce nad zasadami uprawianej przez siebie nauki: spostrzeże on jasno, że zamiast każdego układu sił, zdolnych do wytworzenia ruchów obserwacyjnych w układzie, podstawić można nieskończenie wiele innych układów, wytwarzających te same ruchy.

Aby określić w całej ogólności przesunięcie przygotowane nieskończenie małe układu mechanicznego, nie trzeba w większości przypadków znać wielkości i kierunku drogi, przebieżonej przez każdy z punktów materyalnych; wystarcza, gdy dane są wartości pewnych nieskończenie małych, odpowiednio dobranych wielkości. Podania, ustalające naturę układu materyalnego, pozwalają już z danych wartości tych nieskończenie małych wyznaczać drogę, jaka przebiega punkt którykolwiek.

Dajmy, naprzykład, że układ badany jest ciałem stałem. Dobrze znane twierdzenie poucza nas, że można zawsze to ciało stałe przeprowadzić z jednego położenia dowolnie danego w inne położenie również dowolne, za pomocą metody następującej: Obrawszy raz na zawsze trzy proste, wzajemnie prostopadłe, wychodzące z jednego punktu, nadajmy kolejno ciału stałemu

---

[1]) Lagrange. „Mécanique analytique" wyd. 2-gie I-re partie, Sect. II № 14.

obrót odpowiedni około każdej z tych trzech prostych, następnie odpowiedni ruch postępowy wzdłuż kierunku każdej z tych prostych. Znajomość tych trzech obrotów i tych trzech przesunięć wyznacza już trajektoryę jakiegokolwiek punktu tego ciała stałego i wyznacza zupełnie przesunięcie przygotowane.

Wyobraźmy sobie tedy, że wszelkie przesunięcie przygotowane nieskończenie małego pewnego układu materyalnego jest już zupełnie znane, gdy damy waryacye nieskończenie małe $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots$, jakich doznają pewne mniej lub więcej liczne wielkości $\alpha, \beta \ldots$; wielkości te są zmiennemi niezależnemi układu.

Wyrażenie pracy przygotowanej sił działających na układ będzie miało postać[1]: $A\delta\alpha + B\delta\beta + \ldots$

Aby poznać wszystkie skutki sił działających na układ, jest koniecznem i dostatecznem znać wyrażenie ich pracy przygotowanej; aby zaś znać to wyrażenie, jest koniecznem i dostatecznem znać wielkości $A, B \ldots$ Tak więc dła mechaniki istotnie ważną jest znajomość tych wielkości, nie zaś bynajmniej znajomość sił samych, przy pomocy których można je uważać za utworzone. Można wielkościom tym nadać nazwę sił uogólnionych[1].

Natura siły uogólnionej A zależy od natury zmiennej α, do której się odnosi, gdyż iloczyn $A\delta\alpha$ powinien zawsze przedstawiać pracę. Jeżeli α, a więc $\delta\alpha$ jest długością, A jest siłą we właściwem tego wyrazu znaczeniu; lecz jeżeli α i $\delta\alpha$ są kąty, wtedy A będzie wielkością tego samego gatunku, co moment pary; jeżeli α i $\delta\alpha$ są objętości, A będzie wielkością jednorodną z ciśnieniem.

Skoro pracę przygotowaną sił działających na układ przedstawimy w postaci $A\delta\alpha + B\delta\beta + \ldots$, gdzie siły uogólnione $A, B, \ldots$ podlegają znanym prawom, wtedy warunki równowagi układu otrzymamy bezpośrednio w formie najogólniejszej i najprostszej; warunki te powinny zamieniać na zero każdą z wielkości $A, B \ldots$

---

[1]) Lagrange. „Mécanique analytique", wyd. 2-gie, I-re partie, sect II, Nr. 12 i 13.

[2]) Lagrange. „Mécanique analytique", tamże Nr. 9.

Analiści wiedzą, że w ogóle wyrażenie takie jak $A\delta\alpha + B\delta\beta + \ldots$, gdzie A, B... zależą od $\alpha, \beta \ldots\ldots$ nie jest zmniejszeniem (ubytkiem) jednej wielkości, która jest zupełnie znana, gdy znamy wartości zmiennych $\alpha, \beta \ldots\ldots$ Lecz zachodzi to w pewnych przypadkach szczególnych; praca, wykonana w przesunięciu przygotowaniem jakiemkolwiek, jest wtedy zmniejszeniem, jakiego doznaje dla tego przesunięcia pewna wielkość, która dla każdego stanu układu ma wartość oznaczoną [1]. Lagrange wielkości tej nie dał nazwy osobnej; dziś nazywamy ją potencyałem sił, działających na układ.

Istnienie potencyału sił, działających na układ, jest dla matematyka własnością wyjątkową; lecz jeżeli przyjmiemy, że układ podlega jedynie działaniom wzajemnym punktów materyalnych lub składających go elementów objętości; jeżeli przyjmiemy z Newtonem, że działanie wzajemne dwóch elementów jest przyciąganiem lub odpychaniem, i że wielkość tego działania znajdujemy, mnożąc przez masy dwóch elementów funkcyę ich wzajemnej odległości, znajdziemy, że układ sił ma potencyał. Badanie układu, mającego potencyał, obejmuje w sobie jako przypadek szczególny badanie układu odosobnionego w przestrzeni i zbudowanego tak, jak chce Fizyka newtoniańska. Gdy ograniczymy się do badania układów, których działania wewnętrzne posiadają potencyał, wydawać się będzie geometrze, żeśmy się zamknęli w zagadnieniu nieskończenie szczególniejszem; tymczasem zagadnienie to w swej obszerności i ogólności przewyższa nieskończenie problemat, postawiony przez Newtona i jego uczniów.

Skutek mechaniczny układu sił zależy jedynie od wyrażenia na ich pracę przygotowaną; skoro siły mają potencyał, to pracę, którą wykonywają przy pewnej jakiejkolwiek zmianie przygotowanej, można obliczyć, jeżeli znamy tylko wartość potencyału w każdym ze stanów układu. Znajomość ta zastępuje i czyni zbyteczną znajomość sił lub sił uogólnionych. I tak, by wyznaczyć całkowi-

[1] Lagrange. „Mécanique analytique", I-re part. Sect. III, Nr. 21.

cie własności mechaniczne układu ciał, nie jest koniecznem wyszczególnienie sił, działających wewnątrz tego układu, ani sił uogólnionych, którym one są równoważne; wystarczy wskazać, w jaki sposób potencyał wewnętrzny zmienia się wraz ze stanem układu.

Pójdźmy jeszcze dalej: Możemy, jeżeli chcemy, rozważać w Mechanice tylko grupy ciał, całkowicie odosobnionych w przestrzeni. Wystarczy w tym celu objąć w jednym układzie i ten układ szczególny, który badać chcemy, i ciała, których wpływ na nasz układ nie może być zaniedbany. Wtedy będziemy mieli do czynienia tylko z siłami wzajemnemi, działającemi pomiędzy różnemi ciałami jednego układu; można założyć, że te siły wewnętrzne zależą od potencyału, którego znajomość czyni zbyteczną znajomość samych sił. Tak więc pojęcie siły, po rozpłynięciu się w pojęciu obszerniejszem siły uogólnionej, traci, że tak powiemy, cechę pierwotności i ukazuje się jako proste pojęcie pochodne pojęcia potencyału. Taki jest naturalny wynik z zasad, postawionych przez Lagrange'a.

Płodność tych zasad nie została przez to jeszcze wyczerpana. Dadzą one nam pojęcie nowe, odgrywające ważną rolę w dyskusyi nad Mechaniką rozumową, a mianowicie pojęcie siły połączenia

Rozważmy dwa układy, które oznaczmy cyframi 1 i 2. Stan układu 1, wziętego osobno, wyznacza się przez zmienne niezależne $\alpha_1, \beta_1, \ldots$; praca przygotowana wszystkich sił, działających na układ, będzie $A_1\delta\alpha_1 + B_1\delta\beta_1 + \ldots$. Stan układu 2, wziętego osobno, wyznacza się przez zmienne niezależne $\alpha_2, \beta_2, \ldots$; praca przygotowana wszystkich sił nań działających będzie $A_2\delta\alpha_2 + B_2\delta\beta_2 + \ldots$.

Teraz, nie zmieniając w niczem sił, działających rzeczywiście na układy 1 i 2, umieśćmy obok siebie te układy w ten sposób, aby pewne ciała pierwszego układu znalazły się w zetknięciu z pewnemi ciałami drugiego, i rozważmy zjednoczenie obu układów, jako tworzące układ jedyny.

Każde przesunięcie przygotowane układu wypadkowego nadaje wielkościom $\alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_2, \beta_2, \ldots$ zmiany nieskończe małe $\delta\alpha_1, \delta\beta_1, \ldots \delta\alpha_2, \delta\beta_2, \ldots$, a siłom działającym pracę $A_1\delta\alpha_1 + B_1\delta\beta_1 + \ldots \ldots + A_2\delta\alpha_2 + B_2\delta\beta_2 + \ldots$ lecz — i tu jest właśnie punkt zasadniczy tych rozważań—nie otrzymamy zawsze przesunięcia przygotowanego układu wypadkowego, kombinując jakiekolwiek przesunięcie przygotowane układu 1 z jakiemkolwiek przesunięciem przygotowanem układu 2. Każde z tych dwóch przesunięć przygotowanych dawało się pomyśleć, gdy każdy z układów 1 i 2 istniał osobno; ich zespół może stać się niemożliwy, skoro układy 1 i 2 są zestawione razem, albowiem miałby jako skutek sprowadzenie równocześnie i do tego samego miejsca w przestrzeni pewnych ciał układu 1 i pewnych ciał układu 2. Zestawienie więc układów 1 i 2 nakłada przesunięciom każdego z nich nowe ograniczenia, nowe połączenia; połączenia te nie pozwalają na zupełną dowolność wartości nieskończenie małych, które w przesunięciu przygotowanem nadawać można przyrostom $\delta\alpha_1, \delta\beta_1, \ldots \delta\alpha_2, \delta\beta_2, \ldots$; wymagają one, aby te wartości czyniły zadość jednej lub kilku równościom, zwanym *równaniami połączeń*.

Troska o ogólność matematyczną powinna w tem piśmie ustąpić miejsca życzeniu przedstawienia myśli w postaci najprostszej i najbardziej uderzającej. Przyjmijmy tedy, że zjednoczenie układów 1 i 2 dało początek jednemu równaniu połączenia:

$$a_1\,\delta\alpha_1 + b_1\,\delta\beta_1 + \ldots + a_2\delta\alpha_2 + b_2\,\delta\beta_2 + \ldots = 0.$$

Aby znaleść warunki równowagi układu, powinniśmy wyrazić nie to, że każdy układ wartości, nadanych przyrostom $\delta\alpha_1, \delta\beta_1, \ldots \delta\alpha_2, \delta\beta_2, \ldots$, czyni pracę przygotowaną równą zeru, lecz to jedynie, że ta praca jest zerem, ile razy spełnia się warunek połączenia. Algebra uczy nas, że można znaleść pewien taki czynnik λ, zależny od stanu układów 1 i 2 i od sił na nie działających, przy pomocy którego zagadnienie sprowadza się do następującego: Dla każdego układu wartości przyrostów $\delta\alpha_1, \delta\beta_1, \ldots \delta\alpha_2, \delta\beta_2, \ldots$ uczynić równą zeru sumę pracy przygotowanej i pierwszej strony równania połączenia, pomnożonego uprzednio przez λ. W ten sposób otrzymamy następujące warunki równowagi naszego układu zespolonego:

$$A_1 + \lambda a_1 = 0 \quad , \quad B_1 + \lambda b_1 = 0 , \; \ldots$$

$$A_2 + \lambda a_2 = 0 \quad , \quad B_2 + \lambda b_2 = 0 , \; \ldots$$

Weźmy równania pierwszego wiersza; są to równania, które otrzymalibyśmy wprost jako warunki równowagi układu 1, gdybyśmy go byli uważali, odwracając uwagę od przymusu, jaki zetknięcie z układem 2 nadaje jego przesunięciom, i zakładając, że jest poddany nie siłom uogólnionym $A_1, B_1, \ldots$, lecz siłom uogólnionym $A_1 + \lambda a_1, B_1 + \lambda b_1, \ldots$. Równania drugiego wiersza nasuwają nam podobne uwagi, dotyczące układu 2.

Widzimy tedy, że można otrzymać równania równowagi każdego z dwóch układów dwiema drogami, na pozór różnemi, lecz w istocie ściśle równoważnemi.

Na pierwszej drodze rozpatrujemy każdy z dwóch układów jako poddany siłom, które nań działają rzeczywiście, lecz uwzględniamy ograniczenia, jakie wzajemne zetknięcie układu narzuca przesunięciom przygotowanym każdego z nich.

Na drodze drugiej traktujemy każdy z układów, jakby istniał sam jeden, lecz do każdej z sił uogólnionych takich, jak A_1 którym istotnie podlega, dołączamy siłę uogólnioną czysto fikcyjną λa_1; forma tej siły połączenia zależy od natury warunków połączenia i od wyrażenia czynnika λ, zwanego mnożnikiem Lagrange'a.

Można stosunek tych dwóch metod scharakteryzować krótko, mówiąc, że w pierwszej zachowujemy warunki połączeń a unikamy wprowadzenia sił połączeń, w drugiej przeciwnie usuwamy warunki połączeń a wprowadzamy siły połączeń.

By oświetlić podstawy statyki Lagrange'a, rozważaliśmy układ, którego stan jest całkowicie oznaczony przez pewną mniejszą albo większą, ale ograniczoną, liczbę zmiennych niezależnych. Lecz nie wszystkie układy dają się w ten sposób określić. Są układy ciągłe, które należy rozkładać na nieograniczoną liczbę elementów nieskończenie małych, stykających się jedne z drugiemi; każdy z tych elementów zależy od skończonej liczby zmiennych. Pomiędzy temi układami ciągłemi jedne, jak nici lub pręty sprężyste, rozciągają się według jednego tylko wymiaru, inne, jak błony i płyty—według dwóch wymiarów, inne, wreszcie, jak płyny lub ciała stałe sprężyste, mają rozciągłość skończoną we wszystkich wymiarach. Zasady, wyżej w ogólnych zarysach przedstawione, stosować można bez głębszych zmian do takich układów [1]. Jedynie wyrażenie pracy przygotowanej, zamiast być wprost sumą wyrazów, będzie całką pojedyńczą, podwójną lub potrójną i będzie poddane prawidłom Rachunku waryacyjnego.

Przez to prawa równowagi nici i błon giętkich [1] nabierają osobliwej jasności i ogólności; lecz nadewszystko badanie równowagi cieczy stwierdza szerokość i przenikliwość metod L a g r a nge'a.

Od czasów A r c h i m e d e s a, Hydrostatystyka uczyniła bezwątpienia znaczne postępy. G a l i l e u s z, S t e v i n i P a s c a l doszli po wielu próbach do odkrycia dokładnych prawd równowagi płynów ciężkich. Zagadnienie o postaci planet zniewoliło geometrów do poddania analizie ciał płynnych, pozostających pod działaniem innych sił, niż siła ciężkości; zamiast zarysów, podanych przez H u y g e n s a, N e w t o n a, B o u g u e r a, M a c l a u r i n a, C l a i r a u t postawił metodę ogólną i ścisłą; w małym traktacie [3], arcydziele jasności i wytworności, ogłoszonym w r. 1743, ustanowił on związek pomiędzy Hydrostatyką a teoryą różniczek zupełnych, wykazał, że płyn nie może być utrzymany w równowadze przez wszystkie gatunki sił, odkrył wreszcie własności zasadnicze powierzchni poziomu. W r. 1755 E u l e r znalazł ponownie rezultaty C l a i r a u t a drogą odmienną; taż sama droga posłużyła później C a u c h y'emu do postawienia praw, od których zależy ciśnienie wewnątrz jakiegokolwiek ciała.

Mimo tych ciągłych postępów, nie wszystko było jasnem i ścisłem w tej teoryi płynów. Natura ciśnienia hydrostatycznego pozostawała ciemną. Przyjmowano, że ciśnienie to istnieje, że jest zawsze normalne do elementu powierzchniowego, do którego się odnosi, że wielkość jego nie zmienia się, gdy ten element obraca się około jednego ze swych punktów; lecz nie posiadano żadnego

---

[1] L a g r a n g e, „Mécaniquu analytique", wyd. 2-gie, Partre I, sect. IV, § 11.

[2] L a g r a n g e. Tamże 1-re part. sect V, Chap. III.

[3] C l a i r a n t. Théorie de la figure de la Terre, tirée des principes de l'Hydrostatique, Paryż 1743.

dowodzenia tych twierdzeń, ani nawet żadnej dokładnej definicyi ciśnienia.

Lagrange otrzymuje razem [1] wszystkie te twierdzenia przy pomocy swej metody ogólnej. Ciśnienie hydrostatyczne wprowadza się do jego rozumowań jako jeden z mnożników, których używa Rachunek waryacyjny, by uwolnić się od warunków połączeń; definicya ciśnienia jest przez to ściśle związana z pojęciem siły połączenia. Zatrzymajmy się nieco nad tą definicyą, gdyż była ona powodem poważnych rozpraw, o których później mówić będziemy.

Wystawmy sobie, że powierzchnia S dzieli płyn, będący w równowadze, na dwie części A i B; gdy płyn doznaje przesunięcia przygotowanego, wtedy dwie części A i B nie przenikają się wzajemnie; to przesunięcie tedy nie mogłoby wyniknąć z jakiegokolwiek przesunięcia części A, rozważanej osobno, skombinowanego z jakiemkolwiek przesunięciem części B, uważanej osobno; zetknięcie obu części stanowi dla każdej z nich połączenie.

Zatrzymajmy dla części A jej postać i położenie; usuńmy część B, lecz pozostawmy bez zmiany wszystkie siły, działające istotnie na część A; jeżeli pomiędzy temi siłami są takie, które wypływają z części B, wyobraźmy sobie, że zastąpiliśmy je innemi siłami dokładnie równemi, lecz wychodzącemi z innych ciał, nie stykających się z częścią A.

Oswobodzony od przeszkody, którą stawiało zetknięcie z częścią B, płyn A nie będzie wogóle w równowadze. Metoda Lagrange'a stwierdza, że przywrócimy go do równowagi, jeżeli do każdego elementu dS powierzchni S przyłożymy siłą normalną do powierzchni S, przenikającą do wnętrza obszaru A i mającą wielkość ΠdS. Czynnik Π pozostaje niezmienny, jeżeli element dS obraca się około jednego ze swoich punktów; wyobraża on ciśnienie hydrostatyczne w tym punkcie.

Skoro tedy dwie części plynne A i B są w zetknięciu, ciśnienie hydrostatyczne nie działa w istocie ani na jednę, ani na drugą,

---

[1] Lagrange. „Mécanique analytique" 1 part. secl. VII, § 11.

lecz jeżeli w myśli usuniemy jednę z nich, aby rozważać drugą, jakby istniała sama, należy przyłożyć do niej ciśnienie hydrostatyczne, aby zastąpić niem przeszkodę, jaką część tamta stawiała jej ruchowi.

2. *Zasada d'Alemberta i Dynamika Lagrange'a.*

Badania Galileusza nad przyśpieszeniem w spadku ciał ciężkich i Huygensa nad siłą odśrodkową w ruchu kołowym doprowadziły Newtona do postawienia prawa ruchu punktu materyalnego pod działaniem siły, danej w jakikolwiek sposób. Rozpatrzmy z jednej strony prostą, która tę siłę przedstawia; z drugiej prostą, mającą kierunek przyśpieszenia i o długości równej iloczynowi przyśpieszenia przez masę punktu; we wszystkich okolicznościach te dwie proste są jednego kierunku i tej samej długości.

Zasada ta wystarcza w zupełności do przedstawienia problematu Dynamiki w postaci równań, jeżeli tylko zgodnie z prawidłami Filozofii newtoniańskiej uważać będziemy wszystkie ciała jako punkty materyalne, wywierające na siebie wzajemne działania przyciągające lub odpychające; staje się atoli niewystarczającą, jeżeli wraz z Lagrangem uważamy ciała o rozmiarach skończonych, stykające się jedne z drugiemi i poddane rozmaitym połączeniom. W takim razie należy stosować zasadę ogólną, której przypadkiem bardzo szczególnym jest zasada poprzedzająca.

Znalezienie tej zasady ogólnej, pozwalającej na przedstawienie wszystkich problematów Dynamiki w postaci równań, było przedmiotem długich i potężnych usiłowań, których historyę skreślił nam Lagrange[1]; usiłowania te uwieńczone zostały odkryciem zasady d'Alemberta.

Przed chwilą, mówiąc o ruchu punktu materyalnego, wymieniliśmy prostą, mającą kierunek przyśpieszenia, i długość, której

[1]) Lagrange, l. c. 2-e partie, secl. I.

miarą jest iloczyn masy przez przyśpieszenie; widzieliśmy, że prostę tę utożsamiano bez przerwy z siłą.

Nie zmieniając ani długości ani kierunku tej prostej, zmieńmy jej zwrot na przeciwny; ta nowa prosta będzie mogła być także uważana jako przedstawiająca siłę, którą nazywamy siłą bezwładności. Będziemy wtedy mogli wypowiedzieć zasadę podstawową Dynamiki punktu materyalnego, mówiąc, że siła, działająca rzeczywiście na ten punkt, jest w każdej chwili równa i wprost przeciwna sile bezwładności, lub też, że siła rzeczywiście działająca i siła fikcyjna bezwładności tworzą w każdej chwili układ sił, utrzymujących punkt materyalny w równowadze.

Uogólniając to ostatnie wysłowienie, dojdziemy do Zasady d'Alemberta.

Weźmy jakikolwiek układ mechaniczny, utworzony z punktów materyalnych lub ciał ciągłych, i podzielmy te ostatnie na objętości elementarne; wyobraźmy sobie, że do każdego punktu lub do każdego elementu przyłożona została siła bezwładności. Siła ta, o zwrocie przeciwnym zwrotowi przyśpieszenia punktu lub elementu, będzie miała długość, której miarą jest iloczyn tego przyśpieszenia przez masę punktu lub elementu. W każdej chwili układ sił, działających rzeczywiście na układ oraz sił fikcyjnych bezwładności zdolny jest do utrzymania układu w równowadze w tym stanie, w jakim znajduje się on w uważanej chwili.

Postulat ten — i zdaje się, że inaczej nazwać by go nie można, mimo rozumowań, oczywiście niedostatecznych, przy pomocy których d'Alembert i inni po nim próbowali go udowodnić — został pomyślany w celu racyonalnego traktowania zagadnień, dotyczących oporu cieczy [1]. Wykazawszy użyteczność tego postulatu w Dynamice układów utworzonych ugrupowań ciał stałych [2], d'Alembert zastosował go na nowo do ruchu cieczy [3]

[1] D'Alembert „Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides", Paryż 1742, Chap I, proposition 1.

[2] D'Alembert. „Traité de Dynamique", Paryż 1743.

[3] D'Alembert. „Traité de l'Equilibre et du Mouvement des fluides pour servir de suite au Traité de Dynamique", Paryż 1744.

i doszedł tym sposobem do równań Hydrodynamiki, z których Euler potrafił wkrótce potem wydobyć tyle godnych podziwu konsekwencyj.

Zasada d'Alemberta sprowadza ustawienie równań jakiegokolwiek zagadnienia Dynamiki do ustawienia równań zagadnienia Statyki. Otóż do traktowania zagadnień statycznych Lagrange podał wzór ogólny, wypływający z zasady prędkości przygotowanych. Wzór ten, rozszerzony obecnie, wytwarza [2] „wzór ogólny Dynamiki dla ruchu jakiegokolwiek układu ciał". Wyraża on, że dla każdego przesunięcia przygotowanego, nadanego układowi w tym stanie, w jakim znajduje się w danej chwili jakiejkolwiek, suma pracy sił rzeczywistych i pracy sił fikcyjnych jest równa zeru.

Tym sposobem wszystkie idee zasadnicze, wprowadzone przez Lagrange'a do badań statycznych, zostały przeniesione do Dynamiki, przez co płodność ich wzrosła niezmiernie.

Przedstawienie problematu Statyki w równaniach przybiera formę możliwie najprostszą, gdy przesunięcie przygotowane najogólniejsze układu jest określone przez waryacye nieskończenie małe $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots$. Praca przygotowana sił rzeczywiście działających przybiera wtedy formę $A\delta\alpha + B\delta\beta + \ldots$; siły uogólnione $A, B, \ldots$ zależą od zmiennych $\alpha, \beta, \ldots$.

W podobny sposób praca przygotowana sił bezwładności może być przedstawiona w postaci $J_\alpha \delta\alpha + J_\beta \delta\beta + \ldots$; wielkości $J_\alpha, J_\beta, \ldots$, które można nazwać siłami bezwładności uogólnionemi, zależą od zmiennych $\alpha, \beta, \ldots$, od ich pierwszych pochodnych względem czasu, które nazwiemy prędkościami uogólnionemi, i od drugich ich pochodnych względem czasu, które nazwiemy przyśpieszeniami uogólnionemi.

Lagrange podał [1] prawidło niezwykle wytworne na tworzenie tych wielkości $J_\alpha, J_\beta, \ldots$; w prawidle tem występuje wielkość, odgrywająca ważną rolę w Dynamice, mianowicie siła żywa układu. Tę siłę żywą otrzymujemy w sposób nastę-

[1] Lagrange, „Mécanique analytique", 2-e partie, sect II, Nº 5.

[2] Lagrange. „Mécanique analytique", 2-e partie, sect. IV, № 7.

pujący: Pomnóżmy połowę masy m każdego z punktów lub elementów objętości, składających układ, przez kwadrat jego prędkości i weźmy sumę otrzymanych iloczynów; suma ta $\frac{mv^2+m'v'^2+...}{2}$ jest siłą żywą.

Siłę żywą można wyrazić przez zmienne niezależne $\alpha, \beta, ...$ i prędkości uogólnione. Wyrażenie siły żywej posiada te dwie własności, że jest jednorodnem i stopnia drugiego względem prędkości uogólnionych, oraz że jest dodatnie, jeżeli układ jest w ruchu. Korzystając z pierwszej z tych dwóch własności, Lagrange obmyślił rachunek regularny, przy pomocy którego z wyrażenia siły żywej wyprowadzamy wartości sił bezwładności uogólnionych.

Wzór podstawowy Dynamiki wymaga, aby suma dwóch wielkości $A\delta\alpha+B\delta\beta+...$ i $J_\alpha\delta\alpha+J_\beta\delta\beta+...$ była równa zeru dla wszystkich przesunięć przygotowanych nadanych układowi, lub innemi słowy, aby w każdej chwili było:

$$A+J_\alpha=0 \quad , \quad B+J_\beta=0 , \ldots\ldots$$

W ten sposób otrzymujemy w formie najprostszej i najdogodniejszej w użyciu równania, rządzące ruchem układu.

Równania Lagrange'a których jest tyle, ile jest zmiennych niezależnych $\alpha, \beta, ...$, wiążą ze sobą nietylko te zmienne, lecz także ich pochodne pierwsze i drugie względem czasu; stanowią one zatem to, co geometrowie nazywają układem równań różniczkowych rzędu drugiego.

Nie możemy tu wyłożyć nawet pobieżnie prac, do których równania te doprowadziły, od epoki Poissona, Cauchy'ego, Pfaffa, Hamiltona, Jacobi'ego, aż do naszych czasów, uświetnionych badaniami H. Poincarégo, Painlevégo, Hadamarda; musielibyśmy w takim razie napisać tu historyę samych równań różniczkowych rzędu drugiego. Powiemy tylko, że jednym z głównych faktów analitycznych, któryby historya ta nam uwidoczniła, byłaby nadzwyczajna ważność pojęcia potencyału, wprowadzonego przez Lagrange'a.

Ważność tę zresztą ukazuje już jasno szybki przegląd pewnych kwestyj dynamicznych, wziętych z pomiędzy najbardziej zasadniczych; kwestye te wiążą się wszystkie z *równaniem siły żywej*.

Uzasadnienie tego równania odnajdujemy w następującej bardzo prostej uwadze: Gdy układ porusza się w ciągu pewnego przedziału czasu, siły bezwładności wykonywają pracę, która jest dokładnie równa ubytkowi siły żywej w ciągu tego samego czasu. Wystarczy tedy spożytkować wzór podstawowy Dynamiki, uważając za przesunięcie przygotowane każdy z elementów ruchu rzeczywistego, aby otrzymać twierdzenie następujące:

Praca, wykonana w przeciągu pewnego czasu przez siły rzeczywiste, działające na układ, równa się przyrostowi, jakiego w tym samym czasie doznaje siła żywa układu.

Tym sposobem wyraża się dokładnie i sprowadza do zasad Mechaniki sławne prawo sił żywych, spostrzeżone po raz pierwszy przez *Leibniza*.

Gdy siły, którym poddany jest układ, mają potencyał, wtedy prawo to przybiera formę godną uwagi; w samej rzeczy, w tym przypadku praca. wykonana przez siły w pewnym przeciągu czasu, równa się ubytkowi potencyału w tymże czasie. Ten ubytek potencyału równa się zatem przyrostowi w tymże czasie siły żywej, tak że *suma potencyału i siły żywej zachowuje w ciągu całego trwania ruchu wartość niezmienną*.

Układ odosobniony znajduje się w warunkach, wymaganych dla stosowania tego twierdzenia; jedynemi siłami są wtedy tylko siły wywierane przez rozmaite części układu wzajemnie na siebie i pochodzące, jak przyjęliśmy, od jednego potencyału. W tym przypadku nadajemy często potencyałowi sił wewnętrznych nazwę *energii potencyalnej* układu; sile żywej—nazwę *energii żywej, aktualnej, kinetycznej*; sumie obu energij — nazwę *energii całkowitej*. Twierdzenie poprzedzające daje się tedy wyrazić w formie następującej: *W ruchu układu materyalnego, wyjętego z pod działania jakiegokolwiek ciała zewnętrznego, energia całkowita układu zachowuje wartość niezmien-*

ną. Twierdzenie to, znane pod nazwą Zasady zachowania energii, odegrało rolę kapitalną w rozwoju Fizyki.

Gdyby układ badany podlegał działaniu pewnych ciał zewnętrznych, wtedy wartość jego energii całkowitej mogłaby się zmieniać; przyrost tej energii w ciągu pewnego przeciągu czasu równałby się dokładnie pracy, wykonanej w tymże czasie przez siły, pochodzące od ciał zewnętrznych.

Stosując równanie siły żywej w przypadku, w którym siły działające pochodzą od potencyału, Lagrange odkrył bardzo ważne twierdzenie, dotyczące stałości równowagi.

Weźmy układ mechaniczny podległy takim siłom, i nie udzielając mu żadnej prędkości początkowej, postawmy go w takim stanie, w którym potencyał sił działających jest mniejszy od potencyałów w każdym stanie sąsiednim; prawa Statyki wykazują bez trudności, że układ pozostawać będzie w równowadze w tym stanie. Prawa Dynamiki, w szczególności zaś równanie siły żywej, daje nam nowy rezultat: W momencie danym wyprowadźmy nieco układ ze stanu jego równowagi i udzielmy mu bardzo małych prędkości; układ zacznie się poruszać, ale różne stany, przez które przechodzić będzie w ciągu tego ruchu, pozostawać będą zawsze bardzo blisko stanu równowagi pierwotnej, prędkości zaś jego różnych części zachowywać będą wartości bardzo małe; równowaga pierwotna będzie równowagą stałą. Lagrange podał [1] dowód tego pięknego twierdzenia; Lejeune-Dirichlet [2] zaś przy pomocy niewielkich zmian uczynił dowód ten zupełnie ścisłym.

W bliskości takiego położenia równowagi stałej, układ wyprowadzony lekko z położenia równowagi, wykonywa małe oscylacye. Oscylacye te wynikają z nałożenia tylu drgań pojedyńczych, ile jest zmiennych niezależnych [3]. Metody, przez Lagrange'a do badania tych oscylacyj obmyślone, są cennemi

[1] Lagrange. „Mécanique analytique", 1-e part. secl III, § V, № 25.

[2] Lejeune-Dirichlet. Ueber die Stabilität des Gleichgewichtes (Crelle's Journal Bd. 32, 1846.

[3] Lagrange. „Mécanique analytique", 2-e partie, sect. VI, § 1.

zarówno dla fizyka jak i dla inżyniera; mają one doniosłość zarówno dla Akustyki, jak i dla teoryi drgań w machinach.

Zachodzi pytanie, czy układ może być w równowadze stałej tylko w tych położeniach, w których potencyał ma wartość minimum? Lagrange mniemał, że dowiódł tego twierdzenia; wszakże rozumowania jego okazały się niedostatecznemi. Dopiero w naszych czasach pp. Liapunow i Hodumard zastąpili te rozumowania, w przypadku bardzo ogólnym, przekonywającą dedukcyę.

3. Mechanika analityczna Lagrange'a i Mechanika fizykalna Poissona.

Mechanikę Lagrange'a od Mechaniki Newtona i Boscovicha odróżnia najgłębiej pojęcie siły fikcyjnej połączeń. W samej rzeczy, w tej drugiej Mechanice ciała składają się wyłącznie z punktów materyalnych swobodnych, tak że wszystkie siły, które tam rozważamy, są siłami rzeczywiście działającemi; w pierwszej zaś Mechanice, przeciwnie, ciała są ośrodkami ciągłemi, których różne elementy, nieprzenikliwe jedne dla drugich, przeszkadzają sobie wzajemnie w ruchach.

Czy można obyć się bez pojęcia siły połączeń, wprowadzonej do Mechaniki przez Lagrange'a, i odnaleść wszystkie rezultaty tego geometry, składając ciała z punktów materyalnych, przyciągających się wzajemnie? Laplace zdaje się pierwszy wypowiedział taki pogląd: „Wszystkie zjawiska ziemskie—mówi on [1] z okoliczności przyciągań cząsteczkowych — zależą od tego rodzaju sił, podobnie jak zjawiska niebieskie zależą od ciążenia powszechnego. Badanie ich wydaje mi się obecnie być głównym przedmiotem Filozofii matematycznej. Zdaje mi się, że jest rzeczą pożyteczną wprowadzić je do dowodzeń mechanicznych, a porzucić rozważania abstrakcyjne linij bez masy, giętkich lub nierozciągliwych. Przekonałem się przy pomocy kilku prób, że zbliżając

[1] Laplace. „Mécanique céleste", livre XII, chap. I.

się tym sposobem do Przyrody, możnaby nadać tym dowodzeniom tyleż prostoty a daleko więcej jasności, niż dowodzeniom przy pomocy metod, po dziś dzień używanych."

W licznych rozprawach Poissona uwaga ta przekształca się na prawdziwą doktrynę, współzawodniczącą z doktryną Lagrange'a i usiłującą ją zastąpić. Walka pomiędzy temi dwiema metodami jest jedną z najpoważniejszych i równocześnie jedną z najsubtelniejszych w historyi wyjaśnień mechanicznych.

Zauważmy przedewszystkiem, że możnaby przyjąć, iż także pomiędzy rozmaitemi elementami objętościowemi ośrodka ciągłego, rozważanego według metody Lagrange'a, istnieją siły przyciągające lub odpychające, wprowadzone przez Fizykę newtoniańską i nazwane działaniami cząsteczkowemi. Tak np. gdy Gauss uważa [1] płyn jako ośrodek ciągły, którego rozmaite elementy są podległe takim siłom, gdy wyznacza postać takiego płynu przy pomocy przesunięć przygotowanych, nie pisze nic tatakiego, coby nie zgadzało się najdokładniej z prawidłami, postawionemi przez „Mechanikę analityczną" Lagrange'a.

Lecz istnienie tych działań wzajemnych bynajmniej nie stoi na przeszkodzie temu, by każda część takiego ośrodka ciągłego była nieprzenikliwa dla części sąsiednich w ten sposób, że obecność każdej z tych części stawia przeszkodę ruchowi części, przytykających do siebie, i stanowi dla nich połączenie.

Z rozważaniem takich to połączeń wiąże się pojęcie ogólne ciśnienia wewnątrz jakiegokolwiek ośrodka, stałego lub płynnego, ruchomego lub nieruchomego. Aby pojęcie to określić, dość uogólnić podaną wyżej według Lagrange'a definicyę ciśnienia hydrostatycznego.

Niechaj będzie ośrodek ciągły, którego rozmaite elementy objętościowe są wzajemnie dla siebie nieprzenikliwe; ruch każdego z tych elementów ośrodka poddany jest pewnym warunkom połą-

---

[1] C. F. Gauss: „Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii" (Commentationes Societatis Gottingensis recentiores, Vol. 7, 1830; Gauss, Werke, Bd 5).

czeń, wynikającym z nieprzenikliwości części sąsiednich. Oddzielmy w myśli jednę część ośrodka, otaczając je powierzchnią zamkniętą; oddalmy całą pozostałą resztę ośrodka, zachowując siłę rzeczywiście działającą na każdy z elementów wyosobnionej części; połączenia, którym ta część jest poddana, zmieniły się przez tę operacyę, gdy działania rzeczywiste, którym podlega, pozostały bez zmiany. Siły te nie nadadzą jej już w ogólności tego samego ruchu, jaki nadałyby, gdyby część uważaną pozostawić wewnątrz ośrodka. Jeżeli chcemy, aby ruch tej masy pozostał niezmieniony przez operacyę, która ją wyosobniła, należy do sił, które rzeczywiście działały na nią i działały jeszcze na elementy, dołączyć jeszcze nowe siły, które będą właśnie siłami połączeń.

Przy pomocy metod Lagrange'a i zasad podstawowych Rachunku waryacyjnego dowodzi się, że siły te są przyłożone wyłącznie do powierzchni, ograniczającej masę wyosobnioną; że każdy element tej powierzchni podlega działaniu siły tego samego rzędu co jego pole; że dla wyznaczenia wielkości i kierunku siły odpowiadającej elementowi, nie ma potrzeby znać powierzchni, której element ten jest częścią; wystarczy znać położenie elementu wewnątrz ośrodka. W ten sposób otrzymujemy jasną definicyę pojęcia ciśnienia w każdym punkcie ośrodka i dla każdej oryentacyi elementu powierzchniowego, przez ten punkt przechodzącego.

Gdy dla określenia ciśnienia wewnątrz powierzchni, wyosobniamy część ciała od wszystkiego, co ją otacza, należy — jak to powiedziano—baczyć bardzo starannie, by nie pominąć żadnej z sił rzeczywistych, na tę część działających. Jeżeli naprzykład uważamy pewne z tych sił jako pochodzące od części sąsiednich ośrodka, tak że usunięcie tych części pociąga za sobą zniknięcie sił, to należy siły te zastąpić siłami równemi, wychodzącemi z ciał, nie stykających się z częścią wyosobnioną i nie stawiających żadnej przeszkody jej ruchowi.

Należy wszakże wystrzegać się powiedzenia wprost i bez żadnych zastrzeżeń, że ciśnienia są siłami, które należy przyłożyć do pewnej części ośrodka, wyosobnionej z jej otoczenia, aby jej przywrócić ruch, jakiby ona miała w swem położeniu naturalnem wewnątrz ośrodka. Istotnie, w tych warunkach, ciśnienia zastępowały nietylko połączenia, wynikające z obecności części ośrodka, przytykających do części wyosobnionej, lecz także i siły rzeczywiste, wywierane na nią przez te części usunięte. Zdaje się, że Lamé[1] nie uniknął takiego pomieszania.

Dla Poissona, podobnie jak dla Boscovicha, ciała są ciągłemi tylko pozornie; w rzeczywistości zaś są utworzone z punktów materyalnych odosobnionych. Jeżeli rozważamy część ośrodka, t. j. pewną grupę punktów materyalnych, jej przesunięcia przygotowane nieskończenie małe nie doznają żadnej przeszkody ze strony punktów materyalnych, sąsiadujących z tą grupą, lecz nie dotykających jej; oddalając te punkty materyalne sąsiednie, nie usuwamy przez to żadnego połączenia w grupie zachowanej; lecz usuwamy działania cząsteczkowe, jakich grupa ta doznawała od punktów materyalnych usuniętych; ciśnienia, które przyłożymy do punktów materyalnych zachowanych, będą miały za zadanie skompensować ściśle skutek tych usuniętych sił cząsteczkowych. Według tego sposobu widzenia, ciśnienia nie są już siłami połączeń; są one rezultatami działań cząsteczkowych, wywieranych na jednę część punktów materyalnych, tworzących układ, przez inne punkty materyalne układu.

Takie to znaczenie nadawał Poisson pojęciu ciśnienia, które napotykamy w badaniu ośrodków stałych lub płynnych, pojęciu napięcia nici lub błonki.

Tak w samej rzeczy określa Poisson po raz pierwszy napięcie błony w rozprawie o powierzchniach sprężystych[2]; wkrótce potem stosuje on wyniki tej metody do wszystkich części Fizyki, do badania Sprężystości[3], do Hydrodynamiki[4], do Teoryi Wło-

---

[1]) Lamé. Leçons sur la théorio mathématique de l'Elasticité des corps solides, Wyd. 2-gie, str. 10.

[2]) Poisson. Mémoire sur les surfaces élastiques, lu à l'Institut le 1-r août 1840.

[3]) Poisson. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, lu à l'Academie le 14 avril 1828.

[4]) Poisson. Mémoire sur l'équilibre des fluides, lu à l'Académie le 24 novembre 1828.

skowatości [5]. Według niego, ta inowacya stanowi reformę kapitalną, jest stworzeniem nowej Mechaniki, Mechaniki fizykalnej, mającej zastąpić Mechanikę analityczną Lagrange'a. Oto jakiemi słowy wyraża myśl swoją Poisson na końcu wstępu do swojej Rozprawy o ciałach sprężystych:

„Dodajmy, że byłoby pożądanem, aby geometrowie z tego stanowiska fizykalnego i zgodnego z Przyrodą podjęli badanie głównych zagadnień Mechaniki. Trzeba było traktować te zagadnienia sposobem zupełnie abstrakcyjnym, aby odkryć prawa ogólne równowagi i ruchu; i w tym rodzaju abstrakcyi Lagrange poszedł tak daleko, jak było można, zastępując związki fizyczne ciał równaniami pomiędzy spółrzędnemi ich różnych punktów; stanowi to właśnie Mechanikę analityczną. Lecz obok tej godnej podziwu koncepcyi możnaby wznieść obecnie Mechanikę fizykalną; tej jedyną zasadą byłoby sprowadzenie wszystkiego do działań międzycząsteczkowych, które z punktu do punktu przenoszą działania sił danych i są pośrednikami ich równowagi. W ten sposób nie potrzebaby już tworzyć hypotez specyalnych przy stosowaniu ogólnych prawideł Mechaniki do zagadnień szczegółowych. Tak więc w zagadnieniu o równowadze ciał giętkich napięcie, które wprowadzamy w celu rozwiązania zagadnienia, będzie rezultatem bezpośrednim działań wzajemnych pomiędzy cząsteczkami, skoro je wyprowadzimy niewiele z ich położeń naturalnych; w przypadku blaszki sprężystej, moment sprężystości w gięciu pochodzić będzie od tych samych działań, rozważanych w całej grubości płytki, a wyrażenie tego momentu da się wyznaczyć bez pomocy jakiejkolwiek hypotezy; wreszcie działania, wywierane przez płyny w ich wnętrzu i na ściany naczyń, w których się znajdują, są także wypadkowemi działań cząsteczek płynów na powierzchnie uciskane albo raczej na warstwę płynu niezmiennie cienką, stykającą się z każdą powierzchnią".

Tak więc istnieją, według Poissona, dwa sposoby pojmowania Mechaniki. W jednym z nich, będącym sposobem poj-

---

[1]) **Poisson. Nouvelie théorie de l'action capillaire, Paris 1831.**

mowania geometrów, układy podane podlegają jedynie siłom zewnętrznym lub przyciąganiom wzajemnym, zależnym od ciążenia powszechnego, lecz są za to poddane połączeniom; w drugim sposobie pojmowania, właściwym fizykowi, układy tworzą się z punktów materyalnych swobodnych, lecz do sił rzeczywistych, które rozważała pierwsza Mechanika, należy dołączyć działania cząsteczkowe, zachodzące w każdej parze punktów; te dwie Mechaniki są równoważne, kto zwraca jego uwagę jedynie na same ich konsekwencye; ale druga, więcej niż pierwsza, ścieśnia wewnętrzną naturę ciał.

Ta doktryna Poissona jest tylko, jak powiedzieliśmy, rozwinięciem myśli Laplace'a; nic tedy dziwnego, że odnajdujemy ją w pismach autorów, spółczesnych Poissonowi, zwłaszcza tych, którzy zbudowali teoryę sprężystości. Według metody Poissona, określa Navier [1] ciśnienie na początku swej rozprawy, w której po raz pierwszy podaje warunki równowagi ciała stałego sprężystego. Cauchy [2] idzie tą samą drogą, gdy wyniki, osiągnięte przez Naviera, rozciąga na ciała nieizotropowe; w swych licznych i ważnych badaniach nad sprężystością stosuje on już to metodę Lagrange'a, już to metodę Laplace'a i Poissona: „W badaniu równań, wyrażających warunki równowagi lub prawa ruchu wewnętrznego ciał stałych lub płynnych, można—powiada Cauchy [3]—rozważać te ciała jako masy ciągłe, których gęstość zmienia się od punku do punktu nieznacznemi stopniami, lub też jako układy punktów materyalnych osobnych, oddzielonych od siebie bardzo małemi odległościami".

Cauchy stara się we wszystkich okolicznościach wykazywać równoważność tych dwóch metod.

---

1) Navier. „Mémoire sur les lois de l'equilibre et du mouvement des corps solides élastiques" lu à l'Académie des sciences le 14 mai 1824.

2) Cauchy. „Recherches sur l'equilibre et le mouvement intérieur des corps solides on fluides, élastiques ou non élastiques", przedst. Akad. 30 września 1812 (Bulletin de la Société philomatique, année 1823, s. 9).

3) Cauchy. Sur les équations qui expriment les conditions d'equilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide élastique ou non élastique (Anciens Exercices, 3-e année s. 1828, s. 160).

Po dzień dzisiejszy najznakomitsze umysły nie przestały wyznawać poglądów Poissona na istotę parcia, przyjmując równoważność ich z poglądami Lagrange'a, co więcej widząc w nich nawet większą zgodność z istotną budową ciał.

J. Bertrand[1], mówiąc o teoryi sprężystości, podanej przez Poissona, wyraża się w ten sposób: „Jest prawdą, że w płynie fizycznym i ściśliwym ciśnienie nie daje się odróżnić od wypadkowej sił cząsteczkowych i powinno się obliczać, jak na to często zwracał uwagę Poisson, przy pomocy funkcyi, która te siły przedstawia. Lecz ze stanowiska abstrakcyjnego geometrów ciśnienie jest siłą osobną, natury tej samej, co siły, wprowadzane często do Mechaniki pod nazwą sił połączeń".

De Saint-Venant, którego olbrzymie prace sprawiły tak wielki postęp w teoryi sprężystości, nie ustawał nigdy w obronie sposobu widzenia Poissona. Na marginesie własnego egzemplarza „Mechaniki analitycznej", przy ustępie, w którym Lagrange zaznacza tak dobitnie, że ciśnienie hydrostatyczne jest siłą połączeń, znajdujemy własnoręczną notatkę Saint-Venanta: „Ciśnienie jest odpychaniem średniem cząsteczek płynnych." O kilka wierszy niżej, gdzie mowa o twierdzeniu Eulera, dotyczącem ciśnienia hydrostatycznego, notuje Saint-Venant: „Jest to także twierdzenie analityczne; byłoby do życzenia, aby zamieniono jej wraz z innemi na zasady fizykalne." Nadto w przekładzie „Teoryi sprężystości" Clebscha[1] Saint-Venant poświęca długą notę wykładowi i obronie pomysłów Poissona.

Boussinesq, wierny uczeń Saint-Venanta, nigdy w Mechanice nie rozważa sił połączeń i wprowadza tylko wypadkowe działań cząsteczkowych[1].

---

[1]) Bertrand. Mémoire sur la théorie des phènomenes capillaires (Journal de Liouville, t. 13, 1848, s. 195).

[2]) Clebsch. „Théorie de l'élasticité des corps solides" przekład Barré de Saint-Venanta i Flammanta. Paryż 1881, str. 63 i nast.

[3]) J. Boussinesq, „Leçons synthétiques de Mécanique générale", Paryż 1889.

Freycinet w swoim wybornym „Traktacie Mechaniki" [1], trzyma się prawie poglądów Poissona; równolegle bada on układy dwojakie. Jedne nazywa geometrycznemi; są to takie, których rozmaite części są związane połączeniami, pojętemi na sposób Lagrange'a. Inne nazywa dynamicznemi; tych rozmaite punkty, wolne od wszelkich połączeń, działają jedne na drugie przy pomocy przyciągań lub odpychań. „W Przyrodzie, mówi on, nie ma układów geometrycznych".

Nie skończylibyśmy, gdybyśmy chcieli wymienić wszystkich autorów, którzy wyraźnie lub milcząco porzucili pojęcie siły połączeń, określone przez „Mechanikę analityczną", a przyjęli zasady Mechaniki fizykalnej.

Te dwie metody, nadające się do jasnego traktowania problematów Mechaniki, są obie jasno i wyraźnie sformułowane; i nikt zaprzeczyć nie może, że, logicznie biorąc, wolno stosować jednę lub drugą. Ale natomiast wolno zaprzeczyć równoważności obu metod; równoważność ta, jeżeli istnieje, nie może bynajmniej uchodzić za widoczną i domaga się uzasadnienia. Należy stwierdzić, a nie stawiać wprost postulatu, że obie Mechaniki prowadzą we wszystkich okolicznościach do tych samych wyników. Jeżeli więc jedna z tych metod dochodzi do rezultatów, nie zgadzających się z drugą, nie należy gorszyć się tą sprzecznością, lecz porównywając z doświadczeniem wyniki jednej i drugiej metody, starać się zbadać, która z nich lepiej przystosowuje się do faktów.

Historya teoryi włoskowatości daje nam sposobność do zastosowania tych uwag.

Od czasów Newtona większość geometrów przypisywała zgodnie postać cieczy w wązkich naczyniach przyciąganiom cząsteczkowym, wywieranym wzajemnie przez jedne części płynu na drugie. Hypoteza ta zgadza się — rozumie się samo przez się — z zasadami Mechaniki Poissona, lecz godzi się również, co już zaznaczyliśmy, z zasadami Mechaniki Lagrange'a; w tej osta-

---

[1]) De Freycinet. „Traité de Mécanique rationnelle", t. 1, s. 240, Paryż 1858.

tniej wszakże płyn uważany jest za ciągły; przyciągania cząsteczkowe zachodzą wtedy nie pomiędzy punktami, lecz pomiędzy objętościami nieskończenie małemi; prócz tych działań trzeba jeszcze rozważać połączenia stykających się elementów; zresztą do tych połączeń ma się jeszcze bardzo logiczne prawo dodać inne połączenia, takie, jak warunek nieściśliwości, wyrażający, że każda masa elementarna ma objętość niezmienną.

Metody Lagrange'a pozwalają badać równowagę takich płynów. Można, idąc za przykładem Gaussa [1], udzielić całemu układowi zmiany przygotowanej, przez co unika się rozważania ciśnienia wewnątrz płynu; można też, jak to czyni Fr. Neumann [2], wprowadzić ciśnienie to do rachunków, stosując prawie zupełnie metodę, użytą w Hydrostatyce przez Lagrange'a. Wyniki, otrzymane jedną lub drugą metodą, zgadzają się całkowicie z wynikami, które znalazł był Laplace [3]. Sławny autor „Mechaniki niebieskiej" korzystał zresztą z Zasady równowagi kanałów, obmyślonej przez Clairauta [4], i sprowadzonej następnie przez Lagrange'a do zasady prędkości przygotowanych.

Poisson [5] traktuje zagadnienie o równowadze cieczy w przestrzeniach włoskowatych według prawideł Mechaniki fizykalnej; wyniki, do których dochodzi, nie dałyby się pogodzić z twierdzeniami Laplace'a i Gaussa, przy założeniu, że ciecz jest nieściśliwa. Aby otrzymać te prawa zjawisk włoskowatych, które podał autor „Mechaniki niebieskiej", należy założyć, że ciecz jest ściśliwa i że gęstość jej zmienia się bardzo szybko w sąsiedztwie powierzchni skrajnych.

---

[1] C. F. Gauss. „Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii" (Commentationes Societatis Gottingensis recentiores, vol. 7, 1830; Gauss-Werke 5).

[2] F. Neumann. „Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität" VIII, Lipsk 1992.

[3] Laplace, Supplément au X livre de la Mécanique céleste; sur l'action capillaire. Supplément à la Theorie de l'action capillaire.

[4] Clairaut. Théorie de la figure de la Terre, Paris 1743.

[5] Poisson. Mémoire sur l'equilibre des fluides, Académie des sciences 24 nov. 1828. Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris 1831,

Z niezgody tej Poisson tworzy zarzut przeciwko teoryi Laplace'a i Gaussa; odrzucając ściśliwość cieczy, „pominęli oni okoliczność fizykalną, której rozważanie było zasadnicze i bez której zjawiska włoskowate wcaleby nie zachodziły“.

Ten wniosek, wydobyty przez Poissona z badań własnych, jest nieprawdziwy; wniosek jedynie uprawniony dałby się sformułować w tych słowach: „Płyn nieściśliwy, logicznie pojąć się dający w Mechanice analitycznej, nie da się pojąć w Mechanice fizykalnej.“ „W samej rzeczy—uwagę tę czyni Quet [1] —nie uwzględniono tu wcale sił połączeń, które koniecznie przyjmować należy, jeżeli chcemy, by ciecze, poczytywane za nieściśliwe, pozwalały swym elementom opierać się mniej lub więcej silnie jednym na drugich i przenosić ciśnienia do wnętrza. Zniesienie tych sił połączeń miałoby za skutek zniknięcie nietylko zjawisk włoskowatych, lecz także całej Hydrostatyki i Hydrodynamiki. Aby to widzieć, nie potrzeba wcale rachunków. Bez sił połączeń warunki równowagi są z konieczności niezupełne i należy się tylko dziwić, że nie uniknięto rażących sprzeczności w metodzie, która nie uwzględnia wszystkich tych przyczyn.“

Mechanika analityczna i Mechanika fizykalna nie prowadzą tedy bynajmniej we wszystkich okolicznościach do wyników równoważnych. Ponieważ różnią się od siebie, zachodzi pytanie, którą z nich przyjąć należy? Czy Mechanika fizykalna, zgodnie ze swemi roszczeniami, jest tą nauką, która drogami naturalniejszemi i krótszemi dokładniej kształtuje się na faktach?

Zauważmy przedewszystkiem, że aby rachunki jej módz doprowadzić do końca, trzeba prędzej czy później wyrzec się uważania ciał jedynie za zbiorowiska punktów materyalnych swobodnych, i trzeba przywrócić materyi ciągłość, której jej odmówiono. Tylko pod tym warunkiem Mechanika ta może oporne środkom Analizy matematycznej sumy, do której prowadzą jej metody, zastępować łatwemi w operowaniu całkami. To przekształcenie sum na całki nie osiąga się bez dyskusyj, zawsze ciężkich, i przybliżeń często niepewnych. Przy operacyi takiej cierpi za-

[1] Quet. „Rapport sur les progrès de la Capillarité“. Paryż 1867.

równo ścisłość matematyczna jak i wytworność; tymczasem jedna i druga zalecają rachunki Matematyki analitycznej. Lecz i inne trudności sterczą na drodze Mechaniki fizykalnej.

Rozpatrzmy jakieś zbiorowisko punktów materyalnych swobodnych; dajmy, że pomiędzy dwoma jakiemikolwiek punktami zachodzi działanie wzajemne, proporcyonalne do iloczynu mas tych dwóch punktów i będące funkcyą ich odległości. Wyobraźmy sobie najprzód, że działanie to jest przyciągającem dla wszelkiej jakkolwiek małej odległości. Jest jasnem, że układ, wyjęty z pod wszelkiej siły zewnętrznej, nie mógłby być w równowadze; wszystkie punkty materyalne nierozciągłe dążyłyby do zjednoczenia się w jednym punkcie; tożsamo byłoby a fortiori, jeżeliby ciśnienie jednostajne działało na powierzchnię ciała; ciało to musiałoby dojść do objętości zerowej i gęstości nieskończonej.

Boscovich jasno widział tę trudność. Aby ją pokonać, przyjmował, że działanie wzajemne dwóch punktów staje się zawsze odpychającem, skoro odległość ich spada poniżej pewnej granicy. Taż uwaga doprowadziła Naviera i Lamégo do głębokiej odmiany samych zasad Filozofii newtoniańskiej; według tych fizyków, gdy ciało jest w stanie naturalnym, t. j. wyjęte z pod wszelkiego działania siły zewnętrznej i jednocześnie jest w równowadze, wtedy dwa punkty materyalne jakiekolwiek nie wywierają wzajemnie na siebie żadnego działania; ich działanie wzajemne powstaje jedynie jako skutek odkształcenia, które oddala lub zbliża te punkty; jest ono proporcyonalne do zmiany, jakiej doznała odległość dwóch punktów materyalnych, i usiłuje zawsze przeciwstawić się tej zmianie; wielkość jej zależy zresztą od odległości pierwotnej dwóch cząsteczek. Pogląd ten znalazł niewielu zwolenników; nie jest on zresztą wolny od wielu ciężkich zarzutów, którym podlega i teorya Poissona, a o których musimy kilka słów powiedzieć.

Zauważmy najprzód co następuje: Jeżeli zaprzeczamy istnieniu połączeń, jeżeli uważamy ciało jako zbiorowisko punktów materyalnych swobodnych, wywierających wzajemnie na siebie siły przyciągające lub odpychające, wtedy nie podobna sposobem logicznym ustanowić linii demarkacyjnej pomiędzy ciałami stałemi sprężystemi izotropowemi z jednej strony a cieczami ściśliwemi z drugiej; wszystko, co będzie dowiedzione dla ciał sprężystych izotropowych, powinno być prawdziwe i dla cieczy ściśliwych.

Otóż badanie ciał stałych izotropowych doprowadziło Poissona do niezwykle prostych konsekwencyj; i tak, jeżeli wyciągamy pryzmat, utworzony z takiego ciała, wtedy stosunek skurczenia poprzecznego do wydłużenia podłużnego jest stały i równy $\frac{1}{4}$; albo inaczej: w każdem ciele izotropowem stosunek spółczynnika ściśliwości sześciennej do spółczynnika sprężystości ciągnienia równa się $\frac{2}{3}$.

Czy doświadczenie stwierdza te wnioski? Cornu i Kirchhoff znaleźli, że one sprawdzają się dokładnie w pewnych przypadkach szczególnych; według Wertheima zaś nie są prawdziwemi dla metali. A zatem „ciało stałe, nawet izotropowe [1], nie może być uważane za utworzone z układu cząsteczek, przyciągających lub odpychających się wzajemnie podług funkcyi ich odległości...., bez podlegania pewnym połączeniom takim, jakie rozważane bywają w Mechanice analitycznej."

Prawda, że stronnicy teoryi Poissona będą mogli zawsze przeciwstawić temu to, że nie dochodzi się do sprzeczności z doświadczeniem przez przyjęcie, że ciała, których własności nie zgadzają się z ich wzorami, nie są istotnie izotropowemi, lecz że powstały z przerośnięcia kryształów. I nie omieszkali oni korzystać z tego wybiegu. Ale można przeciwstawić im argument, który zdaje się nie pozwala na żadną replikę.

Wszystko to, co teorya Poissona twierdzi o ciałach sprężystych izotropowych, powinno, logicznie biorąc, stosować się także do cieczy. Jeżeli więc dla ciał prawdziwie izotropowych, spółczynnik ściśliwości sześciennej otrzymujemy, mnożąc przez $\frac{2}{3}$ spółczynnik sprężystości ciągnienia, to twierdzenie to powinno pozostać prawdziwem i dla cieczy. Otóż, to być nie może, albo-

---

[1]) E. Mathieu. „Théorie de l'elasticité des corps solides", t. I, str. 6, 39. Paryż 1890.

wiem dla cieczy, spółczynnik ściśliwości sześciennej jest różny od zera, wtedy gdy spółczynnik sprężystości ciągnienia jest zerem.

Jest tedy rzeczą niemożliwą utrzymać zasady, na których P o i s s o n chciał oprzeć Mechanikę fizykalną, nie uciekając się do subtelności i nie schodząc na manowce. P o i s s o n stosował atoli te środki obrony; aby się o tem przekonać, dość przeczytać „Pojęcia wstępne", które rozpoczynają jego „Rozprawę o równowadze cieczy". P o i s s o n nietylko nie uważa już tu elementów ciał za punkty bez rozciągłości, nietylko traktuje je jako cząsteczki upostaciowane, lecz wprowadza nadto pod nazwą d z i a ł a n i a d r u g o r z ę d n e g o siłę, która zależy od postaci cząsteczek, która zawadza lub pomaga ich ruchliwości i której przypisuje wszystkie te skutki, jakie Mechanika analityczna przypisywała siłom połączeń.

Gdy pewna teorya dla obrony swej mnoży wybiegi i wykręty, jest rzeczą bezpożyteczną stosować ją, gdyż staje się wtedy nieuchwytną; lecz łatwo byłoby ją uchwycić, gdyż dla każdego umysłu jasnego jest to doktryna przezwyciężona. Taką jest Mechanika fizykalna.

Trudności, o które się ona rozbiła, Mechanika analityczna, jej rywalka, pokonała z tryumfem; metody jej, stosowane w pracach C a u c h y'ego, G r e e n a i L a m é g o, wykazują, że własności sprężyste ciała izotropowego zależą od dwóch spółczynników różnych, zmieniających się swobodnie od ciała do ciała; L a m é oznaczył te spółczynniki literami λ i μ. W pryzmacie, poddanym ciągnieniu, stosunek skrócenia poprzecznego do wydłużenia podłużnego ma wartość $\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$; stosunek spółczynnika ściśliwości sześciennej do spółczynnika sprężystości ciągnienia ma wartość $\frac{\lambda+\mu}{3\mu}$; te dwa stosunki mogą więc dla różnych substancyj przybierać najrozmaitsze wartości. Otrzymalibyśmy z nich wartości, przyjęte przez P o i s s o n a, gdybyśmy przyjęli, że dwa spółczynniki λ i μ są równe sobie; ale hypotezy takiej nie można stosować ogólnie, albowiem dla cieczy μ jest zerem, λ zaś ma jakąkolwiek wartość dodatnią.

(D. c. n.)