O SPÓŁRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH PUNKTU I PROSTEJ

napisał

Kazimierz Cwojdziński.

W tomie IV „Wiadomości matematycznych" znajduje się na str. 44—51 przekład pracy p. G. Loria „O spółrzędnych biegunowych", w której autor wprowadza także ujemne promienie wodzące do rachunku.

Podajemy tu kilka przykładów, które nadają się do wykazania użyteczności tej prostej myśli, a następnie wprowadzimy analogiczne spółrzędne biegunowe prostej, które są względem spółrzędnych Plückera dla prostej tem, czem są spółrzędne biegunowe zwykłe względem spółrzędnych Descartes'a dla punktu.

S. Gundelfinger podał w „Archiv der Mathematik und Physik" (serya 3, tom II, str. 356) twierdzenie następujące:

Na każdej prostej, wychodzącej ze stałego punktu Q, odcina lemniskata (ogólna) cztery punkty P_i, tak, że iloczyn $QP_1 \,.\, QP_2 \,.\, QP_3 \,.\, QP_4$ jest stały.

Dodał jeszcze p. Gundelfinger, że twierdzenie to daje się rozciągnąć na każdą krzywą rzędu $2n$-tego; jeżeli wszystkie wyrazy równania jej względem zmiennych (spółrzędnych Descartes'a prostokątnych) rzędu $2n$-tego zawarte są w wyrazie $(x^2 + y^2)^n$.

Twierdzenie to daje się nader łatwo udowodnić [1]), jeżeli przyjmiemy właśnie wyżej wspomniane spółrzędne biegunowe z rozszerzeniem p. G. Loria.

Oznaczmy symbolicznie stronę lewą równania rzeczonego typu krzywych przez $G(x, y) = 0$, t. j. połóżmy:

[1]) Dowód tego twierdzenia znajdzie się także w jednym z przyszłych zeszytów „Archiv der Math. u. Phys.".

$$G(x, y) \equiv (x^2 + y^2)^n + (g_0, g_1, \ldots \between x, y)^{2n-1} + \ldots \tag{1}$$
$$+ (b_0, b_1 \between x, y)^1 + a = 0$$

i podstawmy następnie:

$$x = x_1 + \alpha; \quad y = y_1 + \beta,$$

a otrzymamy znów równanie tego samego typu t. j.:

$$G_1(x_1, y_1) \equiv (x_1{}^2 + y_1{}^2)^n + (\ldots \between x_1, y_1)^{2n-1} + \ldots \tag{2}$$
$$+ (\ldots \between x_1, y_1)^1 + G(\alpha, \beta) = 0,$$

gdzie $G(\alpha, \beta)$ oznacza wynik podstawienia spółrzędnych α, β za x, y w równaniu (1). Gdy obecnie wprowadzimy w równaniu (2) spółrzędne biegunowe, kładąc:

$$x_1 = r\cos\vartheta; \quad y_1 = r\sin\vartheta$$

będziemy mieli:

$$r^{2n} + r^{2n-1}(\ldots) + \ldots + r^1(\ldots) + G(\alpha, \beta) = 0,$$

z teoryi równań zaś wynika, że między $2n$ wartościami na r zachodzi związek:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \ldots \cdot r_{2n} = G(\alpha, \beta). \tag{3}$$

Długości r są, jak wiadomo, liczone od stałego punktu (α, β) odniesionego do dawnego układu (1), aż do każdorazowego przecięcia się promienia wodzącego z krzywą. Ten iloczyn, który, jak widoczna, od wartości kąta ϑ jest niezależny, nazwijmy „potęgą punktu względem krzywej $G(x, y) = 0$".

Udowodniwszy twierdzenia p. Gundelfingera, otrzymaliśmy równocześnie następujące:

Jeżeli w równaniu krzywej typu $G(x, y) = 0$ podstawimy za x i y spółrzędne dowolnego punktu (α, β), to wynik podstawienia stanie się równy potędze owego punktu względem krzywej.

Z równania (3) wynika dalej, że równaniem miejsca punktów równych potęg względem dwu krzywych rzędu równego i typu $G(x, y)$ jest:

$$G_1(x, y) - G_2(x, y) = 0,$$

a z tożsamości:

$$(G_1 - G_2) + (G_2 - G_3) + (G_3 - G_1) \equiv 0$$

wynika, że trzy miejsca punktów równych potęg względem każdych dwu z trzech krzywych rzędu równego i typu $G(x, y)$ należą do tego samego pęku.

Co powyższe twierdzenia czyni najciekawszemi, to może ta okoliczność, że do typu $G(x, y) = 0$ należą następujące z pomiędzy pospolicie znanych krzywych: koło, jajo Cassini'ego, lemniskata Bernoulli'ego, ślimakowa Pascala, kardioida i t. d.

Krzywa, którą p. Loria podał jako przykład na str. 49 rzeczonej pracy:

$$(x^2 + y^2)^3 - 4R(x^2 + y^2)^2 + 4R^2x^2 = 0$$

należy też oczywiście do typu $G(x, y) = 0$; do niej stosują się zatem wyprowadzone wyżej twierdzenia. Prócz tego posiada ta krzywa jeszcze jednę ciekawą własność, która się odnosi do promieni poprowadzonych z jej środka.

Kładąc w jej równaniu $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ i dzieląc przez r^2, otrzymamy:

$$r^4 - 4Rr^2 + 4R^2\cos\vartheta = 0;$$

stąd, ponieważ równanie to jest względem r^2 jest stopnia drugiego, wynika:

$$r_1^2 + r_2^2 = 4R.$$

A zatem: krzywa $(x^2 + y^2)^3 - 4R(x^2 + y^2)^2 + 4R^2x^2 = 0$ wyznacza na półprostej wodzącej z jej środka dwa punkty takie, że suma kwadratów ich odległości od środka jest stała (i równa $4R$).

Podajmy nakoniec pewną własność pokrewną, odnoszącą się do stożkowych.

Z równania biegunowego krzywej rzędu 2-go:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta},$$

wynika dla $\vartheta_1 = a$ i $\vartheta_2 = a + 180$

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos a}; \text{ oraz } r_2 = \frac{p}{1 - e \cos a}.$$

Rugując z tych dwu równań $e \cos a$, otrzymamy związek:

$$\frac{2 r_1 \,.\, r_2}{r_1 + r_2} = p.$$

A więc: na każdej krzywej rzędu 2-go odcina prosta, przez jedno z ognisk F idąca, dwa takie punkty P_1, P_2, że średnia harmoniczna odcinków FP_1 i FP_2 t. j. wielkość $\frac{2 FP_1 \,.\, FP_2}{FP_1 + FP_2}$ jest stała i równa parametrowi p.

Przejdźmy obecnie do spółrzędnych biegunowych prostej.

Spółrzędnemi Plückera linii prostej, odcinającej na osiach prostokątnych X i Y odcinki a i b, nazywamy dwie wielkości u i v, określone równaniami:

$$u = -\frac{1}{a}; \quad v = -\frac{1}{b}.$$

Nazwijmy spółrzędnemi biegunowemi linii prostej dwie wielkości ϱ i φ, z których pierwsza określa się równaniem:

$$\varrho = -\frac{1}{p},$$

gdzie p jest długością prostopadłej z początku układu na tęż prostę, a φ kątem, który ta prostopadła czyni z osią X.

Wychodząc z tych określeń, otrzymamy bezpośrednio wzory, służące do przejścia od układu Plückera do układu spółrzędnych biegunowych prostej, t. j.

$$u = \varrho \cos\varphi\,;\quad v = \varrho \sin\varphi\,, \tag{4}$$

z tych zaś dwu wzorów wynika trzeci:

$$u^2 + v^2 = \varrho^2\,.$$

Są to wzory, zupełnie analogiczne do wzorów na przejście od układu Descartes'a do spółrzędnych biegunowych punktu.

Kładąc w równaniu punktu i zarazem prostej

$$ux + vy + 1 = 0:$$

$$x = r\cos\vartheta\,;\quad y = r\sin\vartheta\,;\quad u = \varrho\cos\varphi\,;\quad v = \varrho\sin\varphi\,,$$

otrzymamy równanie tego punktu lub tej prostej w spółrzędnych biegunowych:

$$r\,.\,\varrho\cos(\vartheta - \varphi) + 1 = 0\,,$$

zależnie od tego, czy r i ϑ, czy też ϱ i φ są zmienne.

Co do znaków spółrzędnej ϱ należy poczynić te same uwagi, jakie p. Loria czyni o spółrzędnej odpowiedniej punktu.

Wykazawszy zupełną analogię z jednej strony między spółrzędnemi Descartes'a a spółrzędnemi biegunowemi punktu, z drugiej jest między spółrzędnemi Plückera a spółrzędnemi biegunowemi prostej, uczynimy z tych ostatnich pewien użytek.

Wiadomo, że równanie każdej krzywej klasy 2-giej w spółrzędnych Plückera (prostokątnych), da się przez przesunięcie początku układu do jednego z jej ognisk doprowadzić do postaci:

(5) $$u^2 + v^2 + au + bv + \mathfrak{c} = 0\,.$$

Wprowadzając obecnie spółrzędne biegunowe prostej

$$u = \varrho \cos\varphi\,;\ v = \varrho \sin\varphi\,,$$

otrzymamy:

$$\varrho^2 + \varrho\,(a\cos\varphi + b\sin\varphi) + \mathfrak{c} = 0\,;$$

skąd wynika:

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \mathfrak{c}\,.$$

Znając określenie wielkości ϱ otrzymamy twierdzenie:

Dwie równoległe styczne do krzywej stopnia drugiego odcinają na prostej, do nich z jednego z ognisk F prostopadle wyprowadzonej, dwa punkty P_1, P_2, tak że iloczyn:

$$FP_1\,.\,FP_2 \text{ jest stały.}$$

Twierdzenie to zwykle bywa wypowiadane w tej postaci: „spodki prostopadłych z ognisk na styczne krzywych stopnia 2-go leżą na kole".

Lwów 4 kwietnia 1902 r.