MISCELLANEA.

I. Z elementarnej teoryi liczb.

1. Znanem jest powszechnie twierdzenie: Jeżeli liczba całkowita c dzieli iloczyn $a.b$ i jest pierwszą względem liczby a, to dzieli liczbę b. Oto uogólnienie tego twierdzenia: Jeżeli c dzieli iloczyn $a.b$, to dzieli też iloczyn $b.D$, gdzie D jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i c.

W samej rzeczy, jeżeli D jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i c, to największym wspólnym dzielnikiem liczb ab i cb jest bD, a ponieważ liczba c dzieli liczby ab i cb, więc dzieli też liczbę bD.

Podamy zastosowanie tego twierdzenia.

Niechaj a, b będą dwie liczby całkowite, mające największy wspólny dzielnik D. Jeżeli pewna wielokrotność $a.n$ liczby a jest zarazem wielokrotnością liczby b, to b dzieli $n.D$, a więc $n.D=b.x$, gdzie x jest liczbą całkowitą; $n=\frac{b}{D}.x$; $a.n=a.\frac{bx}{D}=\frac{a}{D}.b.x$ $=\frac{a.b}{D}.x$. Stąd, jakiekolwiek będzie x, będzie $\frac{a.b}{D}x$ wielokrotnością wspólną liczb $a.b$, i każda wielokrotność wspólna liczb a i b jest tej postaci. A zatem najmniejszą wspólną wielokrotną liczb a i b będzie $\frac{a.b}{D}$.

Twierdzenie to daje się uogólnić w ten sposób: Jeżeli liczby $a, b, c \dots k, l$ mają największy wspólny dzielnik D i jeżeli l dzieli liczby $a.n, b.n, c.n \dots, k.n$, to dzieli także liczbę $n.D$.

W samej rzeczy liczby

$$a.n, b.n, c.n, \dots, k.n, l.n$$

mają największy wspólny dzielnik $n.D$, ponieważ zaś l z założenia dzieli liczby $a.n$, $b.n$, $c.n, \dots, k.n$, więc musi dzielić i liczbę $n.D$.

Zastosowanie: Ile w ciągu liczb $1, 2, \ldots, l$ jest liczb n takich, że liczby $a.n, b.n, \ldots, k.n$ są podzielne przez l?

Według powyższego trzeba, aby liczba l dzieliła $n.D$, stąd $nD = l.x$, $n = \frac{l}{D}.x$ i odwrotnie, jakiekolwiek będzie x, liczby;

$$a.\frac{l}{D}x, \quad b.\frac{l}{D}x, \ldots, k.\frac{l}{D}x,$$

które można napisać tak:

$$\frac{a}{D}lx, \frac{b}{D}lx \ldots \frac{k}{D}lx$$

muszą być wielokrotnościami liczby l. A zatem wartościami, które można nadać liczbie x, są: $1, 2, 3 \ldots D$. Liczba tych wartości jest D.

B. Niewęgłowski.

2. Zadaniem elementarnem o kryteryach podzielności liczb zajmowało się wielu autorów i właściwie kwestyę tę należy uważać za wyczerpaną, pod względem teoretycznym. Mimo to, pojawiają się wciąż artykuły w tej materyi, w których podawane bywają rozmaite reguły praktyczne, dające łatwe i możliwie prędkie sposoby przekonywania się, czy dana liczba całkowita dzieli się przez inną liczbę całkowitą. Artykuły te zazwyczaj nie przynoszą nic nowego; autorowie ich odkrywają na nowo reguły dawniejsze, które może nie zdołały się należycie rozpowszechnić. Niektóre wszakże z tych reguł godne są zapamiętania i mogą z pożytkiem być stosowane w wykładzie elementarnym. Z tego powodu pozwolimy sobie zająć tu niemi uwagę czytelnika.

W niedawno ogłoszonym interesującym artykule: „Carattere di divisibilità per un numero intero qualunque“ (Rendinconti della Reale Accademia dei Lincei, 6 październ. 1901). prof. Gino Loria zajmuje się tem pytaniem elementarnem i pomiędzy innemi twierdzeniami, dobrze znanemi, podaje kilka spostrzeżeń, z których wynikają reguły podzielności liczb, dość praktyczne w zastosowaniu. Przytoczymy jedno z tych spostrzeżeń, opierające się na rozkładzie ułamków zwyczajnych na dziesiętne, którego teorya wiąże się, jak wiadomo, ściśle z podzielnością liczb całkowitych jednych przez drugie. Niechaj ułamek $\frac{1}{a}$ zamienia się na ułamek dziesiętny peryodyczny o n cyfrach w peryodzie:

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) + \frac{1}{10^n}\left(\frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) + \ldots;$$

Otrzymujemy stąd:

$$\frac{10^n - 1}{a} = a_n + 10\, a_{n-1} + \ldots + 10^{n-2} a_2 + 10^{n-1} a_1,$$

a więc liczba całkowita a jest wtedy dzielnikiem liczby $10^n - 1$. Wiadomo zaś z teoryi liczb (i łatwo dowieść tego elementarnie), że jeżeli liczba N, napisana w układzie dziesiętnym, jest podzielna przez liczbę całkowitą, która jest czynnikiem liczby $10^n - 1$, to wtedy suma liczb, jakie otrzymujemy, dzieląc cyfry liczby N na grupy po n cyfr, poczynając od ręki prawej, jest podzielna przez a, i odwrotnie. Możemy zatem z rozkładu ułamku $\frac{1}{a}$ na ułamek dziesiętny peryodyczny korzystać, jeżeli idzie o znalezienie kryteryum praktycznego podzielności przez liczbę a. Reguła ta upraszcza się jeszcze, jeżeli liczba n jest parzysta i równa np. 2ν; wtedy bowiem, jak tego łatwo dowieść, w rozkładzie wyżej podanym będzie $a_{\nu+1} = 9 - a_1$, $a_{\nu+2} = 9 - a_2$, $\ldots$, $a_{2\nu} = 9 - a_\nu$, a podstawiając te wartości, otrzymamy:

$$\frac{10^\nu + 1}{a} = a_\nu + 10\, a_{\nu-1} + \ldots + 10^{\nu-1} a_1 + 1.$$

Można w tym przypadku zastosować twierdzenie: „Liczba N, napisana w układzie dziesiętnym, dzieli się przez liczbę całkowitą a, będącą czynnikiem liczby $10^n + 1$, jeżeli suma naprzemienna [1]) liczb, jakie otrzymujemy, dzieląc cyfry liczby N na grupy po n cyfr od ręki prawej, jest podzielna przez a, i odwrotnie".

Tak np. $\frac{1}{7}$ zamienia się na ułamek dziesiętny peryodyczny, mający sześć cyfr dziesiętnych; stąd wynika, że liczba całkowita jest po-

---

[1]) Sumę naprzemienną nazywamy sumę, której składniki bierzemy naprzemian ze znakami więcej i mniej, a więc pierwszą ze znakiem $+$, drugą ze znakiem $-$, trzecią ze znakiem $+$ i t. d.

dzielna przez 7, jeżeli suma naprzemienna liczb, jakie otrzymujemy, dzieląc liczbę daną na grupy trzycyfrowe, jest podzielna przez 7.

Przykład: 16 | 864 | 986 | 215; suma naprzemienna wynosi: $(215 + 864) - (986 + 16) = 77$, a zatem liczba jest podzielna przez 7.

W nocie swej podaje jeszcze Loria dowód inny znanej oddawna reguły praktycznej, która brzmi tak: „Aby liczba N była podzielna przez liczbę całkowitą a, jest koniecznem i dostatecznem, aby pewna wielokrotność dziesiątków liczby N, powiększona lub zmniejszona o pewną liczbę jednostek tej liczby była wielokrotnością liczby a“. (Przez dziesiątki należy tu rozumieć całkowitą liczbę dziesiątków, zawartych w liczbie danej).

Reguła ta okazuje się nieraz bardzo praktyczną, zwłaszcza wtedy, gdy wielokrotność dziesiątków liczby N jest równa samej liczbie dziesiątków. W notatce, ogłoszonej w „Zeitschrift für mathem. und naturwiss. Unterricht“ t. III. 1873, podaliśmy szereg kryteryów, opartych na tej regule, a następnie w notatce, ogłoszonej w „Muzeum“ t. II. 1886, uogólniliśmy tę regułę dla jakiegokolwiek układu liczenia. Polega ona na następującem prostem twierdzeniu elementarnem: „Liczba $N = ap + b$ jest podzielna przez liczbę $R = cp + d$, pierwszą względem d, jeżeli podzielną jest przez R liczba $a - br$, gdzie r jest liczbą całkowitą, czyniącą zadość równaniu nieoznaczonemu $Rl + dr = c$“. Tu liczba p jest podstawą układu liczenia.

Znalezienie kryteryów specyalnych na zasadzie tej reguły sprowadza się do wyznaczenia w każdym danym przypadku odpowiedniej wartości liczby całkowitej r. Otóż łatwo wykazać, że gdy liczby R i a są względnie pierwsze, kryteryum powyższe, polegające na podzielności przez R liczby $a - br$, sprowadza się do kryteryum podzielności liczby $pr + 1$ przez R; wynika to z tożsamości

$$Nr + a - br = (ap + b)\,r + a - br = a\,(pr + 1)\,.$$

Okoliczność ta pozwala łatwo wyznaczać liczbę r w każdym układzie liczenia. Tak np. dla układu dziesiętnego można łatwo utworzyć następującą tablicę:

$R = 3$	7	9	11	13	17	19	21	23	29	31	37	41	43
$r = 2$ albo -1	2	8 albo -1	1	-4	5	-2	2	-7	-3	3	11	4	-13

Stąd wynikają między innemi np. następujące znane reguły praktyczne: „Liczba N jest podzielna przez 7, jeżeli jej liczba dziesiątków zmniejszona o podwójną liczbę jedności jest podzielna przez 7"; „Liczba N jest podzielna przez 13, jeżeli jej liczba dziesiątków, powiększona o poczwórną liczbę jedności, jest podzielna przez 13"; „Liczba N jest podzielna przez 29, jeżeli liczba jej dziesiątków, powiększona o potrójną liczbę jedności, jest podzielna przez 3".

Inne reguły czytelnik łatwo sam odczyta z tablicy i z łatwością wyprowadzić może reguły dla każdego szczególnego przypadku.

W zastosowaniu kryterya te są łatwo i nieraz szybko prowadzą do celu; to naprzykład następujący rachunek, wykonany według jednej z reguł powyższych, przekonywa, że liczba 45588 jest podzielna przez 29:

$$\begin{array}{r|l}
4558 & 8 \\
24 & \\
\hline
458 & 2 \\
6 & \\
\hline
46 & 4 \\
12 & \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{58 = 2.29\,.}
\end{array}$$

Rachunek taki w wielu razach wykonywa się szybciej i prościej od dzielenia.

Pokażemy na przykładzie zastosowanie tego kryteryum w innym układzie liczenia. Chcemy np. znaleść kryteryum podzielności przez liczbę $R=$ czterdzieści jeden w układzie trójkowym. Liczba czterdzieści jeden w układzie trójkowym wyraża się w ten sposób: $R=1112=111\,.\,p+2$, gdzie p jest równe trzem. Aby otrzymać r, pomnóżmy 1112 przez liczbę 2 względnie pierwszą z liczbą 3, będzie $1112\,.\,2=10001$; można tedy przyjąć $r=1000$; skąd wynika, że liczba $N=ap+b$ w układzie trójkowym będzie podzielna przez liczbę $R=1112$, gdy $a-1000\,b$ jest podzielne przez 1112. (Możnaby zresztą kryterya te otrzymać z kryteryum w układzie dziesiątkowym dla liczby 41). Tak np., że liczba 10012120 w układzie trójkowym jest podzielna przez liczbę 1112, przekonywa następujący prosty rachunek, wykonany na podstawie powyższego kryteryum:

$$\begin{array}{r|l} 100121 & 20 \\ 2000 & \\ \hline 2112 & 1 \\ 1000 & \\ \hline 1112\,. & \end{array}$$

Przytoczone przez nas wyżej kryterya praktyczne podzielności przez liczby całkowite, należą do dwóch kategoryj. Kategorya pierwsza obejmuje sposoby, polegające na rozkładzie cyfr liczby badanej na grupy, zawierające po jednej, dwie, trzy i więcej cyfr i wyznaczaniu sumy (lub naprzemiennej sumy) liczb grupowych; do tej kategoryi należą znane cechy podzielności liczb w układzie dziesiątkowym przez 3, 9, 11, wyżej na stronie 255 podane kryterya podzielności przez 7 i t. d.. Kategorya druga polega na korzystaniu z kryteryum, wyrażanego wzorem $a-br$; należą do niej cechy, przedstawione przykładowo na tablicy, podanej na str. 255. Istnieje wreszcie trzecia kategorya, polegająca na tem, że cyfry liczby badanej mnożymy przez odpowiednie dla każdego dzielnika określone liczby dodatnie lub ujemne i następnie bierzemy sumę iloczynów.

Sposób ten wynika z metody ogólnej, opartej na teoryi reszt potęgowych. W niektórych przypadkach kryterya na tej własności oparte szybko prowadzą do celu. Do nich należą jako szczególne przypadki kryterya podzielności przez 2, 5, gdzie wszystkie cyfry, prócz cyfry jedności, mnożymy przez 0, cyfrę zaś jedności przez 1; kryteryum podzielności przez 4, gdzie wszystkie cyfry mnożymy przez 0, prócz dwóch ostatnich t. j. cyfry jedności, którą mnożymy przez 1, i cyfry dziesiątków, którą mnożymy przez 2 i t. d.

Zresztą wszystkie trzy kategorye kryteryów są tylko pozornie różne; w rzeczy samej można nawet drogą elementarną, bez potrzeby odwoływania się do ogólnej teoryi reszt potęgowych, z jednej kategoryi przechodzić do drugiej. *S. D.*

II. Pewne zagadnienie o hyperboli.

Znaleść krzywą płaską taką, aby styczna w każdym jej punkcie M była dwusieczną kąta $F'MF$, gdzie F i F' są punkty dane.

Weźmy spółrzędne Descartes'a tak, aby prosta $FF' = 2c$ była osią x, a prostopadła w środku prostej FF' osią y.

Dajmy, że dwusieczna kąta $F'MF$ przecina oś x w punkcie N. Na zasadzie znanego twierdzenia będzie:

$$\frac{F'N}{MF'} = \frac{NF}{MF};$$

daje tu związek:

$$\frac{(x+c)\,y'-y}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}} = \frac{(c-x)\,y'+y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} \tag{1}$$

niełatwy do zcałkowania.

Wyrażając, że kąt $F'MN$ = kątowi NMF, możemy napisać:

$$\frac{y'(x+c)-y}{(x+c)+yy'} = \frac{y+(c-x)\,y'}{(x-c)+yy'}. \tag{2}$$

Każde z równań (1) i (2) rozwiązuje zagadnienie.

Dzieląc jedno przez drugie, otrzymujemy:

$$\frac{(x+c)+yy'}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}} = \frac{(x-c)+yy'}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} \tag{3}$$

czyli:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \frac{d}{dx}\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

co bezpośrednio się całkuje i daje:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \text{const.}$$

Jest to równanie hyperboli.

Spółrzędne dwubiegunowe dałyby bezpośrednio $dr = dr'$.

B. Niewęgłowski.

III. Z rękopisów Harriota.

Matematyk włoski p. G. Vacca[1]), bawiąc w sierpniu r. z. w Londynie, zbadał rękopisy matematyka angielkiego Tomasza Harriota (1560—1621), przechowywane w Muzeum Brytańskiem, i doszedł do kilku interesujących wyników. Pierwszy z nich dotyczy pytania, kto pierwszy odkrył znane twierdzenie o obliczaniu pola trójkąta kulistego. R. Baltzer w dziele: „Elemente der Mathematik". T. II, wyd. 3-e Lipsk 1870, str. 67, twierdzi, że odkrycie to zawdzięczamy matematykowi Albertowi Girardowi, który w dziele p. t.: „Invention nouvelle en algèbre" w r. 1629 twierdzenie to podał; następnie w r. 1632 ogłosił je matematyk włoski Cavalieri w pracy: „Directorium generale uranometricum". Za Baltzerem poszedł M. Cantor w swojej „Historyi matematyki" (Tom II, wydanie 2-gie. Lipsk 1900, str. 709).

Matematyk polski Brożek w piśmie swojem „Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum". Gdańsk 1652, podaje regułę do obliczania powierzchni wielokąta kulistego „ex antiquis in Vitellonem notis" i stosuje je do trójkąta, twierdząc, że według Henryka Briggsa, geometra angielski Tomasz Harriot pierwszy uczył obliczania powierzchni trójkąta kulistego. R. Baltzer w cytowanem wyżej dziele pisze: „Die Regel für die Berechnung der Fläche eines sphärischen Polygons wird von Broscius (Apologia etc.) „ex antiquis in Vitellonem notis" angeführt. Diese Hinweisung sowie die Notiz desselben Autors: „demonstratio amplitudinis anguli solidi refertur ab H. Briggio ad T. Harriotum — ermangeln bis jetzt der weiteren Bestätigung". Zdanie Baltzera podziela J. N. Franke w swojej wielce cennej pracy: „Jan Brożek, akademik krakowski 1585—1652. Kraków 1884 (str. 244—245).

Poszukiwania p. G. Vacca stwierdzają, że istotnie Harriot pierwszy zajmował się tym przedmiotem, że więc wiadomość podaną przez Brożka należy uważać za uzasadnioną. Briggs w liście

---

[1]) Bulletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche 5. (1902), str. 1—6, porówn. Notizie storiche sulla misura degli angoli solidi e dei poligoni sferici. Bibliotheca Matematica (3). 3. 2, s. 191—197.

do Keplera daty dnia 20 lutego 1625 r. (Kepleri: Opera omnia ed. Frisch. Frankfurt 1863, str. 661) pisał: „Cum doctissimus vir et geometra Thomas Hariottus, longe peritissimus invenerit modum metiendi angulum quemlibet solidum, ab angulis planis comprehensum, quantitatem anguli solidi tetrëadri hic adjungendam censui, ut constaret, quam longe recedant a vero, qui arbitrantur, 12 angulos tetraëdri complere locum solidum. Valet enim angulus solidus tetraëdri $\frac{350958}{1000000}$ anguli solidi recti, ita ut locus solidus capiet 11 huiusmodi angulos et amplius. Cum propediem expectemus et exoptemus ipsius auctoris librum posthumum, qui istud problema inter alia multa ejus acutissima scripta nobis patefaciet, modum mensurandi illi integrum relinquam; ne illi quicquam proripuisse aut ipsam rem non pro dignitate tractasse videar". W rękopisie zaś Harriota (mss. ad 6787 fol. 106) znalazł p. Vacca ustęp własnoręczny matematyka angielskiego treści następującej: „Inveni rationem accuratam mensurandi superficies triangulorum sphaericorum 18 sep. 1603. Et ist talis: Adde simul omnes angulos trianguli, inde detrahe 180, quod superest fac numeratorem ad 360. Dico quod illa fractio exprimit partes haemisphaerii quae continet triangul: vel tot gradus numera in circulo magno quot sunt in numeratore et a polo illius circuli descendunt duo quadrantes terminantes illos gradus, dico quod hoc triangulum aequatur triangulo sphaerico praedicto". Dalej w mis. ad 6785, fol. IV, fol. 119 r. odczytał p. Vacca: „Canon universalis pro superficie cuiuslibet polygoni sphaerici. Adde omnes angulos cuiuslibet polygoni simul, a summa subtrahe toties 180 quoties possibile: dimidium reliqui aequale ist superficiei polygoni".

Tak więc Harriot istotnie wyprzedził innych matematyków w odkryciu reguły na obliczanie trójkąta kulistego, ale rękopisy, w których te odkrycia się znajdowały, pozostały nieogłoszone, tylko wiadomość o tem, dzięki Briggsowi, rozeszła się wśród matematyków.

W innym rękopisie niewydanym Harriota p. t.: „De numeris triangularibus et inde de progressionibus arithmeticis magisteria magna", znalazł p. Vacca fragmenty stwierdzające, że praca ta zawierała wiele własności spółczynników dwumianowych, odkrytych później przez Pascala, Fermata i innych. *S. D.*

IV. Tablica krzywych panalgebraicznych według prof. G. Loria [1]).

W poniższej tablicy, liczba n oznacza stopień krzywej, ν jej porządek. Te dwie liczby odnoszą się do równania różniczkowego krzywej:

$$F(x, y, y') = \sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y)\, y'^{n-r} = 0\,,$$

gdzie y' jest pochodną rzędnej y względem odciętej x; $f_0, \ldots, f_n$ są wielomiany, nie mające wspólnego czynnika; ν — stopień wielomianu najwyższego stopnia.

$n = 1,\ \nu = 1.$

1. Spiralna logarytmowa, $\varrho = ae^{u\omega}$.
2. Logarytmika czyli logistyka, $y = b \log \frac{x}{a}$.
3. Krzywa Debeaune'a, $x = y \operatorname{cotg} \lambda - n \operatorname{cotg}^2 \lambda + ce^{\frac{-y \operatorname{tg} \lambda}{n}}$.
4. Krzywe W (Kleina i Liego), $\left(\frac{x}{\xi}\right)^\alpha = \left(\frac{y}{\eta}\right)^\beta$.

$n = 1,\ \nu = 2.$

5. Kwadratryca Hippiasa lub Dinostrata, $y = x \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2r}$.
6. Tangentoida, $y = b \operatorname{tg} \frac{x}{a}$.
7. Kochleoida, $\varrho = a \frac{\sin \omega}{\omega}$.
8. Logarytmika odwrotna, $y = be^{\frac{a}{x}}$.
9. Lemniskata logarytmowa, $y^2 = x^2 \log \left(\frac{a^2}{x^2}\right)$.

---

[1]) Patrz „Przegląd literatury“ w zeszycie niniejszym str. 288 i dalsze.

$n = 2, \nu = 1.$

10. Cykloida zwykła, $x = r(\varphi - \sin\varphi)$, $y = r(1 - \cos\varphi)$.

11. Cykloida Fermata, $x = kr(\varphi - \sin\varphi)$, $y = r(1 - \cos\varphi)$.

12. Cykloida Laisanta, $x = kr(\varphi - \sinh\varphi)$, $y = r\cosh\varphi$.

13. Krzywe Legoux'a (określone przez równanie różniczkowe).

14. Krzywa dzwonkowata G. Fontany, $y = \sqrt{-\log x}$.

15. Curve of logarithmic sines, $y = \log\sqrt{1 - x^2}$.

$n = 2, \nu = 2.$

16. Cykloida drugorzędna Michała Anioła Ricci,

$$x = R\varphi - r\sin\varphi, \; y = r(1 - \cos\varphi).$$

17. Spiralna hyperboliczna, $\varrho\omega = a$.

18. Cyklojdy wydłużone i skrócone, $x = r\varphi - d\sin\varphi$, $y = r - d\cos\varphi$.

19. Rozwijająca koła, $\omega = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho} - \operatorname{arc\,cos}\frac{a}{\varrho}$.

20. Sinusoida (w szczególności kwadratryca Tschirnhausena),

$$y = b\sin\frac{x}{a}.$$

21. Traktorya, $\omega = \frac{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}{\varrho} - \operatorname{arc\,cos}\frac{\varrho}{a}$.

22. Łańcuchowa, $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

23. Spiralna Poinsota, $\varrho\cosh\frac{n\omega}{b} = n$.

24. Kłos, $\varrho = a\sec\mu\omega$.

25. Krzywa Lissajous'a, $x = a\sin(mt + \alpha)$, $y = b\sin(nt + \beta)$.

$n = 1,\ \nu = 3.$

26. Krzywa (Lituus) C o t e s a, $\varrho^2 = a^2\omega$.

$n = 2,\ \nu = 3.$

27. Izochrona paracentryczna, $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = a\,\dfrac{dy}{\sqrt{a^2y - y^3}}$.

$n = 2,\ \nu = 4.$

28. Spiralna A r c h i m e d e s a, $\varrho = a\omega$.

29. Spiralna sum, $\varrho = c \cosh(n\omega)$.

30. Spiralna różnic, $\varrho = c \sinh(n\omega)$.

31. Konchospiralna, $\varrho = ae^{m\omega} + b$.

32. Epicykloidy (lub hypocykloidy) zwykłe,

$$\begin{cases} \dfrac{x}{r} = \dfrac{n+1}{n} \cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi. \\[2mm] \dfrac{y}{r} = \dfrac{n+1}{n} \sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi. \end{cases}$$

33. Krzywa D e l a u n a y'a, $x = \displaystyle\int \frac{y^2 \pm b^2}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}}\,dy$.

34. Krzywa C. S t u r m a, $x = \displaystyle\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}}$.

35. Complicata tractrix, $\omega = \dfrac{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}{\varrho} - \operatorname{arc\,cos} \dfrac{\varrho}{a}$.

36. Konwoluta koła, $\omega = \dfrac{1}{a}\sqrt{\varrho^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} + \operatorname{arc\,sin} \dfrac{\frac{a}{2}}{\varrho}$.

37. Sinusoida eliptyczna, $y = b \sin \dfrac{x}{a}$.

38. Sekantoida, $y = b \sec \frac{x}{a}$.

39. Sintraktorya, $x - \sqrt{k^2 - y^2} = a \log \frac{k - \sqrt{k^2 - y^2}}{y}$.

40. Krzywa sprężysta, $y = \int \frac{2ax - x^2}{\sqrt{4a^2 - (2ax - x^2)^2}} dx$.

41. Różowata, $\varrho = R \sin \omega$.

$n = 2, \nu = 6.$

42. Spiralna paraboliczna, $(\varrho - a)^2 = 2p\omega$.

43. Traktorya koła, $\omega = \int \frac{d\varrho \sqrt{2(a^2 + l^2)\varrho^2 - \varrho^4 n^4}}{\varrho(\varrho^2 - n^2)}$.

44. Epicykloidy (i hypocykloidy) wydłużone i skrócone:

$$\begin{cases} \frac{x}{r} = \frac{n+1}{n} \cos n\varphi - \frac{h}{r} \cos (n+1)\varphi, \\ \frac{y}{r} = \frac{n+1}{n} \sin n\varphi - \frac{h}{r} \sin (n+1)\varphi. \end{cases}$$

$n = 4, \nu = 1.$

45. Krzywa południkowa bryły o najmniejszym oporze:

$$\begin{cases} x = a\left(\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + \log p\right) + c, \\ y = \frac{a(1+p^2)^2}{p^3}. \end{cases}$$

$n = 4, \nu = 4.$

46. Krzywa, która winna toczyć się po prostej, aby jej punkt opisał okrąg koła, $\omega = \int \frac{b\,d\varrho}{\varrho\sqrt{(a-\varrho)^2 - b^2}}$.

$$n = 4,\ \nu = 8.$$

47. Spiralna G a l i l e u s z a, $\varrho = a - b\omega^2$.

48. Spiralna N o r w i c h a lub S t u r m a, $\omega = \int \frac{(\varrho - c)\, d\varrho}{\varrho \sqrt{2c\varrho - \varrho^2}}$.

$$n = 4,\ \nu = 10.$$

49. Izochrona V a r i g n o n a, $\omega = \frac{1}{\sqrt{k}} \int \frac{-\sqrt{\varrho - a}\,.\, d\varrho}{c - \varrho}$.

Można dowieść, że panalgebraicznemi są wszystkie spiralne paraboliczne ($\varrho^n = a^n \omega^m$) i hyperboliczne ($\varrho^n \omega^m = a^n$) i wszystkie spiralne algebraiczne t. j. krzywe, których równania są postaci $f(\varrho, \omega) = 0$, gdzie f jest funkcyą całkowitą wymierną.

Za pomocą tychże metod można przekonać się, że n i e s ą p a n a l g e b r a i c z n e m i krzywe następujące:

Klotoida E. C e s à r o, $x = a\sqrt{\pi} \int_0^\nu \cos \frac{\pi \nu^2}{2}\, d\nu$,

$$y = a\sqrt{\pi} \int_0^\nu \sin \frac{\pi \nu^2}{2}\, d\nu.$$

Krzywa E u l e r a, $\omega = \int \frac{a \log \frac{\varrho}{c}\, d\varrho}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - \left(a \log \frac{\varrho}{c}\right)^2}}$.

Krzywe M e r c a t o r a lub S u m n e r a,

$$\cosh y = m \cos x,\ |m| \leqslant 1,\ \sinh y = n \sin x,\ y = \pm \log \cos x.$$

Łańcuchowa równego oporu, $e^{\frac{y}{a}} \cos \frac{x}{a} = 1$.

Lemniskatryca, $\sin iy = i \cos x$.

Logarytmika dodawania i odejmowania, $y = l \log\left(1 \pm \frac{1}{t}\right)$, $x = l \log t$.

Spiralne sinusoidalne ($\varrho^n = a^n$, $\cos n\omega$) są panalgebraicznemi tylko wtedy, gdy skaźnik n jest liczbą wymierną i wtedy są wprost algebraicznemi; toż samo stosuje się do krzywych $\varrho = a \cos {}^n\omega$.

V. Wyrażenia spółczynników w rozwinięciu na szeregi anomalii mimośrodowej, anomalii prawdziwej i promienia wodzącego drogi ciała niebieskiego.

W „Annales de l'Observatoire de Paris". T. I, podaje Leverrier rozwinięcia anomalii mimośrodowej, anomalii prawdziwej i promienia wodzącego na szeregi według wstaw i dostaw wielokrotnych anomalij średnich. Rozwinięcia te użyteczne są szczególniej w przypadku małego mimośrodu.

Niech u będzie anomalią mimośrodową, l anomalią średnią, f anomalią prawdziwą, r promieniem drogi ciała niebieskiego, wtedy:

$$(1) \quad u - l = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin kl; \quad r = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos kl; \quad f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin kl.$$

Pomnożywszy pierwsze i trzecie z tych równań przez $\sin kl\, dl$, drugie przez $\cos kl\, dl$, całkując w granicach od 0 do π i uwzględniając znane wzory:

$$\int_0^{\pi} \sin kl \sin hl\, dl = 0, \quad \int_0^{\pi} \cos kl \cos hl\, dl = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 kl\, dl = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi} \cos^2 kl\, dl = \frac{\pi}{2},$$

otrzymamy:

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\int_0^{\pi}(u-l)\sin kl\,dl &= \int_0^{\pi} A_k \sin^2 kl\,dl = A_k\frac{\pi}{2}\,,\\
\int_0^{\pi} r\cos kl\,dl &= \int_0^{\pi} B_k \cos^2 kl\,dl = B_k\frac{\pi}{2}\,,\\
\int_0^{\pi}(f-l)\sin kl\,dl &= \int_0^{\pi} C_k \sin^2 kl\,dl = C_k\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Zważywszy zaś, że wielkości l, r, f i dl mogą być wyrażone w funkcyi wielkości u, i wykonawszy całkowania przez części, mieć będziemy:

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
A_k &= \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos(ku-ke\sin u)\,du\,,\\
B_k &= \frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi}(1-e\cos u)^2\cos(ku-ke\sin u)\,du\,,\\
C_k &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{k\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(ku-ke\sin u)}{1-e\cos u}\,du\,,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(k = 0, 1, 2\,\ldots\,\infty)\,.
$$

Spółczynnik B_0 można wyrazić w formie skończonej:

$$
(4)\qquad B_0 = a\left(1+\frac{1}{2}e^2\right),
$$

dla innych zaś spółczynników przy pomocy wzorów (3) otrzymujemy wartości przybliżone.

L e v e r r i e r podał wzory ogólne na spółczynniki A_k i B_k.

Powtarzamy je tu, wyprowadzając zarazem wyrażenia na spółczynniki C_k, które w wymienionych wyżej rocznikach się nie znajdują; dane są one tam tylko w wartościach liczebnych. Zacznijmy od spółczynników A_k.

Zamiast

$$\cos(ku - ke\sin u) = \cos ku\cos(ke\sin u) + \sin ku\sin(ke\sin u)$$

możemy napisać:

$$(5)\quad \begin{aligned} &\cos ku\left(1 - \frac{k^2e^2\sin^2 u}{1.2} + \frac{k^4e^4\sin^4 u}{1.2.3.4} - \frac{k^6e^6\sin^6 u}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right) \\ &+ \sin ku\left(\frac{ke\sin u}{1} - \frac{k^3e^3\sin^3 u}{1.2.3} + \frac{k^5e^5\sin^5 u}{1.2.3.4.5} - \ldots\right). \end{aligned}$$

Wyrażając $\sin^\nu u$ przez wstawy i dostawy łuków wielokrotnych, otrzymamy wyrazy, zawierające $\sin ku \sin pu$, $\cos ku \cos pu$, z których przy całkowaniu pozostaną tylko te, gdzie $p = k$. Zatrzymując tylko te wyrazy i wykonawszy całkowanie, mamy:

$$(6)\quad \begin{aligned} \frac{k}{2}A_k = \frac{\left(\frac{1}{2}ke\right)^k}{1.2.3\ldots k}\Bigg\{1 - \frac{\left(\frac{1}{2}ke\right)^2}{k+1} + \frac{\left(\frac{1}{2}ke\right)^4}{1.2.(k+1)(k+2)} \\ - \frac{\left(\frac{1}{2}ke\right)^6}{1.2.3.(k+1)(k+2)(k+3)} + \ldots\Bigg\}. \end{aligned}$$

Ponieważ zaś:

$$(7)\qquad B_k = -\frac{ae}{k}\,\frac{dA_k}{de},$$

o czem łatwo się przekonać, jeżeli w (3) przecałkować B_k przez części, zróżniczkować A_k względem e i porównać oba rezultaty, będzie:

$$(8)\quad \begin{aligned} \frac{k}{2a}B_k = -\frac{\left(\frac{1}{2}ke\right)^k}{1.2\ldots k}\Bigg\{1 - \frac{k+2}{k(k+1)}\,\frac{\left(\frac{1}{2}ke\right)^2}{1} \\ + \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)}\,\frac{\left(\frac{1}{2}ke\right)^4}{1.2} - \frac{k+6}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\,\frac{\left(\frac{1}{2}ke\right)^6}{1.2.3} + \ldots\Bigg\}. \end{aligned}$$

Wyrażenia na spółczynnik C_k można wyprowadzić podobnem rozumowaniem co na spółczynnik A_k, należy jednak wziąć jeszcze pod uwagę iloczyn:

$$(9)\quad \begin{aligned}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}(1-e\cos u)^{-1} &= (1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\ldots)\\ &\times(1+e\cos u+e^2\cos^2 u+\ldots),\end{aligned}$$

który w wyrażenie na A_k nie wchodzi.

Pomnożywszy przez siebie wzory (5) i (9) i zważywszy, że przy całkowaniu należy zatrzymać nie tylko wyrazy, zawierające $\cos^2 ku$ i $\sin^2 ku$, ale i te, które zawierają $\cos ku \cos pu \cos hu$, gdzie $h=k+p$, albo $h=k-p$, ponieważ:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^\pi \cos ku \cos pu \cos(k+p)u\,du &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2(k+p)u\,du\\ &+\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(k-p)u\cos(k+p)u\,du=\frac{\pi}{4}.\\ \int_0^\pi \cos ku \cos pu \cos(k-p)u\,du &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(k+p)u\cos(k-p)u\,du\\ &+\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2(k-p)u\,du=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^\pi \sin ku \sin pu \cos(k+p)u\,du &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2(k+p)u\,du\\ &+\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(k-p)u\cos(k+p)u\,du=-\frac{\pi}{4},\\ \int_0^\pi \sin ku \sin pu \cos(k-p)u\,du &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(k+p)u\cos(k-p)u\,du\\ &+\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2(k-p)u\,du=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}\right.$$

otrzymujemy na C_k wzór następujący:

$$\frac{k}{2}C_k = MP, \tag{12}$$

gdzie:

$$P = \left\{1 - 2\left(\frac{e}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{e}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{e}{2}\right)^6 - \ldots\right\},$$

$$M = \left\{\frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^p}{1.2.3\ldots p} - \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^{p+2}}{1.2.3\ldots p(p+1)}\right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^{p+4}}{1.2.1.2.3\ldots p(p+1)(p+2)} - \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^{p+6}}{1.2.3.1.2.3\ldots p(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots\right\}$$

$$\times\left\{\left(\frac{e}{2}\right)^{k-p} + (k-p+2)\left(\frac{e}{2}\right)^{k-p+2}\right.$$

$$+ \frac{(k-p+4)(k-p+3)}{1.2}\left(\frac{e}{2}\right)^{k-p+4} + \frac{(k-p+6)(k-p+5)(k-p+4)}{1.2.3}\left(\frac{e}{2}\right)^{k-p+6} + \ldots$$

$$\pm\left(\frac{e}{2}\right)^{k+p} \pm (k+p+2)\left(\frac{e}{2}\right)^{k+p+2}$$

$$\left.\pm\frac{(k+p+4)(k+p+3)}{1.2}\left(\frac{e}{2}\right)^{k+p+4} \pm \ldots\right\},$$

$$p = 0, 1, 2, 3, \ldots, k, k+1, k+2\ldots$$

W wyrażeniu na M należy $k-p$ brać zawsze dodatnie, bo $\cos(k-p) = \cos(p-k)$; wyrazy poprzedzone znakami $\pm$ brać ze znakiem $+$ dla p parzystego, ze znakiem $-$ dla p nieparzystego; w pierwszym bowiem razie mogą istnieć tylko całki typu (10), w drugim typu (11) (wynika to z wyrażenia na C_k jako iloczynu (5) przez (9)). Dla $p = 0$ wyrazy, poprzedzone znakami $\pm$, należy pominąć, gdyż w tym razie całki typu (11) znikną, a całki typu (10) zamienią się na całki $\int\limits_0^\pi \cos^2 ku$, które już są w wyrażeniu osobno uwzględnione.

Marya Brońska.