wtedy $s_n(z)$ jest funkcyą analityczną w obszarze T dla każdej wartości całkowitej dodatniej liczby n. Jeżeli ta funkcya czyni nadto zadość warunkom twierdzenia I lub II-go, to te same wnioski utrzymują się i dla funkcyi

$$F(z) = \int_{a_0}^{a_1} \varphi(a, z)\, da\,,$$

jak poprzednio, dla funkcyi $F(z)$, określonej przez szereg.

PRZEGLĄD LITERATURY. BIBLIOGRAFIA.

Łukasz J. Bodaszewski. Teorya ruchu wody na zasadzie ruchu falowego. Część pierwsza. Z 76 figurami w tekście i 2 tablicami. We Lwowie, nakładem Towarzystwa dla popierania nauki polskiej, 1902, 8-o, str. 128.

Nie mielibyśmy do dziś dnia ani statków, pędzonych zapomocą śruby, ani kanałów i śluz, ani wodociągów, gdyby technicy byli czekali, aż nauka rozwiąże w sposób ścisły odpowiednie problematy hydromechaniki. Istotnie przeciwieństwo teoryi i praktyki nigdzie może nie jest tak wielkie jak w hydromechanice, gdzie teoretycy gubią się tak często w obliczeniach przykładów idaalnych, nie mających żadnego znaczenia praktycznego, a technicy, mając do czynienia ze zadaniami zupełnie innego rodzaju, radzić sobie muszą wzorami empirycznemi nieścisłemi, wskutek czego metoda, natrafiana w odnośnych podręcznikach, czasem więcej przypomina zbiór recept lekarskich lub przepisów kuchennych, aniżeli systematyczny wykład jakiejś umiejętności.

Oczywiście jest rzeczą bardzo pożądaną, ażeby ten rozłam, wielce niekorzystny dla stron obu, nie powiększał się, lecz, ile możności, wyrównywał: bo to już nie jest winą uczonych, lecz samej przyrody, iż

ruch cieczy odbywa się według praw, których badanie matematyczne nastręcza takie trudności; tylko w stosunkowo prostych przypadkach można mieć nadzieję prostego wyniku i ścisłe metody obliczenia tylko wyjątkowo dadzą się w praktyce stosować.

Ze strony teoryi zresztą w ostatnich czasach, mianowicie dzięki pracy licznych badaczy angielskich, dokonany został znaczny postęp, tak, że nie jedno zagadnienie z nautyki, o zjawiskach falowania i t. d. doczekało się wyjaśnienia.

Z drugiej strony godnem jest uznania każde usiłowanie wprowadzenia systematycznej naukowej metody badania do hydrotechniki; temu to zadaniu poświęcone jest niniejsze dzieło p. inżyniera Bodaszewskiego. Istotnie, większą część tej pracy możnaby polecić jako bardzo przystępnie ułożony wykład o tak zw. „potencyalnych“ ruchach cieczy z zastosowaniem do różnych zadań hydrotechniki, z których niejedno jeszcze nie było w ten sposób traktowane.

Podstawą jest przyjęcie „centrów repulsyjnych i atrakcyjnych“, t. j. miejsc, gdzie ciecz wpływa do danej przestrzeni lub z niej wycieka, powiedzmy krótko „źródeł“ i „odpływów“. Nazywając M objętość cieczy, wyciekającej przez taki otwór, otrzyma się z powodu symetryi kulistej dla prędkości pędu, powstającego w jakimś punkcie przestrzeni nieograniczonej, $v = \frac{M}{4\pi r^2}$.

Przyjmując cały układ podobnych centrów, otrzymamy, przez nałożenie (superpozycyę) prędkości składowych, ruch więcej skomplikowany, który—zależnie od sposobu ułożenia centrów—może stanowić rozwiązanie różnych problematów hydromechaniki, tak samo jak przyjmując pewien układ mas elektrycznych lub grawitacyjnych, otrzymać można dowolne pole elektryczne lub grawitacyjne.

Jest to metoda identyczna z teoryą tak zw. „sources and sinks“ (Quellen und Senken), stosowaną głównie przez angielskich teoretyków do różnych zagadnień ruchu potencyalnego (patrz np. Voigt: „Elementare Mechanik“ 1889, str. 348): Oddaje ona tylko pewne, co prawda, najważniejsze rodzaje ruchów cieczy idealnych, t. j. „potencyalne“, nie stosuje się jednak do ruchu wirowego i nie może oddawać zjawisk lepkości.

Tu chciałbym zaraz zrobić uwagę, że autor nigdzie nie wspomina, iż to jest teorya „wyidealizowana“ przez ominięcie tarcia we-

wnętrznego, i że nagina ją nawet do objaśnienia takich zjawisk, do których się nie nadaje, o czem dalej jeszcze pomówimy.

Przejdźmy do przeglądu treści.

Po wyłożeniu ogólnej zasady, autor ogranicza się w pierwszych dwunastu rozdziałach na rozpatrywaniu ruchów, zachodzących w cienkiej warstwie cieczy, więc na zadaniach dwuwymiarowych. Rozważa mianowicie działanie jednego, dwóch i trzech centrów w warstwie wody spokojnej lub też płynącej, stosując wyniki do działania pomp na wodę głębinową. (Czy tu tarcie nie odgrywa ważnej roli?) Bada kształt tachoidy, t.j. krzywej zakreślonej przez punkty, które pierwotnie leżały na prostej, i pokazuje wreszcie, że ściana stała tak działa, jak gdyby z drugiej strony tejże leżał obraz (image, Spiegelbild), t. j. drugie takie samo centrum działające.

W rozdziałach 13 i 14 przechodzi do badania powierzchni tachoidalnej i do działania dwóch centrów w przypadku trójwymiarowym.

W dalszym ciągu, w rozdziałach 15—20, 24—24, zajmuje się ruchem cieczy w łożysku wskutek działania centrów atrakcyjnych, strugami, zaporami, obniżeniem powierzchni w profilu poprzecznym i t. p.; w rozdziałach 21—23 i 27—przelewem i wypływem przez otwór na dnie naczynia, a końcowe rozdziały 26, 28, 29 poświęcone są ruchowi w łożysku wskutek działania centrów repulsyjnych i wskutek dwóch układów centrów, atrakcyjnego i ropulsyjnego.

Wykład jest jasny, zrozumiały dla każdego obznajmionego z elementami rachunku różniczkowego i całkowego; pouczające są starannie przeprowadzone dyskusye równań i przykładów i widoczny jest wszędzie wielki nakład samodzielnej pracy. Z drugiej strony jednak nie możemy pominąć kilku zasadniczych zarzutów.

Po pierwsze: sam tytuł wydaje mi się nieuzasadnionym. Czytając: „...na zasadzie ruchu falowego“, nie jeden pomyśli zapewne, że praca polega na rozkładaniu ruchów na szeregi Fourierowskie falowań peryodycznych, podobnie jak w teoryi przewodzenia ciepła. Ale nie, w całej pracy nie masz ani jednego $\sin at$, mowa tam tylko o prądzie stateczny niezmiennym.

Analogia z falą kulistą, wychodzącą z danego centrum, nie wydaje mi się wystarczającą, aby nazwę „fali“, której używamy powszechnie do określenia zjawiska peryodycznego, przenosić na prąd cieczy, wy-

pływającej z owego centrum. To byłoby zrezztą tylko kwestyą nomenklatury, gdyby ona istotnie nie była miejscami w błąd wprowadziła autora.

Tak na str. 82 i podobnie na str. 103—104 czytamy, że „przy uderzeniu fal o brzegi następuje częściowo strata siły żywej“, dalej „więc w łożyskach o brzegach miękkich, podatnych odbicie fal elementarnych będzie słabem, ciecz będzie płynąć powoli; w łożyskach o brzegach twardych, opornych, nastąpi silniejsze odbicie, ciecz będzie płynąć szybciej.“

Wszak utrata energii fali undulacyjnej, odbijającej się od ściany miękkiej, pochodzi stąd, że ruch peryodyczny udziela się częściowo ścianie; tu jednak, gdzie słowo „fala“ oznacza prąd stały, przecież o tem mowy być nie może.

Prawda, że np. po szutrowisku przy pewnym spadku woda powolniej płynie niż w łożysku betonowem, ale to pochodzi nie z odbijania fal o brzegi, tylko z utraty energii na wytworzenie ruchów wirowych i z przeważającego wpływu tarcia wewnętrznego cieczy w pierwszym przypadku, którego autor jednak wcale nie bierze w rachubę.

Wobec takich zjawisk właśnie okazuje się niedostateczność teoryi potencyalnej cieczy idealnych; ona ich nie może wytłómaczyć, tak samo jak nie wytłómaczy np. oporu kuli poruszającej się z jednostajną prędkością w cieczy idealnej albo praw ruchu cieczy w związkach Poiseuille'a. (Dziwne w obec tego wydają się uwagi o rurkach Poiseuille'a, str 73); nie można tego od niej wymagać i nie należy jej też w nieracyonalny sposób do tego naginać.

Zresztą, gdyby autor wyraźnie zaznaczył, że to jest tylko teorya przybliżona, nie możnaby jeszcze robić takiego zarzutu z pominięcia lepkości, w skutek którego musi się okazać niezgodność rzeczywistości z ową teoryą, szczególnie w przykładach, odnoszących się do ruchów w łożyskach i wązkich naczyniach, podczas gdy ruchy cieczy nieograniczonej, wypływy przez otwory i t. p. bardzo mało zostaną odmienione.

Wiele ważniejszym brakiem wydaje mi się wewnętrzna sprzeczność, występująca w niektórych zastosowaniach teoryi do ruchu cieczy ograniczonej przez ściany, mianowicie do ruchu wody w łożyskach.

Tak w rozdz. 15 autor, rozpatrując ruch cieczy w łożysku wskutek działania jednego centra, istnienia ścian początkowo wcale nie uwzględnia, potem co prawda wspomina, że wskutek odbicia prądu (czyli „fal“)

od obu brzegów taki ruch powstanie, jak gdyby istniały trzy centra, i na tej podstawie wykreśla on linie prądu (fig. 41),

Dodam jednak, że należy również uwzględnić wielokrotne „odbicia“, tak że powstanie nieskończony obustronny szereg centrów, podobnie jak w analogicznej teoryi „obrazów“ elektrycznych, i tylko w ten sposób można otrzymać rozwiązanie odnośnego zadania.

To samo odnosi się do rozdziałów 16—18, a zwłaszcza 24—26 i 29. Jaki jest skutek tego ominięcia?

Takiż rachunek autora wykazuje istnienie składowej prędkości prostopadłej do brzegu! Więc ciecz przepływa przez ścianę?

Autor nie spostrzega tej niedorzeczności; mówi, np. na str. 70, z zimną krwią, że „chyżość poprzeczna maleje od brzegów ku środkowi według prawa linii prostej“, i podobnie na str. 103, że „wskutek tej chyżości mogą być przedmioty, znajdujące się w wodzie przy brzegu uniesione na środek łożyska“.

Jedyny ale konieczny warunek, który musi być spełniony przy ścianach, jest właśnie ten: że prędkość cieczy musi mieć kierunek styczny, zatem składowa normalna tam musi być zero (dla cieczy lepkich także styczna składowa musiała być zerem). Można zatem albo przyjąć dowolny układ centrów i przez jakiekolwiek linie prądu powstającego przełożyć ścianę, albo też przyjąć dany kształt i położenie ścian, a uwzględnić wielokrotne „odbicia“. Przy równomiernym układzie centrów wzdłuż przekroju, jak w rozdz. 16, nie otrzyma się zresztą innego ruchu jak trywialny przykład równej wszędzie prędkości równoległej z brzegami, dopóki się pomija lepkość cieczy,

Nie wystarczające uwzględnienie ścian albo zupełne ich nieuwzględnienie (które nie zostanie poprawione mnożeniem przez czynnik $\frac{2\pi R^2}{f}$ str. 104), zmienia zatem zasadniczo nietylko wielkość, ale i rodzaj ruchu, i nie można żadnej wagi przypisać wynikom odnośnych rozdziałów, nawet, jeżeli niektóre z nich przypadkowo się zgadzają z doświadczeniem.

Z drugiej strony znów chciałbym z uznaniem podnieść rozdziały 21—23, dotyczące przelewu i wypływu przez otwór, w którym znajdujemy interesujące rozwiązanie odnośnych problematów, wprawdzie nie zupełnie ścisłe, ale dla praktyki zapewne wystarczające na podstawie

przyjęcia układów centrów elementarnych o wydatności, odpowiadającej prawu Torricelliego.

Trochę dziwne wrażenie robi „Bibliografia“ przy końcu tomu, gdzie, obok dzieł hydrotechnicznych, napotykamy Umlaufta: „Luftmeer“, Exnera: „Elektricität“, a nie znajdujemy Lamba klasycznego dzieła „Hydromechanics“ (przetłom. także na niemiecki, ani Wiena „Hydromechanik“, ani Kirchhoffa „Mechaniki“, ani choćby Winkelmanna „Handbuch d. Physik“ tom I.

Autor wogóle nie wspomina o istniejących już pracach o teoryi źródeł i wypływów. Zdaje się, że zupełnie samodzielnie doszedł do tej teoryi; inaczej, zapewne posługiwałby się więcej pojęciem potencyału, zamiast operować wprost składowemi prędkościami, coby nie jeden rachunek znacznie uprościło.

Oczekujemy z ciekawością drugiego tomu tej pracy, wykazującej w każdym razie dosyć dodatnich cech oryginalności i samodzielności, choć miejscami spaczonej wskutek wyżej zaznaczonych błędów zasadniczych.

Zewnętrzna forma dzieła jest bardzo staranna, tablice i większa część rysunków są wzorowo wykonane, poprawność druku bez zarzutu.

Wydawnictwo „Towarzystwa dla popierania nauki polskiej“, które będą wychodziły pod zbiorowym tytułem: „Archiwum naukowe“, dobrze się zapowiada. Oby przyczyniło się ono jaknajwięcej do wzbudzenia pracy naukowej w naszem społeczeństwie! *M. Smoluchowski.*

Z powodu recenzyi „Geometryi Rzutowej“ A. Lewenberga.

REPLIKA AUTORA.

W przedmiocie oceny mojej „Geometryi rzutowej tworów pierwiastkowych“, dokonanej przez prof. M. Łazarskiego, a umieszczonej w t. VI Wiad. Mat. (Zeszyt 4—5, str. 271 i nast.), pozwolę sobie poczynić niektóre uwagi, mające na celu odeprzeć niektóre z bardziej zasadniczych zarzutów, tam postawionych. Przedewszystkiem jednak poczuwam się do obowiązku podziękowania p. Referentowi za mozolną pracę i za poczynienie wielu słusznych uwag, z których radbym najrychlej módz skorzystać. W następujących czysto rzeczowych uwagach trzymać się będę porządku, zachowanego w ocenie, i oznaczać będę pierwszą liczbą w nawiasie stronicę „Wiad. Mat.“ t. VI-go, zaś druga liczba po średniku z dodanem *d* lub *g*, oznaczać będzie wiersz „od dołu“, lub wzgl. „od góry“ tejże stronicy; litery *R. G.* przed takiemiż liczbami oznaczają powołanie się na moją „Geometryę“.

---

1 Uzasadnienie prawa dwoistości. (270; 20*d.*)

Nie przecząc, że, być może, dla celów dydaktycznych, użyte uzasadnienie jest mniej przydatne, jako zbyt abstrakcyjne, — sądzę, iż taki wywód zasady dwoistości jest nie tylko ścisły, ale najbardziej odpowiada genezie pojęć geometrycznych. Nie jest on zapożyczony ani od Steinera, ani od Gergonne'a, a roszczę sobie do niego właśnie pretensye autorskie. Widocznie nie dość jeszcze jasno potrafiłem swą myśl wyłożyć, skoro zaszło zupełne niezrozumienie istoty uzasadnienia. Nie idzie bowiem zupełnie o jakąś mglistą „analogię", ani o to, że jednemu położeniu punktu „odpowiada" jedno tylko położenie płaszczyzny, lecz o to, że wspólnym, identycznym pierwiastkiem (elementem) obu ruchów (postępowego i obrotowego) okazuje się prosta" (*G. R.* 8 „Podstawowe pojęcia").

Jeśli tedy mamy twierdzenie o własnościach pewnej grupy ruchów postępowych i w niem występują proste, to w „analogicznem" ugrupowaniu ruchów obrotowych w tychże ustępach także proste występować będą. Zważywszy, że przedstawicielem ruchu postępowego w geometryi jest punkt, zaś przedstawicielką obrotowego—płaszczyzna, dochodzimy właśnie do wysłowiewienia prawa dwoistości w pierwotnej jego postaci, a wyrażającego tylko to, że jeśli „analogicznie" zbudujemy ugrupowanie punktów i ugrupowanie płaszczyzn, to prosta zjawi się w obu wypadkach: raz jako „najkrótsza" odległość dwóch punktów, raz jako „oś obrotu" dwóch płaszczyzn. Identyczność tych dwóch logicznie różnych postaci (najkr. odl. i oś obrotu) stanowi nieprzywiedlny, a empirycznie stwierdzony pewnik geometryczny i nie jest wcale logicznym skutkiem jakiejbądź definicyi. Szersze rozwinięcie tego przedmiotu miało nastąpić w Artykule przypiskowym II, o którym wspominam w dopisku str. VIII Przedmowy do *G. R.*, a rozwinięcie to stanowiłoby zarazem nowe zupełnie oświetlenie podstaw geometryj „nieeuklidesowych", w których właśnie ta identyczność nie jest założoną. Potrącam jednak powtórnie o ten przedmiot (*G. R* 174; 16*g*) i wyraźnie swą myśl wypowiadam w ustępie, rozpoczynającym się od słów: „Forma geometryczna (linia) i t. d.". Zasada dwoistości sprawdza się dla tego powodu i w tych razach, gdy mamy do czynienia z nierzutowo pokrewnemi układami, złożonemi raz z n punktów, raz z n płaszczyzn przestrzeni; ilość prostych w obu układach jest zawsze ta sama, a rozmieszczenie ich jest dwoiście analogiczne, choćby nawet one nie były w żadnym stosunku rzutowym. Dostateczną jest arytmetyczna równość ilości pierwiastków: punkt i płaszczyzna (w przestrzeni). lub punkt i prosta (w płaszczyźnie). Wszak np. twierdzenia o liczbie i rozmieszczeniu prostych, wyznaczonych przez n punktów płaszczyzny (z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej) daje się dosłownie „dwoiście" przetłómaczyć dla liczby n punktów, wyznaczonych przez n prostych płaszczyzny (z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt), pomimo, że n-kąt pierwszy wcale nie musi być rzutowo-pokrewnym n-bokowi w drugim wypadku! To samo też twierdziłem w dopisku str. 349 (*G. R.*), mówiąc tylko o biegunowo pokrewnych postaciach, że muszą być „rzutowo-pokrewne". Oczywiście, że

urywek całego rozumowania, przytoczony w ocenie, nie wystarcza do uzasadnienia „dwoistości“, lecz w samej książce następuje on bezpośrednio po ustępie, w którym cały nacisk położony jest na wspólne występowanie prostej w obu zasadniczych ruchach, a przez to cała sprawa przybiera, sądzę, zupełnie inne zabarwienie, zaś wobec tego sposób widzenia Poncelet a zdaje się być mniej racyonalnym i mniej ogólnym, niż zapatrywania Gergonne'a.

2. Określenie rzutowego pokrewieństwa (272; 9*d.*)

Jedynem ścisłem i zupełnem określeniem, czysto geometrycznem, rzutowego pokrewieństwa jest właśnie podane tłustym drukiem w końcu rozdz. III (*G. R.* 43). Okoliczność, że wówczas każdemu pierwiastkowi (elementowi) jednego tworu przydzielonym jest jeden, tylko i zawsze, pierwiastek drugiego, wynika z istoty perspektywicznego działania. Czytamy (273; 1*g*) w ocenie:

„Nie znam czysto geometrycznego ogólnego sposobu, za pomocą którego możnaby udowodnić, że „dwa utwory rzędu pierwszego są jednokreślne (rzut. pokr.), jeżeli każdemu elementowi jednego utworu odpowiada tylko jeden element w utworze drugim“.

Przyznam, że ja prócz tego nie znam i sposobu nawet nieczysto-analitycznego udowodnienia tegoż twierdzenia, a przypuszczam też, że każdy musi być w tem samem położeniu, bo nie można przytoczonego twierdzenia dowieść ani geometrycznie, ani analitycznie, po prostu dla tego, że niewystarcza zachowany warunek, by „każdemu elementowi jednego utworu odpowiadał tylko jeden element w drugim“ dla stwierdzenia istnienia rzutowego pokrewieństwa. Samo „przydzielenie“ (koordynacya) każdemu pierwiastkowi jednego tworu jednego pierwiastka drugiego nie mieści w sobie jeszcze nic, coby orzekało o prawie, podług którego to przydzielanie ma nastąpić, żeby pomiędzy obu tworami zachodził pewien określony stosunek. Możemy sobie z łatwością wyobrazić np. dwa twory proste (szeregi punktów na dwóch prostych), w których każdemu punktowi jednego przydzielonym jest tylko jeden punkt drugiego i to w ten sposób, że wyczerpaną zostaje cała mnogość punktów obu prostych *a* i *b* bez pominięcia. ani powtórzenia żadnego, a które mimo to wcale nie będą rzutowo pokrewne; wystarczy dla zniszczenia, zepsucia już istniejącego rzutowego pokrewieństwa zmienić jakąkolwiek czwartą parę odpowiednich punktów dwóch rzutow.-pokr. tworów prostych (jednokreślnych szeregów) i np. zamiast czterech par $A_1 \bigvee B_1$, $A_2 \bigvee B_2$. $A_3 \bigvee B_3$, $A_4 \bigvee B_4$ przydzielić jako „odpowiednie“ cztery pary $A_1 \bigvee B_1$, $A_2 \bigvee B_2$, $A_3 \bigvee B_3$ i $A_4 \bigvee B_n$ pierwiastków, a już dwa szeregi $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$... i $B_1 B_2 B_3 B_n B_5$... nie będą rzutowo pokr., jeśli pierwotne: $A_1 A_2 A_3 A_4$.. i $B_1 B_2 B_3 B_4$... niemi były.

Dla wyrażenia w sposób analityczny stosunku, jaki zachodzi pomiędzy pierwiastkami dwóch rzutowo pokrewnych tworów pierwszego szczebla (rzędu pierwszego) nie można postąpić inaczej. jak zakładając coś więcej jeszcze po nad ogólnikowe jednoznaczne przydzielanie (koordynacyę): zwykle też wychodzi się z założenia, że prawo tego stosunku pomiędzy pierwiastkami obu two-

rów jest wyrażalne funkcyą algebraiczną, która np. dla dwóch tworów prostych (szeregów) przyjmie postać:

$$f(x_a x_b) \equiv x_a x_b + \alpha x_a + \beta x_b + \gamma = 0,$$

w której x_a oznacza spółrzędną, czyli odległość, punktu A na prostej a od dowolnego punktu zerowego 0, x_b oznacza takąż spółrzędną dla odpowiedniego punktu B na prostej b, zaś α, β, γ oznaczają ilości stałe (*G. R* 23: 12*d.*).

Odpowiednie przekształcenie równania powyższego pozwala doprowadzić je do postaci, w której widzimy, że geometryczne jego znaczenie wyraża właśnie rzutowe pokrewieństwo, z charakterystyczną własnością równości odpowiednio utworzonych dwustosunków (stosunków podwójnego podziału) czterech par odpowiednich pierwiastków (punktów) i wszystkiemi stąd wypływającemi skutkami. To samo zaś co czyni analityk, zakładając powyższe równanie, czyli wybierając ze wszelkich możliwych jednoznacznych przydzielań to, które daje się wyrazić funkcyą algebraiczną, to samo czyni geometra, zakładając, iż pomiędzy obu tworami zachedzi taka zależność, która wynika z możliwości przekształcenia jednego tworu w drugi twór za pomocą szeregu perspektywicznych działań. Z takiego czysto geometrycznego a koniecznego założenia też wyszedłem, a sądzę że właśnie udało mi się pierwszemu dowieść czysto geometrycznie i ogólnie, że trzy pary odpowiednich pierwiastków wyznaczają jednokreślność [1]. Dowodzę mianowicie, że trzy wichrowate (skośne) proste a, b, c przestrzeni, uważane za dźwigary (podstawy) bądź trzech tworów prostych (szeregów), bądź—trzech wiązek (pęków) płaszczyzn,—wyznaczają zawsze taki szczególny między niemi stosunek, że którąkolwiek z nich uważać będziemy za dźwigar różnogatunkowego, względem pozostałych dwóch prostych, tworu, zawsze otrzymamy te same perspektywiczne do siebie przydzielone pary odpowiednich pierwiastków. że gdy np. weźmiemy wiązkę (pęk) płaszczyzn z osią c, otrzymamy jako przebicie tej wiązki przez proste a i b dwa pesp. pokrewne twory proste (szeregi $\overset{\cdots}{a}$ i $\overset{\cdots}{b}$ (symbolicznie $\overset{\cdots}{a} \underset{\vee}{\wedge} \overset{\cdots}{b}$), które zarazem będą identyczne z szeregami punktów, otrzymanemi przez prowadzenie poprzecznych do trzech skośnych prostych a, b i c, a które to poprzeczne wyznaczają jednocześnie i na prostej c twór prosty $\overset{\cdots}{c}$. Szereg ten ostatni $\overset{\cdots}{c}$ jest znów persp. pokrewny z $\overset{\cdots}{a}$ i $\overset{\cdots}{b}$, bo biorąc znów np. b za oś nowej wiązki płaszczyzn i rzucając z niej (szereg) $\overset{\cdots}{a}$, otrzymamy na c szereg punktów identyczny z poprzednim, bo zarazem wyznaczony przez te same poprzeczne do trzech skośnych prostych a, b, c. Mamy zatem w symb. pisowni (w której $\underset{\vee}{\wedge}$ oznacza persp. pokrewieństwo): $\overset{\cdots}{a} \underset{\vee}{\wedge} \overset{\cdots}{b}$, $\overset{\cdots}{a} \underset{\vee}{\wedge} \overset{\cdots}{c}$ i tak samo $\overset{\cdots}{b} \underset{\vee}{\wedge} \overset{\cdots}{c}$, a

[1]) Twierdzenie to rzeczywiście niesłusznie nazwałem „tw. v. Staudt'a“ wskutek zbytniej wiary „in verba magistri“ (prof. A. Becka), który tak je nazywał.

stąd zamknięty łańcuch perspektywicznych stosunków: $a \overset{\cdots}{\underset{\vee}{\perp}} b \overset{\cdots}{\underset{\vee}{\perp}} c \overset{\cdots}{\underset{\vee}{\perp}} a$. Wynik z tego wszystkiego i z dalszych w książce rozpatrywań, że jeśli dowolnie obierzemy na dwóch skośnych prostych trzy pary przydzielonych sobie, t. j. odpowiadających sobie, pierwiastków, to możemy zawsze i w jeden tylko sposób ustalić między nimi taki stosunek, by trzy te pary (punktów, lub płaszczyzn) były w perspektywicznym stosunku, przez co będą wyznaczone i wszystkie pozostałe pary. I tutaj więc, jak wreszcie w całej książce, twierdzę o dwóch tworach (utworach), że są rzutowo pokrewne ($\perp\!\!\!\perp$) tylko wówczas, gdy można je połączyć łańcuchem perspektywicznych ogniw (np. *G. R.* 166, przypisek i t. d.). Że powyższe dowodzenie na razie stosuje się tylko do położenia wichrowatego (skośnego) trzech prostych, — nie zmniejsza wcale jego ogólności, bo wszak później szczegółowo wskazano, jak każdy wypadek można do tego zasadniczego sprowadzić. Przyznaję jednak, że cały ustęp (*G. R.* 46), zatytułowany „Zasadnicze własności rzutowego pokrewieństwa" należałowy przerobić, a zwłaszcza zastąpić w nim wszędzie nieścisłe tam wyrażenie „rzutowe pokrewieństwo" przez „perspektywiczne", a powiedzenie (*G. R.* 46; 13*d*):

„Rozpatrując prostą a jako dźwigar tworu prostego ($A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$), otrzymamy na każdej, z rozpatrywanych jako dźwigary, pozostałych b i c twory proste $B_1, B_2, \ldots B_n \ldots$ i $C_1, C_2, \ldots, C_n \ldots$, będące w rzutowem pokrewieństwie z tworem prostych a, gdyż do każdego punktu jednego tw. znaleść można jeden i tylko jeden odpowiedni w drugim".

powinno brzmieć:

„Rozpatrując prostą a . . . . . i t. d. „$B_1, B_1, \ldots, B_n$ i $C_1, C_1, \ldots, C_n \ldots$ będące w perspektywicznem pokrewieństwie z tw. prostym a, wskutek czego do każdego . . . . . i t. d.

Ponieważ jednak na następnych stronicach tylokrotnie to właśnie znaczenie jest omawiane (zwłaszcza *G. R.* 52 i 53 ustęp petitowy), więc uważny czytelnik nie potrzebuje nawet być domyślnym i nie powinien ani przez chwilę mieć wątpliwości, lecz zrozumie odrazu, iż mowa tu zawsze o zależności perspektywicznej, jak to wreszcie wyraźnie zaznaczono w przytoczonym w ocenie ustępie końcowym (*G. R.* 49; 7*d*).

3. Pobieżne zajęcie się elementami podwójnemi (273; 3*d*).

Na swe usprawiedliwienie mogę to powiedzieć, że bardzo często w matematyce trzeba się stosować do rady d'Alembert'a: „Messleurs! allez en avant, la foi vous viendra!".

4. Twierdzenie 1 rozdz. VI (274; 4*g*).

Nie miałem wcale zamiaru udowodnić, że można zawsze z dowolnego punktu przeprowadzić dwie styczne do krzywej, wytworzonej przez dwa rzut. pokr. twory proste (szeregi), a dowodzę tylko, że najwyżej dwie takie styczne istnieją. W dopisku str. 108, *G. R.* odsyłam wyraźnie co do wypadku urojoności obu stycznych do rozdz. XI. Chcąc stosować wprowadzone później

(*G. R.* 124) określenie „klasy" krzywej płaskiej do stożkowych, ta wiadomość jest mi tylko potrzebną, że więcej niż dwie styczne z dowolnego punktu do stożkowej istnieć nie mogą.

5. Inwolucya „paraboliczna" (275; 17*g*).

Pomimo przytoczonych w ocenie argumentów, nie widzę, by inwolucya „paraboliczna" mogła istnieć, nie mówiąc już o tem, że tegoż zdania są i Staudt[1]) i Reye[2]) i Cremona. Ostatni z wymienionych geometrów nawet wyraźnie zazuacza[3]), że w wypadku, gdy cecha inwolucyi jest równą zeru, to „nie ma już właściwej inwolucyi". Przypuszczam też, że zachodzi tylko nieporozumienie co do pojęcia ścisłego inwolucyi, że jest to zatem tylko spór o wyrazy, a nie o istotną treść, co do której chyba nie może istnieć różnica poglądów. Bez zaprzeczenia wypadek, w którym analityczna cecha inwolucyi równą jest zeru, stanowi stan pośredni pomiędzy inwolucyą hyperboliczną a eliptyczną, lecz inwolucyą już nie jest, gdyż od tej ostatniej wymagamy wszak koniecznie, by każdy pierwiastek wspólnego dźwigaru (tła) mógł być rozważanym bądź za element jednego, bądź drugiego, z obu rzutowopokrewnych tworów; nadto inwolucya jest tylko szczególnem położeniem względnem obu tych tworów (*G. R.* 330; 15*g*. i 357; 1*g*) i powinna istnieć zawsze możność rozszczepienia tworu inwolucyjnego na dwa zwykłe rzutowo-pokrewne, lub perspektywiczne. Tych zasadniczych własności nie ma wcale, gdy analityczna cecha inwolucyi = 0, bo wszystkim punktom np. jednego inwolucyjnego tworu prostego (szeregu) odpowiada nie szereg drugich, lecz jeden stały punkt (szeregowi odpowiada punkt ∞^1-krotny), a owemu punktowi stałemu, rozważanemu jako pojedyńczy punkt tegoż szeregu odpowiada znów ∞ wiele punktów drugiego (punktowi odpowiada szereg), czyli nie można wskutek tego uważać każdego punktu prostej za należący do jednego, lub do drugiego tworu, nie zrzekając się jednocześnie „jednokreślności", ani też nie można rozszczepić inwolucyjnego („parabolicznie") tworu na dwa zwykłe rzutowo-pokrewne. Jeśli zatem rozumieć przez inwolucyę szczególne położenie dwóch jednorodnych rzutowo-pokrewnych tworów, w którem zachodzi zamienne „odpowiadanie sobie" pierwiastków w każdej parze odpowiedniej, to w danym razie o inwolucyi chyba istotnie nie może być mowy.

Nie ma tu jednak żadnego „skoku" tak dobrze, jak niema go w następującym prostym przykładzie:

Dwa punkty wyznaczają jednoznacznie prostą; rozważania geometryczne doprowadzają do wniosku, że i para sprzężenych urojonych punktów wyznacza prostą jednoznacznie. Oba punkty mogą być nawet dowolnie blizkie sobie. Nie upoważnia to jednak wcale do twierdzenia, że i dwa, zlane w jeden, punkty (dokładnie nakrywające się) wyznaczają jednoznacznie

[1]) Geom. d. Lage I. str. 216.
[2]) G. d Lage I, str. 143, wiersz 6 i następne u góry.
[1]) Elementi di Geometria projettiva № 96.

prostą, bo jej nie wyznaczają, a prostych pochodzących przez taki podwójny punkt jest ∞^2 (snop promieni). I tutaj na upartego, lecz niesłusznie, można by mówić o „skoku", bo wypadek, w którym odległość obu punktów jest ściśle = 0, różni się rażąco od wszelkich innych, w których taż odległość byłaby jakąkolwiek, choćby dowolnie małą, i który tu wypadek również stanowi stan przejściowy między „rzeczywistością" a „urojonością" pary punktów.

6. Terminologja (wyrazownictwo) 276; 11*g*.

Zarzuty, tyczące się „wyrazownictwa", nadają się może najmniej do rzeczowej dyskusyi,—jako zbyt podmiotowe.—a o przyjęciu się, lub nie, jakiegoś nowego wyrazu decyduje życie, przyszłość i same z siebie przeważnie giną te, które są albo niepotrzebne, albo źle utworzone. Pozwolę sobie w tej sprawie zaznaczyć co następuje:

1) „Wyrazownictwo": termin powszechnie w Warszawie używany, obok „słownictwa". Pierwsze, — o ile czuję, - odnosi się bardziej do tworzenia wyrazów. — drugie zaś do wyjaśnienia lub tłómaczenia już istniejących.

2) „Przywieranie", jest to wyraz poprostu krótszy od „ścisłe stykanie się".

3) „Niedobieżna" — wyraża etymologicznie prawie dosłownie to samo, co asymptota, który to wyraz też niemiecki w swem brzmieniu nic, coby wskazywało na styczność w punktach zaniku (leżących w nieskończoności).

4) „Cięciwna" – może być pożyteczną obok „siecznej" wówczas, gdy chcemy wyrazić kontrast działań „łączenia" i „przecinania"; cięciwna odnosi się do pierwszego, sieczna zaś do drugiego.

5) „Leżenie w sobie" nie da się zastąpić żadnem, z proponowanych w ocenie, omówieniem, bo jeśli promień wiązki (pęka) przechodzi przez odpowiadający mu punkt tworu prostego (szeregu). lub takiż promień zlewa się ze swym odpowiednim drugiej wiązki, to w obu razach mamy do czynienia z „leżeniem w sobie" odpowiednich pierwiastków (elementów), a nie o wspólnej podstawie" ani „osi", ani „wierzchołku" nie możemy tutaj mówić (*G.R.* 60: 4*d*).

6) Spór między „wiązką" i „pękiem" uważam też za nierozstrzygnięty dotąd.

Z kolei zwrócę się do zarzutów, wynikłych z prostego niedopatrzenia się przez oceniającego właściwej postaci wyrazu, i tak: „dwuwtórność" przeczytaną została mylnie „dwu twórność" i stąd wysnuto jej „potworność". Zdaje mi się, że „wynalazek" p. Ziembińskiego wcale dobrze wyraża właśnie to, co w inwolucyi zachodzi, t.j. podwójne wtórowanie, wtórzenie sobie pierwiastków każdej pary sprzężonej (*G. R.* 325; 6*g*). Również używam „dla uwypuklenia" a nie „wypuklenia" i na domiar nie roszczę sobie żadnych praw ojcowstwa wobec tego wyrażenia, bardzo często używanego u nas dla zaznaczenia, że się coś „wypukla", bardziej wyraziście przedstawić pragnie, dla uczynienia jednem słowem tego, co francuz określa przez „donner du relief".

Inna wreszcie sprawa z prostemi błędami językowemi, lub omyłkami i żałuję szczerze, że nie znalazłem w ocenie wskazanych stron, na których się

zdarzyły niewątpliwie dla tego, że absolutnie żadnej pomocy przy korekcie nie miałem, więc o przeoczenie czegoś w tych warunkach bardzo łatwo. Np. „rozumieć pod tem“ jest tak rażącym błędem, że mnie ciarki przeszły, gdym przeczytał, iż coś podobnego napisać mogłem, choć nie wątpię, że tak się gdzieś stało. Nie znalazłem też zdania, w którem użyłbym terminu „punkt w punkcie“; natomiast często dość używam zwrotu „punkt w punkt“, lub „pierwiastek w pierwiastek“ (*G. R.* 196, 14*g*, lub 294, 6*d*), tak samo jak się mówi „jota w jotę“, lub „kropka w kropkę“.

Na zakończenie jeszcze odnośnie zarzutu zbyt wielkiej liczby wprowadzonych symbolów i rady, by liczbę tę zmniejszyć w następnem wydaniu przynajmniej trzykrotnie, to zaznaczam, że życzeniu temu stało się zadość już w pierwszem wydaniu, bo w ogóle użyłem 34 symbolów (*G. R.* 404), a nie, jak się przy ocenie wyliczyło – 68, a potem wśród tych 34 jest tylko 20 istotnie nowych (odwiecznych, jak znaki: •, —, ∢, =, ≡ i t. p. chyba liczyć nie podobna), czyli nawet mniej niż jedna trzecia część liczby 68.

Alfons Lewenberg, Inż. mech.

Warszawa, 4 sierpnia 1902.

Odpowiedź Recenzenta.

1. Uzasadnienie biegunowej dwoistości.

Pomimo, że uważnie przeczytałem ustęp o uzasadnieniu prawa dwoistości, nie mogę się zgodzić ze sposobem rozumowania autora Geom. rzut.; a może nie rozumiem tego, co autor chce wypowiedzieć.

Na pierwszej stronie repliki czytamy: „Szersze rozwinięcie tego przedmiotu miało nastąpić w artykule przypiskowym II, o którym wspominam w dopisku str. VIII i t. d.“

Szkoda, że Szan. autor G. rzut. tego nie uczynił, albo przynajmniej dodatkowo gdzieindziej swych poglądów na sprawę biegunowej dwoistości obszernie nie wyłuszczył; może wtedy replika i odpowiedź byłyby zbyteczne.

Wracam do rzeczy.

Z twierdzenia, że wspólnym identycznym pierwiastkiem ruchu postępowego punktu i ruchu obrotowego płaszczyzny jest prosta, jakoteż z dalszych wywodów pana L. o ruchach postępowych, w których występują proste i o analogicznem uzupełnieniu ruchów obrotowych, w których również proste występują i t. d., nie wynika wcale prawo dwoistości.

Dajmy na to, że krzywą wichrowatą c rzędu n-tego, t. j. taką krzywą, którą dowolna płaszczyzna przecina w n punkach, opisuje punkt, zajmujący kolejno położenia 1. 2, 3, . . . ; natenczas punktowi 1 odpowiada w układzie drugim płaszczyzna P_1, punktowi 2 odpowiada płaszczyzna P_2 i t. d. Prostej 1 2 odpowiada prosta l, podług której płaszczyzny P_1 i P_2 przecinają się. Krzywej c odpowiada tedy powierzchnia rozwijalna Π, której płaszczyznami stycznemi są płaszczyzny P_1. P_2, . . . , a tworzącemi jej są proste l,...; powierzchni rozwijalnej, której two-

rzącemi są styczne 12, 23,... ; krzywej odpowiada powierzchnia rozwijalna o tworzących l...., a płaszczyznom ściśle stycznym 1 2 3 ..... odpowiada krzywa zwrotna powierzchni Π. Krzywą c przecina dowolna płaszczyzna P w n punktach, z punktu p tedy, który odpowiada płaszczyznie P można do powierzchni Π n płaszczyzn stycznych poprowadzić i t. d., i t. d. Punktom 1, 2... odpowiadają analogicznie płaszczyzny P_1. P_2,.... Gdzież jednak szukać łącznika—pośrednika tej analogii. Zapytuję, czy analogia wyraża związek między pierwiastkami geometrycznemi. Nie! A zatem żadną miarą na wywód prawa biegunowej dwoistości, podany w replice, jako też i w dziele pana L., zgodzić się nie mogę.

2. Określenie rzutowego pokrewieństwa.

Pan autor *G. R.* ubolewa w tym ustępie, że ani on, ani żaden matematyk nie udowodni twierdzenia: „Dwa utwory rzędu pierwszego są jednokreślne, jeżeli każdemu elementowi jednego utworu odpowiada tylko jeden element w utworze drugim".

Otóż twierdzenie, dopiero co wypowiedziane, można np. dla dwu szeregów uzasadnić w sposób następujący: Niech będą dane dwa szeregi A... i A_1... w ten sposób z sobą związane, że jednemu punktowi pierwszego szeregu odpowiada tylko jeden punkt w szeregu drugim; natenczas otrzymamy równanie:

1) $AC \cdot A_1 C_1 + mAC + nA_1C_1 = 0$, ważne dla każdej parzy odpowiednich punktów danych szeregów.

Przyjmijwy trzecią parę odpowiednich punktów B i B_1, to bez względu na wzajemne położenie elementów A, B i C tudzież A_1, B_1, C_1 zachodzą związki:

$$AB + BC = AC,$$

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1,$$

Podstawiając te wartości w równaniu (1), otrzymamy:

$$BC \cdot B_1C_1 + (m + A_1B_1)\, BC + (n + AB)\, B_1C_1 + AB \cdot A_1B_1 + mAB + nA_1B_1 = 0 .$$

Suma trzech ostatnich wyrazów tego równania jest równa zeru, albowiem A i A_1 B i B_1 są elementami danych szeregów. A zatem:

(1) $$BC \cdot B_1C_1 + (m + A_1B_1)\, BC + (n + AB)\, B_1C_1 = 0 .$$

Z równania (1) wynika:

$$AC = -\frac{n \cdot A_1C_1}{m + A_1C_1};$$

a z równania (2) wynika:

$$BC = -\frac{(n + AB)\, B_1C_1}{m + A_1C_1},$$

a przeto:

(3) $$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} \cdot \frac{n}{n + AB} .$$

Przyjmując zamiast punktu C i C_1 punkty D i D_1, otrzymamy takim sposobem jak poprzednio:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{A_1D_1}{B_1D_1} \cdot \frac{n}{n+AB} \cdot \tag{4}$$

a dzieląc (3) przez (4), otrzymamy dwa stosunki podwójnego podziału:

$$(A\ B\ C\ D) = (A_1\ B_1\ C_1\ D_1), \text{ równe;}$$

szeregi tedy AB..... i A_1B_1..... są jednokreślne.

Twierdzenie, które autor Geom. Rzut. twierdzeniem Staudta nazywa, można geometrycznie bez pomoey prostych wichrowatych uzasadnić, a to zarówno dla szeregów, pęków prostych i pęków płaszczyzn, jakoteż i dla utworów różnorodnych pierwszego rzędu, o czem każdy podręcznik geometryi rzutowej wspomina; a to przez wprowadzenie tych utworów do położenia perspektywicznego—oczywiście, jeżeli trzy pary odpowiednich elementów tych utworów są dane.

W końcu zamierza autor dowieść niemożebności przytoczonego na czele 2-go rozdziału twierdzenia, mówiąc, że jeżeli w ezterech parach odpowiednich elementów $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$, których stosunki podwójnego podziału są równe, zmienimy w jednej czwórce, np. w $(A_1B_1C_1D_1)$ punkty C_1 i D_1, tak, że punktowi C odpowiadać będzie D odpowiadać będzie punkt C_1. natenczas stosunki podwójnego podziału $(ABCD)$ i $(A_1B_1D_1C_1)$ nie będą równe.

Rzecz ogólnie znana; przez zmianę bowiem elementów w czwórce, której odpowiada pewien stosunek podwójnego podziału „k“ zmieniają się sześciokrotnie wartości stosunku podwójnego podziału:

$$k,\ \frac{1}{k},\ 1-k,\ \frac{1}{1-k},\ \frac{k}{k-1},\ \frac{k-1}{k},$$

o czem z każdej elementarnej geometryi dowiedzieć się można *).

3. Za zasadę d'Alembert'a: „Messieurs! allez en avant.....“ należy postępować tylko wówczas, jeżeli środki. któremi rozporządzamy, nie wystarczają nam do dokładaego rozjaśnienia przedmiotu. Z tą sprawą łączy się bezpośrednio twierdzenie (1) rozdziału VI, o którem to twierdzeniu mowa w replice pod l. 4.

5. O inwolucyi parabolicznej.

Pomimo wywodów autora *G. Rz.* nie mogę się zgodzić na to, aby pojęcie nwolucyi parabolicznej mogło być z geometryi wyrzucone—raz, że pominięcie

---

*) Gdyby szanowny autor Geom. rzut. czytał rozprawy: Chasles'a w „Comptes rendus“, Emila Weyra w „Rozprawaeh czeskiej Akademii umiejętności; prof. Peschki II tom dzieła „Geometrya wykreślna i rzutowa“, a w końcu moją skromną rozprawę: „O krzywych rzędu czwartego z punktem potrójnym“ r. 1886 (Akad. umiej.), byłby sobie i podpisanemu oszczędził niepotrzebnej pracy.

tej inwolueyi sprzeciwiałoby się najwyższemu prawu geometrycznemu – ciągłości, a powtóre, musielibyśmy się rozstać z punktami parabolicznemi na powierzchniach, które stanowią granicę między punktami eliptycznemi i hyperbolicznemi (pierścień kołowy i t. d.).

W daiszym ciągu swoich wywodów powiada p, L., że dwoma punktami rzeczywistemi albo urojonemi sprzężonemi wyznaczone jest położenie prostej, skoro jednak odległość tych punktów będzie równa zeru, natenczas punkt, w którym się oba punkty wyznaczające prostą schodzą, stanowi stan przejściowy między rzeczywistością a urojonością pary punktów. Otóż od punktów sprzężonych urojonych do granicy między punktami urojonemi i punktami rzeczywistemi inaczej dojść nie mogę, jak tylko przez zmianę inwolucyi eliptycznej na paraboliczną.

6. Terminologia. Na samym wstępie zaznaczam, że rzeczywiście pomyliłem się, czytając w dziale „dwótwórność", gdyż powinienbym przeczytać „dwuwtórność"; atoli i tego wyrazu nie mógłbym używać, gdyż „inwolucya" jest wyrazem ogólnie przyjętym.

„Niedobieżna" wyraża etymologicznie prawie dosłownie to samo, co „asymptota", który to wyraz też niemiecki..." Szan. autor pomylił się widocznie, określając asymptotę jako wyraz pochodzenia niemieckiego, gdyż „asymptota" jest wyrazem ukutym z greckiego „ἀ-συν-πίπτω".

O dalszych—zdaniem mojem—usterkach językowych i stylistycznych mówić nie będę, gdyż nie mam obecnie czasu, aby dzieło pana L. poraz trzeci dokładnie odczytywał: zwłaszcza, że cały prawie mój czas wolny od zajęć urzędowych poświęcam wydawnictwu mego dzieła: „Geometrya wykreślna".

Dr. Mieczysław Łazarski.

We Lwowie dnia 1 grudnia 1902 r.

Opuścił prasę tom XIII Prac matematyczno-fizycznych, zawierający następujące artykuły: A. Denizot, O pewnem zagadnieniu Eulera o wahadle. J. Zawidzki. Studya doświadczalne nad prężnością i składem podwójnych micszanin cieczy. K. Żorawski, O własnościach pewnej całk wielokrotnej, będącej uogólnieniem dwóch twierdzeń z teoryi wirów. G. A. Miller. O izomorfizmach grupy abelowej (po angielsku). A. Przeborski, Niektóre zastosowania teoryi kongruencyj liniowych. – Korespondencya Kochańskiego i Leibniza, według odpisów Dr. E. Bodemanna z oryginałów, znajdujących się w Bibliotece królewskiej w Hanowerze, po raz pierwszy do druku podana przez S. Dicksteina (ciąg dalszy i dokończenie- R. Merecki, Obserwacye mikrometryczne mgławic. Część I. M. P. Rudzki O prawie rozkładu temperatury wewnątrz ciała niebieskiego gazowego. Ł. E. Böttcher, Zasady rachunku iteracyjnego. Część III (dokończenie). S. Dickstein, T. Estreicher, R. Merecki, M. P. Rudzki. Sprawozdania z piśmiennictwa polskiego w dziedzinie nauk matematyczno-fizycznych za rok 1899 (dokończenie).

Dzieł i rozpraw matematyczno-fizycznych. wydawanych przez A. Czajewicza i S. Dicksteina wyszedł tom VII p. t. „Geometrya wykreślna“ opracował Dr. M. Feldblum. Warszawa 1902, 8⁰, str. 317. Treść tej książki jest następująca: Przedmowa; Wstęp; Rozdział I, Wiadomości z geometryi rzutowej: 1. Teorya rzutu środkowego; 2. Zarys teoryi stożkowych; 3. Własności rzutu równoległego; 4, Kolineacya figur na płaszczyznie. Rozdział II. Punkt, prosta i płaszczyzna: 1. Wyznaczanie położenia punktu, prostej i płaszczyzny; 2. Położenie wzajemne punktów, prostych i płaszczyzn; proste i płaszczyzny wzajemnie równoległe. 3. Mierzenie odległości i kątów; proste i płaszczyzny wzajemnie prostopadłe. Rozdział III. Wielościany: 1. Wyznaczanie wielościanu przez rzuty; 2. Przekroje płaskie wielościanów. ich przecinanie się wzajemne; 3. Cienie wielościanów. Rozdział IV. Linie krzywe: 1. Krzywe płaskie: 2. Krzywe skośne. Rozdział V. Powierzchnie walcowe i stożkowe. 1. O powierzchniach w ogólności; 2. Wyznaczanie powierzchni walcowych i stożkowych: 3. Przekroje powierzchni walcowych i stożkowych płaszczyznami; 4, Przecinanie się wzajemne powierzchni walcowych i stożkowych; cienie, rzucane przez jedne z nich na drugie. Rozdział VI. Powierzchnie obrotowe: 1. O powierzchniach obrotowych w ogólności; 2. Powierzchnie obrotowe szczególne. Rozdział VII. Powierzchnie śrubowe i inne: 1. O powierzchniach prostoliniowych w ogólności; 2. O powierzchniach śrubowych w ogólności. 3. O powierzchniach śrubowych prostoliniowych; 4. O śrubach; 5. Powierzchnie w rzucie topograficznym. Rozdział VIII. Teorya perspektywy: 1. Pojęcia zasadnicze; 2. Wykreślenia zasadnicze; 3. Przykłady zastosowań teoryi perspektywy. Rozdział IX. Aksonometrya. 1. Pojęcia zasadnicze; 2. Wykreślenia aksonometryczne. Rozdział X. Teorya oświetlenia powierzchni. 1. Zasady teoryi oświetlenia powierzchni; 2. Zastosowania. — Wykaz alfabetyczny terminów.

G. Tołwiński. O zaćmieniach słońca i księżyca. Wydawnictwo M. Arcta p. t. „Książki dla wszystkich“. Warszawa 1902. 16-o. str. 47.

C. F. Chambers. Opowiadanie o gwiazdach, przełożyła z angielskiego M. Brońska, Warszawa 1902, Wydawnictwo „Poradnika dla czytających książki“, 8-o. str. 213.

S. Zaremba. Sur les méthodes de la moyenne arithmétique de Neumann et de Robin dans le cas d'une frontière non connexe. Extrait du Bulletin de l'Académie des sciences ee Cracovie, Classe des sciences malhématiques et naturelles, Octobre 1902, 8-o, s. 457—488.

Dr. Lucian Grabowski. Theorie des harmonischen Analysators. Aus den Sitzungsberichten der K.-Akad. d. Wiss. in Wien. Math. naturw. Classe Bd. XC, Abth. IIA, Juli 1901, Mit 2 Tafeln und 15 Textfiguren. Wien, 1901, 8-o, str. 172.

Dr. L. Grabowski. Photometrische Beobachtungen der Nova (3. 1901) Persei auf der Nikolai-Hauptsternwarte zu Pulkowo von L. Grabowski und H. v. Zeipel angestellt. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VIII série. Classe Physico-mathématique Volume XII, № 9; 8-o, str. 33.

Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens, tenu à Paris du 6 an 13 août 1902. Procés verbaux et communications publiés par E. Duporcq Paris, Gauthier-Villars, 1902, 8-o, s. 450. Tom ten zawiera następujące prace i komunikaty: M. Cantor, Sur l'historiographie des mathématiques. V. Volterra, Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse. D. Hilbert, Sur les problèmes futurs des mathématiques. H. Poincaré, Du role de l'intuition et de la ogique en mathématiques. G. Mittag-Leffler, Une page de la vie de Weierstrass. L. Autonne, Sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire quaternaire régulier. H Hancock, Remarks on Kronecker's modular systems. H. v. Koch, Sur la distribution des nombres premiers. R. Perrin, Sur le covariant résolvant de la forme binaire du cinquième ordre. L. E. Dickson, The known systems of simple groups and their inter-isomorphisms. A. Martin, A method of computing the common logarithm of a number without making use of any-logarithm but that of some pover of 10. A. Martin, A rigorous method of finding biquadratic numbers whose sum is a biquadrate. A. Padoa, Un nouveau systéme irréductible de postulats pour l'Algèbre. H. Padé, Aperçu sur les développements récents de la théorie des fractions continues. Tikhomandritzky, Sur l'evanouissement des fonctions θ de plusieurs variables. G. Mittag-Leffler, Sur une extension de la série de Taylor. E. Borel, Remarques relatives à la communication de M. Mittag-Leffier. E. Jahnke, Nouveaux systémes orthogonaux pour les dérivées des fonctions θ de deux arguments. J. Drach, Sur les intégrales complètes des équations aux dérivées partielles du second ordre. E. O. Lovett, Sur les transformations de contact entre les lignes droites et les sphères. F. J. Vaes, Sur les corps réguliers et semiréguliers· A. Macfarlane, Application of space analysis to curvilinear coordinates. T. Amodeo, Coup d'oeil sur les courbes algébriques au point de vue de la gonalité.

---

[1]) Patrz „Wiad. mat." t. III, str.

J. Stringham, Orthogonal transformations in elliptic or in hyperbolic space. V. Jamet, Sur le théorème de M. Salmon concernant les cubiques planes. A. Padoa, Un nouveau systéme de définitions pour la géométrie euclidienne. J. Boccardi, Remarques sur le calcul des perturbations spéciales des petites planètes. J. Hadamard, Sur les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles. V. Volterra, Sur les équations aux dérivées partielles. R. Fujisawa, Note on the mathematics of the old Japonese School. A. Gallardo, Les mathématiques et la biologie. Z. M. Galdeano, Note sur la critique mathématique. A. Capelli, Le iperaritmetiche e l'indirizzo combinatorio dell'aritmetica ordinaria. M. d'Ocagne, Sur les divers modes d'application de la méthode graphique à l'art du calcul. E. Maillet, Sur l'utilité de la publication de certains renseignements bibliographiques en mathématiques. C. A. Méray, Sur la langue tnternationale auxiliaire de M. le Dr. Zamenhof connue sour le nom d'Esperanto. G. Veronese. Les postulats de la géométrie dans l'enseignement.

Otto Dunkel. Regular singular points of a system of homogeneous linear differential equations of the first order. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. XXXVIII № 9, October 1902, 8-o, str. 341—370.

E. Pascal. Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di second'ordine (R. Accad. dei Lincei, 17. VIII. 1902).

E. Pascal. Trasformazioni infinitesime e forme ai differenziali di second'ordine (R. Accad. dei Lincei 21. IX. 1902).

E. Pascal. Si du un invariante simultaneo di una espressione ai differenzial totali di ordine qualunque e di un'altra alle derivate parziali (R. Istituto Lombardo 8. VII. 1902).

E. Pascal. Sulle matrici a caracteristiche invarianti nella teoria delle forme ai differenziali di second'ordine (R. Istituto Lombardo, Octobre, 1902).

A. Bindoni. Sui numeri infiniti et infinitesimi attuali (R. Accademia dei Lincei, 5. X. 1902).

Dr. Pietro Savio. Sulle formazioni invariantive della corispondeuza binaria (2, 2). Odbltka z Giornale di matematiche, 1902' 8-o, str. 32.

Frank H. Bigelow. Eclipse meteorology and allied problems. Prepared under direction of Willis L. Moore, Chief of Weather Bureau by..., Professor of Meteorology, Washington A. S. Departament of Agriculture, Waether Bureau, Bulletin 1, 4-o, str. 166.

A. Macfarlane. Peter Guthrie Tait. (Reprinted from the Physicalr Review, Vol. XV, № 1, July 1902) 8-o, str. 51—64.

W zeszycie 5-ym z d. 1 grudnia 1902 r czasopisma „Physikalische Zeit schrift" p. Wł. Gorczyński ogłosił artykuł p. t. „Kritisehe Bemerkungen zu den Dimensionen der Physik", w którym porusza kwestyę, przedstawioną w tomie V „Wiadomości matematycznych" (274—279) w korespondencyi p. t. „W sprawie jednostek elektrycznych i magnetycznych".

KRONIKA.

Uroczystość stulecia urodzin Abela odbyła się według zapowiedzi d. 4—7 września r. b. w Chrystyanii. Komitet, organizujący uroczystość, składał się z Nansena przewodniczącego, Mohna, Guldberga, Torupa, Sylowa, Holsta, Störmera i Riekera. Staraniem komitetu wydane zostało dzieło: „Niels Henrik Abel, mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance", którego egzemplarze rozdano w darze uczestlnikom uroczystości. Około 80 przedstawicieli akademij i uniwersytetów w Europie, Ameryce, Australi i Japonii przybyło na uroczystość. Powitanie gości odbyło się wieczorem dnia 4 września. Dnia następnego w południe pod prezydencyą Bröggera, rektora uniwersytetu, rozpoczęła się właściwa uroczystość w obecności króla Oskara II i księcia Eugeniusza, regenta Norwegii. Mowy powitalne wygłosili: minister Blehr (po francusku) i rektor Brögger (po niemiecku). Profesorowie Weber i Volterra odpowiedzieli w imieniu gości. Następnie prof. L. Sylow wygłosił mowę (po norwegsku) poświęconą pamięci Abela; przekład tej mowy podajemy na czele niniejszego zeszytu. Kantata, napisana przez Björnsona i podłożona pod muzykę przez Sindinga zakończyła, uroczystość inauguracyjną. Wieczorem król Oska