Ł. E. BÖTTCHER.

Rozwijanie na szeregi potęgowe funkcyi, określonej równaniem algebraicznem nieprzywiedlnem $f(x,y)=0$.

§ 1. Pracy niniejszej nadaję charakter czysto praktyczny raczej, aniżeli teoretyczny. Chodzi tu poprostu o możliwie łatwe do spamiętania streszczenie rachunku zmiennej y, określonej równaniem nieprzywiedlnem algebraicznem $f(x,y)=0$, n-go stopnia względem y, m-go stopnia względem x.

Rachunek ten opieramy na rozwijaniu zmiennej y na szereg według rosnących potęg różnicy $x-\bar{x}$, przyczem $\bar{x}$ jest dowolnie obraną wartością początkową, z tem jedynie zastrzeżeniem, aby $|x-\bar{x}|$ nie było zbyt wielką liczbą, a więc, aby rozwinięcie było nietylko zbieżne, ale i łatwe w obliczaniu praktycznem.

Wogólności, rozwinięcia te postępują według całkowitych potęg różnicy $x-\bar{x}$, i nie spotykamy tu żadnych poważnych trudności.

Inaczej jednak rzecz się ma z punktami krytycznemi. Jeżeli $\bar{x}$ jest jednym z punktów krytycznych, wówczas niektóre z funkcyj y, równaniem $f(x,y)=0$ określonych, rozwijają się według ułamkowych potęg różnicy $x-\bar{x}$.

Wybór tych potęg i rachunek odpowiednich spółczynników jest połączony z pewnemi trudnościami.

Trudności te wynikają stąd, że najogólniejsze rozwinięcie, jakie tu możemy znaleść, ma postać:

$$y=a_0+a_1(x-\bar{x})^{\nu_1}+a_2(x-\bar{x})^{\nu_2}+\ldots\ldots+a_r(x-\bar{x})^{\nu_r}$$
$$+a_{r+1}(x-\bar{x})^{\nu_{r+1}}+a_{r+2}(x-\bar{x})^{\nu_{r+2}}+\ldots.$$

przyczem wykładniki wymierne

$$\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \nu_4 < \ldots\ldots$$

stale rosną. Jeżeli wszakże, napiszemy wykładnik ν_i w postaci

$$\nu_i = \frac{p_i}{q_i},$$

wówczas mianowniki q_i wcale nie rosną nieograniczenie, a największą wartością, jaką mianownik q_i może w tym szeregu przybierać jest, dajmy nato, q_r, wobec czego dalsze wykładniki będą miały postać:

$$\nu_{r+1} = \frac{p_r+1}{q_r};\ \nu_{r+2} = \frac{p_r+2}{q_r};\ \nu_{r+3} = \frac{p_r+3}{q_r}, \ldots\ldots$$

Spółczynniki $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r$ obliczamy, rozwiązując równania różnych stopni, nie wyłączając zresztą pierwszego. Następne zaś spółczynniki $a_{r+1}, a_{r+2}, a_{r+3}\ldots\ldots$ obliczamy już z warunków rzędu pierwszego.

Otóż główną trudność stanowi wybór wykładników

$$\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \nu_4 < \ldots\ldots < \nu_r,$$

oraz konstrukcya i rozwiązywanie równań, z których wyznaczamy spółczynniki $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_r$.

Podamy tu metodyczny wykład obu tych kwestyj, pomijając zarówno kwestyę zbieżności rozwinięć potęgowych, tudzież teoretyczną doniosłość poruszonych w tej pracy szczegółów.

Używać będziemy następujących skróceń:

$$\overset{(\alpha+\beta)}{\underset{\alpha,\beta}{f}}(x, y) \text{ zamiast } \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta},$$

$$\overset{(\alpha+\beta)}{\underset{i,\alpha,\beta}{f}}(x, y) \text{ zamiast } \frac{\partial^{\alpha+\beta} f_i}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}.$$

Aby sprawę uprościć, przyjmujemy, że funkcya y, określona równaniem $f(x,y)=0$, nie posiada innych miejsc biegunowych (w których stawałaby się nieskończenie wielką) prócz $x=\infty$. Ma to miejsce wtedy, gdy równanie $f(x,y)=0$, rozwinięte według potęg zmiennej y, ma postać:

$$y^n + f_1(x)\,y^{n-1} + f_2(x)\,y^{n-2} + \ldots, + f_{n-1}(x)\,y + f_n(x) = 0,$$

przyczem spółczynniki $f_1(x) \ldots\ldots, f_n(x)$ są funkcyami całkowitemi zmiennej x, stopnia conajwyżej m-tego.

§ 2. Wszystkie punkty płaszczyzny zmiennej zespolonej x dzielimy na dwie kategorye:

1) punkty zwyczajne, t. j. liczby $\bar{x}$, nie czyniące zadość równaniu $\varphi(x)=0$ wynikłemu, z równań:

$$f(x,y)=0, \qquad f_{0,1}^{(1)}(x,y)=0,$$

gdy z nich y wyrugujemy.

2) punkty krytyczne, t.j. liczby $\bar{x}$, czyniące zadość równaniu $\varphi(x)=0$, wynikłemu z równań:

$$f(x,y)=0, \qquad f_{0,1}^{(1)}(x,y)=0,$$

gdy z nich y wyrugujemy.

Przedmiot główny w tem przedstawieniu stanowić mają właśnie punkty krytyczne, zanim jednak do nich przystąpimy, poświęcimy kilka słów przypadkowi ogólnemu, gdy punkt $\bar{x}$ jest punktem zwyczajnym.

Rozwiązując równanie $f(\bar{x},\bar{y})=0$, napisane w postaci:

$$\bar{y}^n + f_1(\bar{x}).\bar{y}^{n-1} + f_2(\bar{x}).\bar{y}^{n-2} + \ldots\ldots + f_{n-1}(\bar{x}).\bar{y} + f_n(\bar{x}) = 0.$$

otrzymujemy n różnych pomiędzy sobą wartości:

$$\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \bar{y}_3,\ \ldots\ldots,\ \bar{y}_n.$$

Równanie pierwotne $f(x,y)=0$ określa nam n różnych pomiędzy sobą funkcyj

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ldots,\ y_n.$$

Możemy tedy przyjąć, że $y_1(x)$ dla $x=\bar{x}$ przyjmuje wartość równą $\bar{y}_1$, $y_2(x)$ dla $x=\bar{x}$ przyjmuje wartość równą $\bar{y}_2$, itd. itd., $y_n(x)$ dla $x=\bar{x}$ przyjmuje wartość równą $\bar{y}_n$.

§ **3**. Wróćmy na chwilę do pierwotnego równania określającego $f(x,y)=0$, i wykonajmy na niem cały szereg różniczkowań. Otrzymamy wzory:

$$f_{0,1}^{(1)}(x,y)\,.\,y^{(1)}+f_{1,0}^{(1)}(x,y)=0\,.$$

$$f_{0,1}^{(1)}(x,y)\,.\,y^{(2)}+f_{0,2}^{(2)}(x,y)\,\overline{y^{(1)}}^2+2f_{1,1}^{(2)}(x,y)\,y^{(1)}+f_{2,0}^{(2)}(x,y)=0$$

itd. etc. Z wzorów tych wynika:

$$y^{(1)}=\frac{\varphi_1(x,y)}{f_{0,1}^{(1)}(x,y)},\quad y^{(2)}=\frac{\varphi_2(x,y,y^{(1)})}{(f_{0,1}^{(1)}(x,y))^3},\quad y^{(3)}=\frac{\varphi_3(x,y,y^{(1)},y^{(2)})}{(f_{0,1}(x,y))^5},\;\ldots\ldots,$$

Rachunek liczników $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\ldots$ nie przedstawia najmniejszych trudności.

§ **4**. Weźmy pód uwagę którąkolwiek z wartości, wymienionych w § **2**, np. $\bar{y}_i$, i zastosujmy wzory, podane w § **3**, a otrzymamy:

$$\bar{y}_i^{(1)}=\frac{\varphi_1(\bar{x},\bar{y}_i)}{f_{0,1}^{(1)}(\bar{x},\bar{y}_i)},\quad \bar{y}_i^{(2)}=\frac{\varphi_2(\bar{x},\bar{y}_i,y_i^{(1)})}{(f_{0,1}^{(1)}(\bar{x},\bar{y}_i))^3},\;\ldots\ldots$$

Rozwinięcie

$$y_i=\bar{y}_i+\frac{(x-\bar{x})}{1!}\,\bar{y}_i^{(1)}+\frac{(x-\bar{x})^2}{2!}\,\bar{y}^{(2)}+\ldots\ldots$$

daje nam jednę z n funkcyj, określonych równaniem pierwotnem $f(x,y)=0$, tę mianowicie, która w punkcie $\bar{x}$ ma wartość $\bar{y}_i$. Kładąc $i=1,2,3,\ldots,n$, otrzymamy rozwinięcia wszystkich tych n funkcyj. Mamy więc:

Twierdzenie. Jeżeli równanie jest względem y stopnia n, jeżeli równania $f(\bar{x},y)=0$, $f_{0,1}^{(1)}(\bar{x},y)=0$ nie posiadają wspólnych rozwiązań na y, wówczas równanie $f(\bar{x},y)=0$ posiada n różnych pomiędzy sobą rozwiązań:

$$\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \bar{y}_3,\ \ldots\ldots,\ \bar{y}_n;$$

prócz tego, jeżeli $|x-\bar{x}|$ nie jest zbyt wielką liczbą, wówczas równanie $f(x,y)=0$ określa n funkcyj, dających się rozwinąć na szeregi:

$$y_\iota=\bar{y}_\iota+\frac{(x-\bar{x})}{1!}\bar{y}_\iota^{(1)}+\frac{(x-\bar{x})^2}{2!}\bar{y}_\iota^{(2)}+\ldots\ldots$$
$$(\iota=1,2,3,\ldots,n).$$

§ **5.** Przyjmijmy teraz, że punkt $\bar{x}$ jest punktem krytycznym, a więc czyni zadość równaniu $\varphi(x)=0$, wynikłemu z równań $f(x,y)=0$, $f_{0,1}^{(1)}(x,y)=0$ po wyrugowaniu z nich zmiennej y.

W tym przypadku wszystkie wartości y, wynikłe z rozwiązania równania $f(\bar{x},y)=0$, możemy podzielić na dwie kategorye:

1) do kategoryi pierwszej zaliczymy pojedyńcze pierwiastki równania $f(\bar{x},y)=0$; oznaczmy przez $\bar{y}$ dowolny z tych pojedyńczych pierwiastków;

2) do kategoryi drugiej zaliczymy wszystkie wielokrotne pierwiastki równania $f(\bar{x},y)=0$; oznaczmy przez $\bar{\eta}$ dowolny z tych wielokrotnych pierwiastków.

Wiemy, że równanie $f(x,y)=0$ określa n różnych pomiędzy sobą funkcyj.

Funkcye te podzielimy na dwie kategorye: do pierwszej zaliczymy te z funkcyj y, równaniem $f(x,y)=0$ określonych, które w punkcie $x=\bar{x}$ przyjmują którąkolwiek z wartości $\bar{y}$, t. j. pojedyńczych pierwiastków równania $f(\bar{x},y)=0$ (o ile oczywiście podobne wartości $\bar{y}$ istnieją).

Funkcye te wszystkie rozwijają się na zwyczajne szeregi potęgowe typu:

$$y=\bar{y}+\frac{(x-\bar{x})}{1!}\bar{y}^{(1)}+\frac{(x-\bar{x})^2}{2!}\bar{y}^{(2)}+\ldots\ldots$$

§ **6.** Zwróćmy teraz uwagę na pierwiastek wielokrotny $\bar{\eta}$— inne pozostawiamy na boku.

Niechaj R będzie jego wielokrotnością. Wśród funkcyj y, określonych równaniem $f(x,y)=0$, wyróżniamy R funkcyj, przyjmujących dla $x=\bar{x}$ wartość $\bar{\eta}$.

Aby te funkcye wyznaczyć, piszemy:

$$y = \bar{\eta} + (x - \bar{x})^{\mu} y_1 ,$$

gdzie μ jest pewną liczbą wymierną, natomiast y_1 jest nową funkcyą algebraiczną zmiennej x, różną od zera i skończoną w punkcie $\bar{x}$.

Zadanie nasze polega na tem, by znaleść odpowiednią wartość liczby μ, oraz zbudować równanie algebraiczne, któreby określało pomocniczą funkcyę y_1.

W tym celu rozwińmy wielomian $f(x, y)$ według potęg różnic $x - \bar{x}$, $y - \bar{\eta}$, a otrzymamy wyrażenie:

$$f(x, y) = \sum_{0 \leq \beta \leq m}^{0 \leq \alpha \leq n} A_{\alpha\beta} (y - \bar{\eta})^{\alpha} (x - \bar{x})^{\beta} = 0,$$

przyczem wiemy z góry, że:

$$A_{0,0} = A_{1,0} = A_{2,0} = \ldots\ldots = A_{R-1,0} = 0,$$

oprócz tego mogą znikać i inne spółczynniki $A_{\alpha\beta}$; od wyboru tych spółczynników $A_{\alpha\beta}$ które znikają, zależy analiza wzoru:

$$y = \bar{\eta} + (x - \bar{x})^{\mu} y_1 .$$

§ 7. W celu wyznaczenia liczby μ, korzystamy z wzoru:

$$y - \bar{\eta} = (x - \bar{x})^{\mu} y_1$$

i podstawiamy go w rozwinięcie:

$$\sum_{0 \leq \beta \leq m}^{0 \leq \alpha \leq n} A_{\alpha\beta} (y - \bar{\eta})^{\alpha} (x - \bar{x})^{\mu} = 0 ,$$

a otrzymamy:

$$\sum_{0 \leq \beta \leq m}^{0 \leq \alpha \leq n} A_{\alpha\beta} y_1^{\alpha} (x - \bar{x})^{\alpha\mu + \beta} = 0 . \tag{2}$$

Teraz wyznaczamy liczbę μ w ten sposób, aby w rozwinięciu (2) najmniejsza wartość wykładnika $\alpha\mu + \beta$, która tam istotnie zachodzi, zawierała się przynajmniej w dwóch wyrazach, w tym celu zastosujemy metodę, podaną w niektórych podręcznikach, rozwinąwszy ją możliwie schematycznie [1].

Jest to pewnego rodzaju metoda mechaniczna, którą możnaby specyalnie uzasadnić; ograniczymy się jednak na podaniu jej treści i pobieżnem jej uzasadnieniu.

Polega ona na tem, że podajemy opis wszystkich spółczynników $A_{\alpha\beta}$ rozwinięcia:

$$(2) \qquad \sum_{1\leq\beta\leq m}^{1\leq\alpha\leq n} A_{\alpha\beta}(y-\overline{\eta})^{\alpha}(x-\overline{x})^{\beta},$$

które n i e s ą zerami i notujemy odpowiednie pary wykładników (α, β).

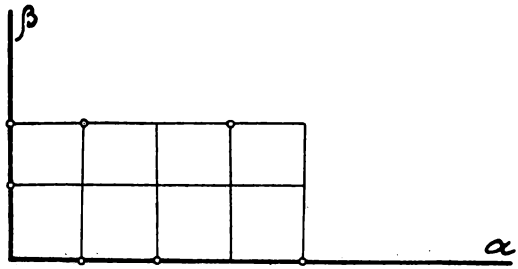

Fig. 1.

Następnie, w płaszczyźnie rysunkowej obieramy dwie wzajemnie prostopadłe osi: oś liczb α i oś liczb β. Wszystkie wymienione w spisie powyższym pary wykładników, dadzą nam układ punktów w tej płaszczyźnie.

Otóż ten układ punktów, rozwinięcia (2), względnie miejsca (a, b) szczegółowo zbadamy,

Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3 przedstawiają nam podobne schematy geometryczne miejsca $(a. b)$ w przypadkach rozwinięć:

---

[1]) B r i o t M. Dh. Théorie des fonctions abéliennes. Paris. G a u t h i e r-V i l l a r s 1879, str. XIX 180. a mianowicie § 2 - § 14, str. 2—22.

F o r s y t h. Theory of functions of a complex variable. Cambridge 1893, § 97 str, 168—173; § 96 str. 164—167.

T i c h o m a n d r i c k i j. Osnowanija tieorji Abieliewych intiegrałow. Charków 1894, § 24—35, str. 28—53.

H e n s e l K. und G. L a n d s b e r g. Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln. Leipzig Teubner, 1902. Wykład IV, str. 39—52; Wykład V, str. 53—77.

1) $$A_{0,1}(x-a)+A_{1,0}(y-b)+A_{0,2}(x-a)^2+A_{2,0}(y-b)^2$$
$$+A_{1,2}(x-a)^2(y-b)+A_{4,0}(y-b)^4+A_{3,2}(x-a)^2(y-b)^2=0.$$

2) $$A_{0,1}(x-a)+A_{4,0}(y-b)^4+A_{1,1}(x-a)(y-b)+A_{2,1}(x-a)(y-b)^2$$
$$+A_{2,2}(x-a)^2(y-b)^2+A_{2,3}(x-a)^3(y-b)^2+A_{1,4}(x-a)^4(y-b),$$
$$+A_{3,3}(x-a)^3(y-b)^3=0$$

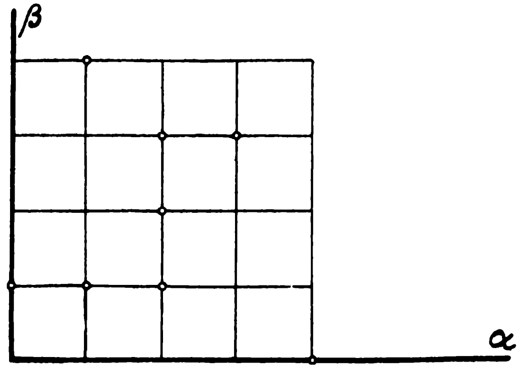

Fig. 2.

3) $$A_{0,5}(x-a)^5+A_{4,0}(y-b)^4+A_{1,2}(x-a)^2(y-b)$$
$$+A_{2,3}(x-a)^3(y-b)^2+A_{4,2}(x-a)^2(y-b)^4+A_{0,7}(x-a)^7$$
$$+A_{9,0}(y-b)^9=0.$$

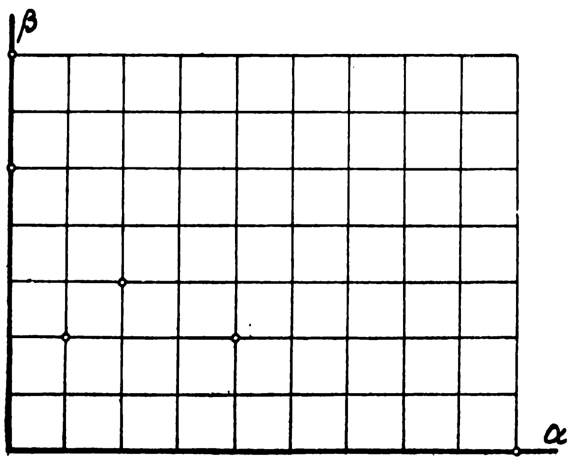

Fig. 3.

§ 8. Wspomniany schemat traktujemy w następujący sposób: Punktem bieżącym posuwamy się wzdłuż osi 0α w kierunku dodatnym od punktu 0 począwszy, tak długo dopóki nie natrafimy na najbliższy punkt naszego schematu, który na tej osi niezawodnie się znajdzie [1]. (Musi on tam być, w przeciwnym razie w rozwinięciu (2) wyraz $A_{\alpha,0}$ nie miałby różnego od zera przedstawiciela, rozwinięcie (2) miałoby wspólny czynnik w postaci pewnej potęgi $(y-b)$, co sprzeciwiałoby się nieprzywiedlności równania pierwotnego):

Niechaj $(\alpha_0,0)$ będzie tym punktem [1]. Odcinek $(\alpha_0,0)$ K_0 obracamy teraz w kierunku zgodnym z ruchem skazówek zegarowych,

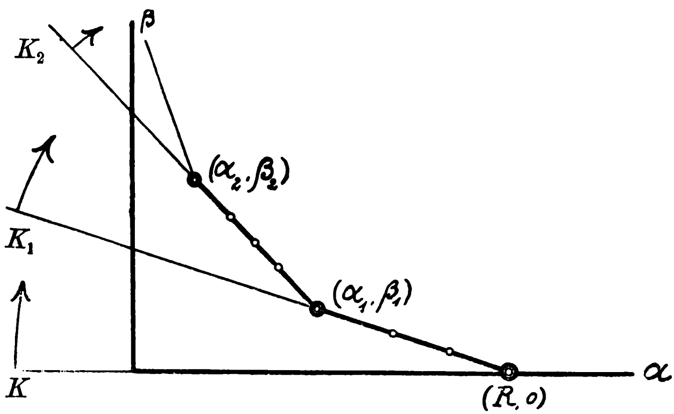

Fig. 4.

a więc ujemnym dopóty, dopóki nie przejdzie on przez najbliższy punkt schematu, jaki w tym ruchu możemy natrafić.

(Punkt K_0 jest to dostatecznie odległy punkt przedłużonej osi α). Niechaj $(\alpha_0,0) K_1$ będzie tem położeniem promienia $(\alpha_0,0)$ K_0

Na ramieniu $(\alpha_0,0) K_1$ może się znaleść jeden punkt schematu naszego [prócz $(\alpha_0,0)$], lecz też może zajść taki wypadek, że i większa liczba punktów schematu tamże się znajdzie. Ten drugi

[1]) Punkt 0 początek układu spółrzędnych.

[2]) Na fig. 4 i 5 wzięto R zamiast α_0—co jest uprawnionem w obec tego, że mamy na myśli R-krotny pierwiastek η. Patrz str. 6 wiersz 10, oraz 12 licząc od góry.

przypadek jest ogólniejszy, więc nim się bliżej zajmiemy. Główny nacisk kładziemy na znakowanie.

Prostą $(\alpha_0, 0) K_1$ nazywamy pierwszem ramieniem konstrukcyi geometrycznej, którą przeprowadzimy; oznaczmy ją przez C_1. Wzdłuż tego ramienia posuwamy się punktem bieżącym od położenia $(\alpha_0, 0)$, począwszy w kierunku K_1 dopóty, dopóki nie dojdziemy do ostatniego, do najdalszego punktu naszego schematu, który na tem ramieniu się znajdzie. Oznaczmy ten punkt przez (α_1, β_1). Gdyby punkt $(\alpha_1 \beta_1)$ wypadł na osi β, jak np. na fig. 1, lub na fig. 2, to konstrukcya by się skończyła.

Jeżeli jednak punkt $(\alpha_1 \beta_1)$ wypada między osiami (α), (β), wówczas owo pierwsze ramię $(\alpha_1 \beta_1) K_1$ obracamy w kierunku zgodnym z ruchem skazówki zegarowej, dopóty, dopóki znowu nie natrafimy na najbliższy punkt schematu; to nowe położenie, nowy

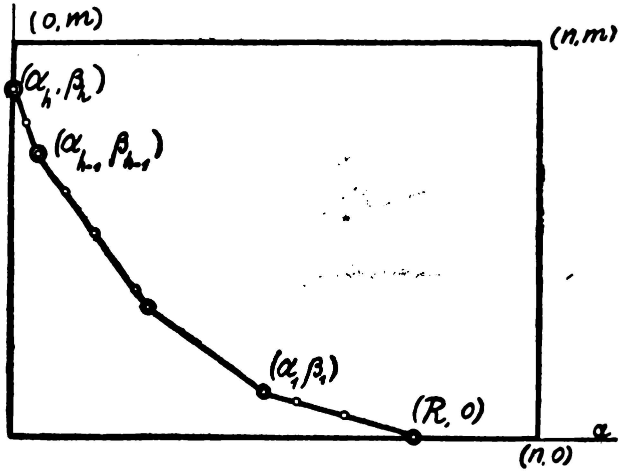

Fig. 5.

promień $(\alpha_1 \beta_1) K_2$ nazwiemy drugiem ramieniem naszej konstrukcyi geometrycznej i oznaczymy przez C_2.

Teraz posuwamy się punktem bieżącym od położenia $(\alpha_1 \beta_1)$ w kierunku K_2 dopóty, dopóki nie dojdziemy do ostatniego punktu schematu naszego.

Oznaczmy ten ostatni, najdalszy punkt $(\alpha_2 \beta_2)$. Jeżeli on znajdzie się na osi β, to konstrukcya skończona; jeżeli nie, to ją prowadzimy dalej, kreśląc ramiona C_3, $C_4, \ldots$ dopóki ostatni punkt $(\alpha_p \beta_p)$ ramienia C_p wypadając na osi β, nie zamknie konstrukcyi.

W rezultacie otrzymujemy łamaną:

$$\underset{\beta_0=0}{(\alpha_0, \beta_0)}, (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots\ldots (\alpha_{p-1}, \beta_{p-1}), \underset{\alpha_p=0}{(\alpha_p, \beta_p)}.$$

§ **9.** Łamana powyższa, złożona z ramion $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_p$, dzieli prostokąt $[(0,0), (0,m), (n,m), (n,0)]$, wynikły z wzorów

$$0 \lessgtr \alpha \lessgtr n, \quad 0 \lessgtr \beta \lessgtr m$$

na dwie części: pierwsza od strony punktu $(0,0)$ nie zawiera ani jednego punktu schematu w swem wnętrzu, chyba na obwodzie łamanym; druga zaś, od strony punktu (n, m) zawiera wszystkie punkty schematu tak w swem wnętrzu, jak i na obwodzie.

Łamana nasza ma specyalną doniosłość rachunkową.

Jakoż rozpatrzmy ramię jej C_2 — krańce jej $(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1})$, $(\alpha_i \beta_i)$ wyznaczają nam stosunek:

$$\mu_i = \frac{\beta_{i-1} - \beta_i}{\alpha_i - \alpha_{i-1}}.$$

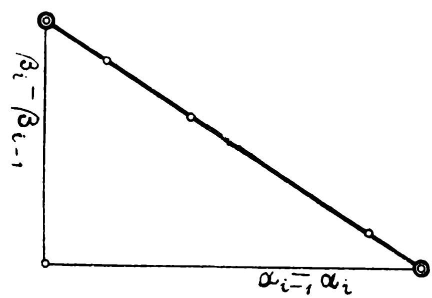

Fig. 6.

Połóżmy

$$y - \overline{\eta} = y_1 (x - \overline{x})^{\mu}$$

i podstawmy to w rozwinięcie (2):

$$\sum_{\substack{0 \leqq \alpha \leqq n \\ 0 \leqq \beta \leqq m}} A_{\alpha\beta} (x - \overline{x})^{\beta} (y - \overline{\eta})^{\alpha} = 0, \tag{2}$$

uwzględniając oczywiście te tylko pary wykładników (α, β), którym odpowiadają różne od zera spółczynniki $A_{\alpha\beta}$.

Kładąc na μ różne wartości dodatnie, począwszy od bardzo małej dodatniej, kończąc na bardzo wielkiej dodatniej (0 i ∞ wyłączamy), przekonamy się, że w rozwinięciu (2) które przyjmie postać:

$$\sum_{\substack{0 \leqq \alpha \leqq n \\ 0 \leqq \beta \leqq m}} A_{\alpha\beta} y_1^{\alpha} (x - \overline{x})^{\alpha\mu + \beta} = 0, \tag{2$_1$}$$

najmniejsza wartość wykładnika $\alpha\mu + \beta$ będzie miała w ogólności jednego tylko przedstawiciela, wobec tego warunek $\overline{y} =$ skończonej liczbie w miejscu (a, b) utrzymać się nie da.

Wyjątek stanowią przypadki, gdy μ przyjmuje jednę z p wartości $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$. Tu najmniejsza wartość wykładnika $\alpha\mu + \beta$ będzie miała w rozwinięciu $(2)_1$ przynajmniej dwie odpowiadające pary wykładników $(\alpha\beta)$ naszego schematu, co umożliwia postawienie warunku $\overline{y} =$ skończonej liczbie w miejscu (a, b) i pozwala obliczyć jej wartość w tem miejscu.

§ **10**. Widzimy zaraz, że ogół R funkcyj y, wyjęty z mnogości wszystkich n funkcyj y, określonych równaniem pierwotnem: $f(x, y) = 0$, na podstawie tego, że one w punkcie $x = \overline{x}$, przyjmują wartość $\overline{\eta}$ t.j. R-krotny pierwiastek równania $f(\overline{x}, y) = 0$, rozpada się na tyle typów, ile odcinków (różnych pomiędzy sobą co do kierunków) składa łamaną, zbudowaną z rozwinięcia:

$$(1) \qquad \Sigma A_{\alpha\beta} (y - \eta)^\alpha (x - \overline{x})^\beta = 0,$$

równoważnego równaniu pierwotnemu $f(x, y) = 0$, na podstawie tego, co wyłożono w art. 7, 8 i 9. Aby ułatwić bieg myśli, zwróćmy uwagę na jeden tylko odcinek łamanej, łączącej dajmy na to, punkty $(\alpha_{i-1}\beta_{i-1}), (\alpha_i\beta_i)$. Na tym odcinku mogą znajdować się i inne punkty $(\alpha\beta)$, o całkowitych, dodatnich oczywiście wartościach α i β, w rozwinięciu (1) zawartych.

W celu uniknięcia nagromadzenia znaków, przyjmiemy, że są to punkty:

$$(\alpha'_0 \beta'_0)\ (\alpha'_1 \beta'_1)\ \ldots\ldots\ (\alpha'_l \beta'_l)$$

uważając, że krańcowemi punktami są:

$$(\alpha_{i-1}\beta_{i-1}) \equiv (\alpha'_0 \alpha'_0); \quad (\alpha_i \beta^i) \equiv (\alpha'_l \beta'_l).$$

Odcinkowi $(\alpha_{i-1}\beta_{i-1}) \ldots (\alpha_i\beta_i)$ odpowiada stosunek:

$$\mu = \frac{\beta_{i-1} - \beta_i}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} = \frac{\beta'_l - \beta'_0}{\alpha'_0 - \alpha'_l},$$

oraz typ:

$$y = \eta + (x - \overline{x})^\mu y_1.$$

Otóż ten typ, wyłączony z mnogości R funkcyj, wymienionych na wstępie niniejszego art., składa się znowu z pewnej liczby funkcyj. Będzie ich tyle, ile wypadnie funkcyj y_1 pomiędzy sobą różnych.

Na określenie funkcyi y_1 mamy równanie stopnia n-tego względem y_1:

$$(2) \qquad \sum_{\substack{0 \leqslant \alpha \leqslant n \\ 0 \leqslant \beta \leqslant m}} A_{\alpha\beta} y_1^{\alpha} (x-\overline{x})^{\alpha\mu+\beta} = 0.$$

Nie uwzględniamy jednak wszystkich n funkcyj y_1, równaniem (2) określonych, ale tylko te, które dla $x=\overline{x}$ przyjmują wartość skończoną. Te zaś, które dla $x=\overline{x}$ przyjęłyby wartość 0, albo ∞ pomijamy, ponieważ nie zachowałyby one typu

$$y = \overline{\eta} + (x-\overline{x})^{\mu} y_1 .$$

ale owszem zwiększyłyby lub zmniejszyły μ.

Liczba uwzględnionych funkcyj będzie mniejsza aniżeli n; co więcej nawet, będzie ona mniejsza aniżeli R. Aby ją znaleść, przypomnimy, że najniższa wartość wykładnika $\alpha\mu+\beta$ przypada na te pary wykładników (α, β), które wypadają na tym odcinku łamanej, dla którego μ zostało wyrachowane, a więc będą to wykładniki: $(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) \ldots\ldots (\alpha_i, \beta_i)$ a właściwie wykładniki:

$$(\alpha'_0\, \beta'_0),\ (\alpha'_1\, \beta'_1)\ \ldots\ldots,\ (\alpha'_l\, \beta'_l).$$

Jeżeli więc wzór (2) uporządkujemy według rosnących potęg różnicy $x-\overline{x}$ i podzielimy przez najniższą jej potęgę, to wolny wyraz będzie wielomianem, uporządkowanym według potęg zmiennej y_1, zawierającym wyrazy:

$$y_1^{\alpha'_0},\ y_1^{\alpha'_1},\ y_1^{\alpha'_2},\ \ldots\ldots,\ y_1^{\alpha'_l}.$$

Jeżeli weźmiemy za nawias wyraz $y_1^{\alpha'_0}$, to otrzymamy w nawiasie wielomian, zawierający wyrazy.

$$y_1^0,\ y_1^{\alpha'_1-\alpha'_0},\ y_1^{\alpha'_2-\alpha'_0},\ \ldots\ldots\ y_1^{\alpha'_l-\alpha'_0},$$

a więc stopnia $a_i' - a_0' = a_i - a_{i-1}$ względem y_1. Jeżeli więc x przyjmie wartość $\overline{x}$, to odpowiednie wartości $\overline{y}_1$, po pominięciu 0 i ∞, wypadną z równania, które otrzymamy, kładąc wymienione dopiero co wyrażenie równem zeru. Będzie ich $a_i - a_{i-1}$; tyle za tem będzie różnych pomiędzy sobą funkcyj y_1. Stąd wynika:

Twierdzenie. Ogół tych R funkcyj y, równaniem $f(x,y)=0$ określonych, które, dla $x=\overline{x}$, przyjmują wartość $\overline{\eta}$ t.j. R-krotny pierwiastek równania $f(\overline{x},y)=0$ rozpada się na tyle typów, ile odcinków ma łamana, wykreślona z rozwinięcia:

$$f(x,y) = \Sigma A_{\alpha\beta}(y-\overline{\eta})^{\alpha}(x-\overline{x})^{\beta} = 0$$

tna mocy art. 7, 8, 9).

Odcinkowi $(R,0)\ldots\ldots(a_1,\beta_1)$ odpowiada $R-a_1$ funkcyj typu

$$y = \overline{\eta} + (x-\overline{x})^{\mu} y_1\,; \qquad \mu = \frac{\beta_1}{R-a_1}\,.$$

Odcinkowi $(a_1,\beta_1)\ldots\ldots(a_2,\beta_2)$ odpowiada $a_1 - a_2$ funkcyj typu:

$$y = \overline{\eta} + (x-\overline{x})^{\mu} y_1 \qquad \mu = \frac{\beta_2-\beta_1}{a_1-a_2} \text{ i t. d.}$$

W ten sposób odbył się rozkład ogółu R funkcyj badanych na wiadomą liczbę typów wiadomej postaci, o wiadomej liczbie elementów w każdym.

§ **11.** Zajmijmy się specyalnie typem:

$$\mu = \frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{a_{i-1} - a_i}\,.$$

Niechaj P będzie wspólnym, największym dzielnikiem różnic $\beta_i - \beta_{i-1}$, $a_{i-1} - a_i$ i dajmy, że:

$$\beta_i - \beta_{i-1} = Pk\,, \quad a_{i-1} - a_i = Qk\,.$$

wówczas wypadnie $\mu = \dfrac{P}{Q}$.

Połóżmy

$$(x-\overline{x})^{\frac{1}{Q}} = x_1,$$

a równanie (2), po uporządkowaniu go według potęg różnicy $x-\overline{x}$:

$$\Sigma A_{\alpha\beta} y_1^{\alpha}(x-\overline{x})^{\alpha\mu+\beta} = 0\ ,$$

oraz, po skróceniu przez najniższą potęgę różnicy $x-\overline{x}$, przyjmie postać:

$$(y_1)_0 + (y_1)_1\, x_1 + (y_1)_2\, x_1^2 + \ldots = 0,$$

lub po prostu:

$$f_1(x_1, y_1) = 0.$$

Widzimy więc, że funkcya y_1 wynikła z typu:

$$y = \overline{\eta} + (x-\overline{x})^{\mu_i}\, y_1$$

jest rozwiązaniem równania $f_1(x_1, y_1) = 0$ (dla każdego i — będzie ono inne) stopnia n-tego względem y_1, z którego uwzględniamy tylko $a_i - a_{i-1}$ rozwiązań, różnych od zera i od ∞, dla $x_1 = 0$.

Wartość y_1, odpowiadającą przypadkowi $x_1 = 0$, znajdujemy z równania stopnia $a_i - a_{i-1}$. Ale zawiera ono potęgi

$$y_1^{0},\ y_1^{\alpha'_1-\alpha'_0},\ y_1^{\alpha'_2-\alpha'_0},\ \ldots\ldots,\ y_1^{\alpha'_l-\alpha'_0}.$$

Wszystkie one są podzielne przez Q. Wynika to z wzoru:

$$\frac{\alpha'_1-\alpha'_0}{\beta'_0-\beta'_1} = \frac{Q}{P} = \frac{\alpha'_l-\alpha'_0}{\beta'_0-\beta'_l}\ ,$$

w którym Q i P są liczby względnie pierwsze. (U w a g a. Punkt $\alpha'_1\beta'_1$ znajduje się na prostej, łączącej punkty $\alpha'_l\beta'_l$, $\alpha'_0\beta'_0$ — stąd więc ów wzór).

Wyrażenie to w pełnym składzie zawrze:

$$y_1^{0},\ y_1^{Q},\ y_1^{2Q},\ \ldots\ldots,\ y_1^{kQ}.$$

Jest ono rzędu k względem y_1^Q. Mamy więc k wartości dla wyrazu y_1^Q, które funkcya y_1^Q może przyjąć dla $x_1 = 0$.

Przypatrzmy się bliżej naszej czynności: Badamy równanie $f_1(x_1 . y_1) = 0$ oraz te funkcye, które dla $x_1 = 0$ mają wartość różną od 0 i od ∞; rozwiązujemy równanie $f_1(0, y_1) = 0$, które skróciliśmy przez odnośne potęgi y_1. Daje ono nam $a_i - a_{i-1} = kQ$ wartośoi.

Wracamy więc do sprawy elementarnej z art. 5, traktując równanie $f_1(x_1 y_1) = 0$ ściśle według prawideł, wyłożonych w art.5 i następnych.

Badając równanie $f_1(0, y_1) = 0$ wyróżniamy pierwiastki pojedyńcze, oraz wielokrotne. Oznaczmy dowolny pojedyńczy pierwiastek równania $f_1(0, y_1) = 0$ przez $\overline{y}_1$, dowolny wielokrotny przez $\overline{\eta}_1$.

Pojedyńcze pierwiastki równania $f_1(0, y_1) = 0$ zamykają pierwszą kategoryę funkcyj y_1, równaniem $f_1(x_1, y_1) = 0$ określonych.

Pozostają więc wielokrotne pierwiastki równania $f_1(0, y_1) = 0$ określonych. Pomówimy o nim w nast. art., a teraz zajmiemy się tylko pierwszą kategoryą funkcyj, równaniem $f_1(x_1, y_1) = 0$ określonych, która zawiera tylko te z nich, które dla $x_1 = 0$ przyjmują wartość, będącą jednym z pojedyńczych pierwiastków równania ${}_1(0, y_1) = 0$, pominąwszy 0 i ∞.

Funkcya y_1, przyjmująca dla $x_1 = 0$ wartość taką $\overline{y}_1$. rozwija się na szereg:

$$y_1 = \overline{y}_1 + \frac{x_1}{1!}\overline{y}_1^{(1)} + \frac{x_1^2}{2!}\overline{y}_1^{(2)} + \frac{x_1^3}{3!}\overline{y}_1^{(3)} + \ldots\ldots$$

Otóż pierwsza kategorya funkcyj y_1, równaniem $f_1(x_1, y_1) = 0$ określonych, wyznacza część główną drugiej kategoryi funkcyj y równaniem pierwotnem $f(x, y) = 0$ określonych.

Wyznacza mianowicie tę z R funkcyj y, stających się dla $x = \overline{x}$, równemi $\overline{\eta}$ [$\overline{\eta}$—R-krotny pierwiastek równania $f(\overline{x}, y) = 0$] typu:

$$y = \overline{\eta} + (x - \overline{x}) + (x - \overline{x})^u y_1,$$

dla której y_1 dla $x = \overline{x}$) przyjmuje, jako wartość któregokolwiek pojedyńczy pierwiastek równania $f_1(0, y_1) = 0$.

Odnośna funkcya, należąca do tego szeregu funkcyj, wyłączonego z wiadomego typu μ, rozwija się na mocy wzorów:

$$y = \eta + (x-\overline{x})^{\frac{P}{Q}} y_1,$$

$$x-\overline{x} = x_1{}^Q$$

$$y_1 = \overline{y} + \frac{x_1}{1!}\overline{y}_1{}^{(1)} + \frac{x_1{}^2}{2!}\overline{y}_1{}^{(2)} + \frac{x_1{}^3}{3!}\overline{y}_1{}^{(3)} + \ldots,$$

gdzie

$$y_1{}^{(n)} = \frac{d^n y_1}{dx_1{}^n}.$$

§ 12. Pierwiastki wielokrotne równania $f_1(x_1, y_1) = 0$, (0 i ∞ pominięto) wyznaczają drugą kategoryę funkcyj y_1. Musimy powtórzyć dokładnie to, cośmy w art. 6 powiedzieli o funkcyi y. Rozwijamy:

$$f_1(x_1, y_1) = \Sigma A'_{\alpha\beta}(y_1-\eta_1)^\alpha x_1{}^\beta = 0,$$

i kładziemy:

$$y_1 = \eta_1 + y_2 x_1{}^{\mu_1}.$$

Na wyznaczenie liczby μ_1 kreślimy łamaną dla rozwinięcia:

$$\Sigma A'_{\alpha\beta}(y_1-\eta_1)^\alpha x_1{}^\beta = 0,$$

każde ogniwo jej wyznacza inną wartość liczby μ. Każdemu ogniwu odpowiada inny typ:

$$y_1 = \eta_1 + y_2 x_1{}^{\mu_1},$$

a zarazem inne równanie $f_2(x_2, y_2) = 0$, które otrzymujemy z wzorów:

$$y_1 = \eta_1 + y_2 x_1{}^{\mu_1}, \quad \mu_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \quad x_2 = x_1{}^{\frac{1}{Q_1}},$$

po podstawieniu w rozwinięcie:

$$\Sigma A'_{\alpha\beta}(y_1-\eta_1)^\alpha x_1{}^\beta = 0.$$

Pojedyńcze pierwiastki równania $f_2(0, y_2) = 0$ wyznaczają pierwszą kategoryę funkcyj y_2, a zarazem główną część trzeciej kategoryi funkcyj y, równaniem $f(x, y) = 0$ określonych. Funkcye te wynikają z wzorów:

$$y = \eta + (x - \bar{x})^{\frac{P}{Q}} y_1 ; \qquad x - \bar{x} = x_1{}^Q ,$$

$$y_1 = \eta_1 + x_1{}^{\frac{P_1}{Q}} y_2 , \qquad x_1 = x_2{}^{Q_1}$$

$$y_2 = \bar{y}_2 + \bar{y}_2{}^{(1)} . \frac{x_2}{1!} + \bar{y}_2{}^{(2)} . \frac{x_2{}^2}{2!} + \bar{y}_2{}^{(3)} . \frac{x_2{}^3}{3!} + \ldots\ldots$$

Wielokrotne pierwiastki równania $f_2(0, y_2) = 0$ zniewalają nas do dalszego postępowania we wskazanym już kierunku.

§ 13. Rzućmy okiem na przebytą przez nas drogę, i zdajmy sobie sprawę z całego naszego postępowania.

Podział n funkcyj, równaniem $f(x, y) = 0$ określonych na kategorye.

Funkcye, należące do pierwszej kategoryi, mają rozwiniętą postać:

$$y = \bar{y} + \frac{x - \bar{x}}{1!} \bar{y}^{(1)} + \frac{(x - \bar{x})^2}{2!} \bar{y}^{(2)} + \frac{(x - \bar{x})^3}{3!} \bar{y}^{(3)} + \ldots ,$$

gdzie $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$, $\bar{y}$ zaś jest jednym z pojedyńczych pierwiastków równania $f(\bar{x}, y) = 0$.

Funkcye, należące do drugiej kategoryi, mają rozwiniętą postać:

$$y = \bar{\eta} + y_1 (x - \bar{x})^{\frac{P}{Q}} ; \qquad x - \bar{x} = x_1{}^Q ,$$

$$y_1 = \bar{y}_1 + \frac{x_1}{1!} \bar{y}_1{}^{(1)} + \frac{x_1{}^2}{2!} \bar{y}_1{}^{(2)} + \frac{x_1{}^3}{3!} \bar{y}^{(3)} + \ldots\ldots$$

gdzie $y_1{}^{(n)} = \frac{d^n y_1}{dx_1{}^n}$, $\bar{\eta}$ zaś jest jednym z pierwiastków wielokrotnych równania $f(\bar{x}, y) = 0$, $\bar{y}_1$ jest jednym z pierwiastków pojedyńczych odpowiedniego równania $f_1(0, y_1) = 0$, Funkcye, należące do trzeciej kategoryi, mają rozwiniętą postać:

$$y = \overline{\eta} + y_1 (x - \overline{x})^{\frac{P}{Q}}; \qquad x - \overline{x} = x_1^{Q},$$

$$y_1 = \overline{\eta}_1 + y_2 x_1^{\frac{P_1}{Q_1}}; \qquad x_1 = x_2^{Q_1},$$

$$y_2 = \overline{y}_2 + \frac{x_2}{1!} \overline{y}_2^{(1)} + \frac{x_2^2}{2!} \overline{y}_2^{(2)} + \frac{x_3^3}{3!} \overline{y}_2^{(3)} + \ldots,$$

gdzie $y_2^{(n)} = \frac{d^n y_2}{dx_2^n}$, $\overline{\eta}$ jest jednym z pierwiastków wielokrotnych równania $f(\overline{x}, y) = 0$; $\overline{\eta}_1$ jest jednym z pierwiastków wielokrotnych odpowiedniego równania $f_1(0, y_1) = 0$; $\overline{y}_2$ jest jednym z pierwiastków pojedyńczych odpowiedniego równania $f_2(0, y_2) = 0$ i t. d.

Funkcye, należące do r-tej kategoryi, mają rozwiniętą postać:

$$y = \overline{\eta} + y_1 (x - \overline{x})^{\frac{P}{Q}}; \qquad x - \overline{x} = x_1^{Q},$$

$$y_1 = \overline{\eta}_1 + y_2 x_1^{\frac{P_1}{Q_1}}; \qquad x_1 = x_2^{Q_1},$$

$$y_2 = \overline{\eta}_2 + y_3 x_2^{\frac{P_2}{Q_2}}; \qquad x_2 = x_3^{Q_2},$$

. . . .

. . . .

$$y_{r-2} = \overline{\eta}_{r-2} + y_{r-1} x_{r-2}^{\frac{P_{r-1}}{Q_{r-1}}}; \qquad x_{r-2} = x_{r-1}^{Q_{r-2}},$$

$$y_{r-1} = \overline{y}_{r-1} + \overline{y}_{r-1}^{(1)} x_{r-1} + \frac{x^2_{r-1}}{2!} \overline{y}_{r-2}^{(2)} + \frac{x^3_{r-1}}{3!} \overline{y}_{r-1}^{(3)} + \ldots\ldots$$

gdzie $y_{r-1}^{(n)} = \frac{d^n y_{r-1}}{dx_{r-1}^n}$,

$\overline{\eta}$ jest jednym z pierwiastków wielokrotnych równania $f(\overline{x}, y) = 0$,
$\overline{\eta}_1$ „ „ „ „ odpow. równ. $f_1(0, y_1) = 0$,
$\overline{\eta}_2$ „ „ „ „ „ „ $f_2(0, y_2) = 0$,

. . . .

. . . .

$\overline{\eta}_{r-2}$ „ „ „ „ $f_{r-2}(0, y_{r-2}) = 0$,
$\overline{y}_{r-1}$ „ „ pojedyńczych „ $f_{r-1}(0, y_{r-1} = 0$.

Główną trudność stanowi wielka rozmaitość przypadków tak co do liczby kategoryj, liczby elementów poszczególnych kategoryj, oraz wyboru odpowiednich równań, ich stopni i ilości. Trudność ta uwydatni się w tem, że gdybyśmy chcieli systematycznie rzecz wyłożyć, nie bylibyśmy w stanie uniknąć nagromadzenia skaźników, co będąc dogodnem dla małej liczby skaźników, staje się wielce trudnem przy wielkiej ich liczbie.

§ **14**. Przekonajmy się o tem na przykładach.

Równanie $f(\bar{x}, y) = 0$ posiada pojedyńcze pierwiastki: $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2, \ldots\ldots, \bar{y}_p$, oraz wielokrotne: $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots\ldots, \bar{\eta}_q$. Mamy więc przynajmniej dwie kategorye. Z pierwszą jesteśmy już gotowi. Musimy zająć się pierwiastkami wielokrotnemi. Pierwiastek $\bar{\eta}_i$ jest R_i-krotny. Rozwinięcie:

$$f(x, y) = \Sigma A_{\alpha\beta i} (y - \bar{\eta}_i)^\alpha (x - \bar{x})^\beta = 0.$$

daje łamaną. Liczba ogniw jej (odcinków), kierunki ich, dla każdego $\bar{\eta}_i$ są inne. Musimy więc powiedzieć, że łamana ma h_i odcinków o kierunkach $\mu_{i1}, \mu_{i2}, \ldots, \mu_{ih_i}$ (mamy tedy skaźniki złożone ze skaźnikami ubocznemi μ_{ih_i}). Kierunek μ_{ih_i} daje:

$$\mu_{ij} = \frac{P_{ij}}{Q_{ij}}, \text{ a zarazem wzór } y = \bar{\eta}_i + y_1 (x - \bar{x})^{\frac{P_{ij}}{Q_{ij}}},$$

dla ścisłości powinniśmy napisać:

$$y = \bar{\eta}_i + y_{ij} (x - \bar{x})^{\frac{P_{ij}}{Q_{ij}}};$$

połóżmy $x - \bar{x} = x_{ij}{}^{Q_{ij}}$, a otrzymamy na wyznaczenie y_{ij} równanie $f_{ij}(x_{ij}, y_{ij}) = 0$.

Równanie $f_{ij}(0, \bar{y}_{ij}) = 0$, po potrąceniu wartości 0 i ∞, daje pewną liczbę pierwiastków pojedyńczych $\bar{y}_{ij1}, \bar{y}_{ij2}, \ldots, \bar{y}_{ijp_{ij}}$ (b liczba ich dla każdej pary ij jest inna) i pewną liczbę pierwiastków wielokrotnych: $\bar{\eta}_{ij1}, \bar{\eta}_{ij2}, \ldots, \bar{\eta}_{ijq_{ij}}$.

W tym przypadku przybywa nam i trzecia kategorya. Przyjmijmy, że pierwiastek η_{ijk} jet R_{ijk} - krotny, rozwinięcie

$$f_{ij}(x_{ij}, y_{ij}) = \Sigma A_{\alpha\beta ijk}(y_{ij} - \overline{\eta}_{ijk})^{\alpha} x_{ij}{}^{\beta} = 0 .$$

wyznacza nam nową łamaną i t. d.

Znakowanie zatem komplikuje się znacznie, bardziej i bardziej wikłając się w miarę, jak liczba kategoryj wzrasta.

W znakowaniu zatem bodaj, czy znajdziemy dobrą wskazówkę przy analizie krytycznego punktu $\overline{x}$ ze względu na ewentualne w nim rozgałęzienia.

W przypadkach liczbowych — trudności są tylko czysto rachunkowe. W przypadku ogólnym, gdy chodzi o teoryą, wybór poszczególnych wyrazów rozwinięcia

$$y = a_0 + a_1 (x - \overline{x})^{v_1} + a_2 (x - \overline{x})^{v_2} + \ldots .$$

tak pod względem ilościowym, jak i jakościowym w ogólnych wyrazach wysłowić się nie da, przynajmniej przy dotychczas używanych metodach rozwijania.

Lwów 14 Września 1902 r.