Z TEORYI WYZNACZNIKOW.

Napisał

M. T. Huber.

1. Wyznacznik n-go rzędu:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots\ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots\ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots\ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i,k,=1,2,3,\ldots,n)} \pm a_{11}\, a_{22} \ldots\ldots a_{nn} = |a_{ik}|,$$

złożony z n^2 elementów (t. j, z tylu, ile waryacyi drugiej klasy z powtórzeniami utworzyć można ze skaźników 1, 2, 3,.....,n) zawiera w rozwinięciu, jak wiadomo, $n!$ wyrazów postaci;

$$\pm a_{1\varepsilon}\ a_{2k} \ldots\ldots a_{n\varrho}, \qquad \text{lub} \qquad \pm a_{k1} \cdot a_{\lambda 1}, \ldots\ldots a_{\varrho n},$$

przyczem układ skaźników $k, \lambda, \ldots, \varrho$ jest przemianą układu $1, 2, \ldots, n$. Liczba zatem wszystkich wyrazów w rozwinięciu wyznacznika, t. j. $n!$, jest zarazem liczbą wszystkich przemian skaźników $1, 2, \ldots, n$. Wyrazom, zawierającym jeden lub więcej elementów przekątnej głównej, odpowiadają przemiany, w których jeden lub więcej skaźników pozostało na miejscu pierwotnem. Gdy zachodzi potrzeba rozwinięcia wyznacznika podług n określonych jego elementów, wtedy nasuwa się pytanie, w ilu wyrazach rozwinięcia zupełnego te elementy pojedyńczo lub w oznaczonem ugrupowaniu się znajdują. Pożądaną może być także znajomość liczby wyrazów, które żadnego z owych n elementów nie posiadają, gdy np. zapytujemy o liczbę wyrazów w rozwinięciu wyznacznika, którego pewne n elementów są zerami.

Przy obiorze n elementów można odróżnić następujące główne przypadki:

1°. elementy należą do jednego wiersza (kolumny);

2°. żaden z dwu elementów nie należy do tego samego wiersza (kolumny), czyli po odpowiedniem przestawieniu wierszy i kolumn (co wpływa tylko na znak wyznacznika) tworzą elementy przekątną główną;

3°. k elementów należy do jednego wiersza (kolumny), zaś n-k elementów należy do przekątnej głównej;

2. Pierwszy przypadek nie nastręcza żadnych trudności, gdyż jak wiadomo, wyznacznik jest funkcyą jednorodną liniową elementów jednego wiersza (kolumny), każdy przeto z obranych n elementów znajduje się w $(n-1)!$ wyrazach, a wyrazów wolnych od nich nie ma wcale.

W drugim przypadku można się zapytać:

a) ile jest wyrazów w rozwinięciu wyznacznika, posiadających wogóle elementy przekątnej głównej;

b) ile jest wyrazów, nie posiadających wcale elementów przekątnej głównej;

c) ile jest wyrazów, zawierających tylko m (a więc ani mniej ani więcej) oznaczonych elementów przekątnej głównej ($m < n$);

d) ile jest wyrazów, zawierających tylko m jakichkolwiek elementów przekątnej głównej;

e) ile jest wyrazów, zawierających $1, 2, 3, \ldots, m$ oznaczonych elementów przekątnej głównej;

f) ile jest wyrazów, zawierających tylko $1, 2, 3, \ldots, m$ oznaczonych elementów przekątnej głównej (a więc żadnych innych elementów tejże przekątnej).

Odpowiedzi na te pytania rozwiązują oczywiście zarazem kwestye następujące:

a') ile jest przemian elementów $1, 2, 3, \ldots, n$, w których jeden lub więcej elementów nie zmieniło miejsca;

b') ile jest przemian elementów $1, 2, 3, \ldots, n$, w których żaden element nie pozostał na miejscu pierwotnem;

c') ile jest przemian, w których m (ani mniej, ani więcej) oznaczonych elementów stoi na miejscu pierwotnem;

d') ile jest przemian, w których m jakichkolwiek elementów stoi na miejscu pierwotnem;

e') ile jest przemian, w których $1, 2, 3, \ldots, m$ oznaczonych elementów pozostało na miejscu pierwotnem:

f') ile jest przemian, w których tylko $1, 2, 3, \ldots, m$ oznaczonych elementów stoi na miejscu pierwotnem.

3. Odnośnie do (a) lub (a') określił już Euler (Pétersb. Mém. t. 3, 1809—10, str. 57) liczbę przemian, w których żaden z elementów nie stoi na pierwotnem miejscu jako funkcyę $f(n)$ i podał na wyznaczenie jej wzór zwrotny:

$$f(n) = n f(n-1) + (-1)^n . \tag{1}$$

Liczbą przemian, w których jeden lub więcej elementów pozostało na pierwotnem miejscu, będzie oczywiście:

$$n! - f(n) .$$

Później zajmowano się niejednokrotnie funkcyą $f(n)$ i pozostającemi z nią w związku pytaniami a), b), c), d). [Oettinger, Lehre v. d. Combin., Freiburg 1837. Cantor, Schlömilch's Zeitschr., Bd. 2, 1857, s. 410. Baltzer, Theorie und Anw. d. Determin. Weyrauch Crelle's Journal LXXIV, 1871].

W poniższych wywodach umieszczono dla ciągłości także wyniki przytoczonych prac, upraszczając niektóre i ujednostajniając znakowanie.

4. Niech symbol $F^{(n)}(1+)$ oznacza liczbę wyrazów w rozwinięciu wyznacznika D, zawierających jeden lub więcej elementów przekątnej głównej. Skaźnik u góry, podający rząd wyznacznika (a zarazem liczbę wszystkich elementów przekątnej głównej) nie jest oczywiście konieczny, dopóki tylko o jednym wyznaczniku mowa.

Każdy element przekątnej głównej znajduje się, rzecz jasna, w $(n-1)!$ wyrazach, z których pewne zawierać jeszcze mogą i inne elementy tejże przekątnej.

Obierając zatem pewien element jako pierwszy, przydzielamy mu w $F(1+)$ jako pierwszy dodajnik liczbę $(n-1)!$ Drugi element znajduje się także w $(n-1)!$ wyrazach, z których jednakże $(n-2)!$ zawiera obadwa elementy razem. Przeto w skutek drugiego elementu przybywa do $F(1+)$ dodajnik $(n-1)! - (n-2)!$ Trzeci element znajduje się w $(n-1)!$ wyrazach, pomiędzy któremi jest jednakże $\binom{2}{1}(n-2)!$ takich, które zawierają także pierwszy lub drugi element. Ale w ostatniej liczbie mieści się nadto $(n-3)!$ wyrazów, zawierających wszyst-

kie trzy elementy, zaczem przybywa wskutek trzeciego elementu dodajnik:

$$(n-1)! - \binom{2}{1}(n-2)! + (n-3)!$$

Postępując w ten sposób dalej znajdziemy:

$$F^{(n)}(1+) = (n-1)!$$

$$+ (n-1)! - \binom{1}{1}(n-2)!$$

$$+ (n-1)! - \binom{2}{1}(n-2)! + \binom{2}{2}(n-3)!$$

$$(2) \quad + (n-1)! - \binom{3}{1}(n-2)! + \binom{3}{2}(n-3)! - \binom{3}{3}(n-4)!$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ (n-1)! - \binom{r}{1}(n-2)! + \binom{r}{2}(n-3)! - \ldots\ldots + (-1)^r \binom{r}{r}(n-r-1)!$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad .$$

$$+ (n-1)! - \binom{n-1}{1}(n-2)! + \binom{n-2}{2}(n-3)! - \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} 0!$$

Uwzględniwszy zaś znany związek:

$$\binom{s}{s} + \binom{s-1}{s} + \binom{s-2}{s} + \ldots\ldots + \binom{t-1}{s} + \binom{t}{s} = \binom{t+1}{s+1},$$

otrzymamy:

$$F^{(n)}(1+) = n! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{r-1}\binom{n}{r}(n-r)! + \ldots\ldots + (-1)^{n-1},$$

albo wreszcie:

$$(3)[\text{ad}(a)] \qquad F^{(n)}(1+) = n!\left\{1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right\},$$

z czego bezpośrednio wypływa wzór na liczbę wyrazów, nie zawierających żadnego elementu przekątnej głównej:

$$(4)[\mathrm{ad(b)}] \qquad F^{(n)}(0) = f(n) = n!\left\{\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right\}.$$

Zważywszy, że wyrażenie w ostatnim nawiasie da się przedstawić w postaci:

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$= e^{-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} - \ldots\ldots \text{in inf.}$$

$$= e^{-1} + (-1)^n\left\{\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} - \ldots\ldots\right\},$$

możemy równanie (4) napisać w postaci:

$$f(n) = n!\, e^{-1} + (-1)^n\left\{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right\},$$

czyli

$$(5)[\mathrm{ad(b)}] \qquad F^{(n)}(0) = f(n) = n!\, e^{-1} + (-1)^n \varepsilon\,.$$

Ponieważ $\varepsilon < \frac{1}{n+1}$ jest dla każdego dodatniego n, nie wyłączając zera, ułamkiem właściwym, $f(n)$ zaś musi być liczbą całkowitą, więc dla nieparzystego n jest ε równe ułamkowej części wartości liczebnej wyrażenia $n!\, e^{-1}$, a dla parzystego n jest ε uzupełnieniem tejże wartości liczebnej do liczby całkowitej.

W szczególności dla:

n =	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,

otrzymujemy:

$n!$ =	1,	1,	2,	6,	24,	120,	720,
$n!\, e^{-1}$ =	0,3...	0,3...	0,7...	2,2...	8,8...	44,1...	264,8...
$f(n)$ =	1,	0,	1,	2,	9,	44,	265,

Podobnież znajdziemy z łatwością nową postać równania (3)-go:

(6)[ad(b)] $$F(1+) = n!\,(1-e^{-1}) - (-1)^n\,\varepsilon\,.$$

5. Wyrazy, zawierające tylko m oznaczonych elementów przekątnej głównej, nie będą zarazem zawierać żadnego z pozostałych $n-m$ elementów tejże przekątnej, czyli: Przemiany, w których tylko m oznaczonych skażników nie zmieniło miejsca, są zarazem przemianami, w których żaden z $n-m$ wskaźników na swem miejscu nie pozostał. Ich liczbą jest zatem:

(7)[ad(c)] $$\Phi^{(n)}(m)\,f(n-m) = (n-m)!\,e^{-1} + (-1)^{n-m}\,\varepsilon\,.$$

Liczba wyrazów, zawierających m jakichkolwiek elementów przekątnej głównej, jest oczywiście tyle razy większa od $f(n-m)$, ile kombinacyj m-tej klasy bez powtórzeń utworzyć można z n elementów. Jest nią więc:

(8)[ad(d)] $$F^{(n)}(m) = \binom{n}{m} f(n-m)\,.$$

Na podstawie ostatniego równania łatwo wywnioskować, że liczba wyrazów, posiadających m lub mniej elementów przekątnej głównej, określi się wzorem:

(9) $$F^{(n)}(m-) = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \binom{n}{\mu} f(n-\mu)\,,$$

zaś liczbą wyrazów, posiadających m lub więcej elementów tejże przekątnej będzie:

(10) $$F^{(n)}(m+) = \sum_{\mu=m}^{\mu=n} \binom{n}{\mu} f(n-\mu)\,.$$

Dodawszy nadto równania (9) i (10), otrzymamy tożsamość:

(11)[1] $$n! = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \binom{n}{\mu} f(n-\mu)\,.$$

6. Liczba wyrazów, zawierających 1, 2, 3, . . . , m oznaczonych elementów przekątnej głównej (nie wykluczając $n-m$ pozostałych), bę-

dzie przedstawiona przez sumę m wierszy prawej strony równania (2). Jest nią więc:

$$\Phi^{(n)}(1, 2, \ldots, m) = (n-1)!$$

$$+ (n-1! - \binom{1}{1}(n-2)!$$

$$+(n-1)!-\binom{m-1}{1}(n-2)! + \binom{m-1}{2}(n-3)!-\ldots+(-1)^{m-1}\binom{m-1}{m-1}(n-m)!$$

$$= m(n-1)! - \binom{m}{2}(n-2)!+\binom{m}{3}(n-3)! - \ldots\ldots + (-1)^{m-1}(n-m)!,$$

czyli!

(12) [ad(e)] $$\Phi^{(n)}(1, 2, \ldots, m)=\sum_{r=1}^{r=m}(-1)^{r+1}\binom{m}{r}(n-r)!$$

Kładąc kolejno w równaniu (8) $m = 1, 2, 3, \ldots, m$ i sumując, otrzymamy oczywiście wzór na liczbę wyrazów, zawierających jakiekolwiek z m oznaczonych elementów przekątnej głównej (bez innych elementów tejże przekątnej):

(13) [ad(f)] $$\Phi^{(n)}_{(m)}(1, 2, \ldots m)=\sum_{r=1}^{r=m}\binom{m}{r}f(n-r).$$

7. Przejdziemy teraz do trzeciego przypadku, t. j. gdy rozwijamy wyznacznik podług k elementów jednego wiersza (kolumny) i $n-k$

---

[1]) Wzory (10) i (11) znajdują się w wyżej wspomnianej pracy Weyrauchа w nieco odmiennej postaci:

$$F(m+) = 1 + \sum_{\mu=m}^{\mu=n-2}\binom{n}{\mu}f(n-\mu),$$

$$n! = 1 + \sum_{\mu=0}^{\mu=n-2}\binom{n}{\mu}f(n-\mu),$$

gdyż autor, zaznaczywszy słusznie, że w rozwinięciu wyznacznik a nie ma wyrazów zawierających tylko $n-1$ elementów przekątnej głównej, nie zauważył, że $f(n-m)$ staje się zerem dla $m=n-1$ i w sumowaniu niepotrzebnie opuścił wyraz $\binom{n}{n-1}f(n-(n-1))$, a zamiast $\binom{n}{n}f(n-n)$ położył 1.

różnych od nich elementów przekątnej głównej, które razem krótko elementami x nazywać będziemy, przyczem uczynimy upraszczające założenie, iż wiersz (kolumna) danych k elementów nie zawiera zarazem żadnego z $n-k$ elementów przekątnej głównej, czyli po prostu elementami x są:

$$\overset{(1)}{a_{k1}}, \overset{(2)}{a_{k2}}, \ldots\ldots, \overset{(k)}{a_{kk}}; \overset{(k+1)}{a_{k+1,k+1}}, \overset{(k+2)}{a_{k+2,k+2}}, \ldots\ldots, \overset{(n)}{a_{nn}},$$

albo też:

$$\overset{(1)}{a_{1k}}, \overset{(2)}{a_{2k}}, \ldots\ldots, \overset{(k)}{a_{k,k}}; \overset{(k+1)}{a_{k+1,k+1}}, \ldots\ldots, \overset{(n)}{a_{nn}}.$$

Ograniczymy się do odpowiedzi na pytanie (a).

Rozwinąwszy wyznaczniki podług elementów tego wiersza (kolumny), który dane k elementów zawiera, zauważymy łatwo, że znajdują się one w $k(n-1)!$ wyrazach (które prócz tego i niektóre z $n-k$ obranych elementów przekątnej głównej zawierać mogą). Pozostałe wyrazy w liczbie $(n-k)(n-1)!$ są sumą $n-k$ minorów wyznacznika D, pomnożonych przez elementy różne od danych (z odpowiednimi znakami). Każdy z minorów posiada przytem w przekątnej głównej $n-k-1$ elementów x, wskutek czego w rozwinięciu daje $\Phi^{(n-1)}(1, 2, \ldots, n-k-1)$ wyrazów, owe elementy posiadających.

Liczbą zatem wszystkich wyrazów wyznacznika D, które elementy x posiadają, jest:

$$(14) \qquad k(n-1)! + (n-k)\sum_{r=1}^{r=n-k-1}(-1)^{r+1}\binom{n-k-1}{r}(n-r-1)!$$

liczbą zaś wyrazów, nie zawierających żadnego z elementów x, jest:

$$(15) \qquad (n-k)\left[(n-1)! - \sum_{r=1}^{r=n-k-1}(-1)^{r+1}\binom{n-k-1}{r}(n-r-1)!\right].$$

W Krakowie, w październiku 1902.