parą liczb, oddzielonych znakiem dzielenia. Lecz to sprowadziłoby dwuznaczność, gdyż we wszystkich podręcznikach wyrażenia $2 + 2$, 2×3, $6 - 2$, 2^2, ... są tylko różnemi nazwami tej samej liczby 4.

Zauważmy nakoniec, iż każdy znak lub wyraz, określone w nauce, mogą być usunięte pod warunkiem, iż zastąpimy je przez jego wartość. Inaczej mówiąc, każda definicya oznacza pewne skrócenie, które nie jest konieczne teoretycznie; może być ono dogodne, a nawet — praktycznie rzecz biorąc — nieodzowne dla rozwoju nauki.

Usunięcie w pewnej teoryi określonego znaku jest bardzo pożytecznem ćwiczeniem w celu rozpoznawania ścisłości definicyi; definicya bowiem jest niezupełna, jeśli zdarzy się, że nie można jej wszędzie zastąpić przez jej wartość. Służy ono także do oceny użyteczności definicyi, jeśli bowiem podania, w których stoi określony znak, po ich usunięciu, nie stają się zbyt długie, należy go usunąć. W podręcznikach matematyki wiele jest wyrazów, które należałoby usunąć.

T. Łopuszański,

ZARYS TEORYI LICZB WZGLĘDNYCH.

Matematyka [1]) w rozwoju swoim była ściśle związana ze światem fizycznym. Podstawowe jej pojęcia powstały jako abstrakcye z całego szeregu obserwacyj, względnie doświadczeń, a i dalszy jej rozwój był w znacznej części nie samodzielny, lecz oparty na zastosowaniach i analogiach geometrycznych i przyrodniczych. Ta metoda tworzenia się wprowadziła w podstawy matematyki pewne zamieszanie, spowodowała wiele niejasności w jej zasadniczych pojęciach i definicyach, co utrudniało w wysokim stopniu dalszy rozwój. W interesie nauki zatem

[1]) Wyrazu tego używam tu na oznaczenie czystej analizy, z wyłączeniem geometryi.

okazało się koniecznem przeprowadzić ścisłą rewizyę jej podstaw, uwolnić ją od wszelkich obcych wpływów, przebudować całkowicie, jako niezależną, o ile możności, naukę i w ten sposób wyjaśnić i ustalić podstawy, na których ma się dalej budować. Pracę tę przedsięwzięto głównie w drugiej połowie tego wieku. Okazała się ona nader trudną, pomimo że pierwszorzędne umysły matematyczne wzięły w niej udział— i dotąd nie można jej uważać za ukończoną. Rezultaty jednak warte były wysiłków i to nietylko ze stanowiska czysto matematycznego, ale i z ogólno-filozoficznego, gdyż rzuciły jasne światło na proces myślenia, na proces tworzenia się i rozwoju pojęć i t. p. Co do strony czysto matematycznej tych badań pokazało się, że wszelkie ogólne definicye, jak np. definicya „wielkości“ w ogóle, są bezcelowe, a nawet niemożliwe, i że jedyną drogą jest przechodzenie od pojęć najprostszych, drogą ścisłych definicyj, do pojęć kolejno coraz ogólniejszych.

Niektóre gałęzie podstaw matematyki szczególnie zwracały na siebie uwagę uczonych, a mianowicie te, które stały w bezpośrednim związku i stanowiły bezpośrednie podstawy analizy nieskończonostkowej i teoryi funkcyj; tak np. kwestya liczb niewymiernych została należycie wyjaśniona dzięki pięknym pracom Dedekinda i Cantora. Inne, elementarniejsze działy podstaw matematyki mniej pociągały badaczy i dla tego niejedno w nich pozostaje jeszcze do wyjaśnienia. Na największe i bardzo zasadniczej natury trudności napotyka się przy teoryi liczb szeregu naturalnego, która stanowi właściwą podstawę całej matematyki, i gdzie jedynie, jak się zdaje, matematyka musi się oprzeć na doświadczeniu; mniej trudności napotyka się przy wprowadzaniu liczb ujemnych (względnych) i ułamkowych (wymiernych).

W pracy tej chcę właśnie przedstawić ścisłą, a czysto arytmetyczną teoryę liczb względnych [1]), w jej logicznym związku z poprzednimi działami arytmetyki [2]). Nim jednak przystąpimy do rzeczy, należy

---

[1]) P. S. Dickstein był łaskaw zwrócić moją uwagę, że zasadniczy pomysł tej pracy znajduje się już w pracy Lercha „Základové ryze arithmetické theorie veličin. Athenaeum. Praga 1886. Mimo to jednak pracę tę ogłaszam, ponieważ zachodzą istotne różnice w rozwinięciu pomysłu.

[2]) Połączenie logiczne między pewną dziedziną pojęć a dziedziną pojęć ogólniejszych, uważam za konieczne, wyjaśnia ono bowiem znakomicie sam proces uogólniania i rzuca światło na wzajemny stosunek różnych części matematyki.

określić, co przyjmiemy za znane. Otóż przypuścimy, że zostały już wprowadzone liczby szeregu naturalnego, ułamki i liczby niewymierne, tudzież ich własności. Wszystkie te znane liczby będziemy w dalszym ciągu obejmowali wspólną nazwą: „liczby dodatnie“ [1]).

1. Liczby względne.

Przyjmujemy jako znane liczby dodatnie i ich własności, czy to wykryte drogą doświadczenia, a więc będące postulatami, czy to wprowadzone jako definicye, czy na koniec udowodnione na podstawie pierwszych i drugich, a więc będące twierdzeniami.

Jak wiadomo, na podstawie umowy, symbol $a—b$ (gdzie a i b są liczbami dodatniemi) przedstawia liczbę, która dodana do b, daje na sumę liczbę a. Wiadomo dalej, że w przypadku, gdy $a > b$, symbol $a - b$ przedstawia liczbę dodatnią, jeżeli zaś $a \leqq b$, wtedy symbol ten nie przedstawia żadnej liczby dodatniej, czyli żadnej z liczb znanych — innemi słowy nie ma znaczenia.

Aby zakres naszych pojęć matematycznych rozszerzyć, nadajmy i w tym przypadku, gdy $a \leqq b$, symbolowi $a - b$ znaczenie, t. j. załóżmy, że przedstawia on jakąś liczbę nową; nową tę liczbę oznaczmy inaczej symbolem $[a, b]$ Symbole $a - b$ i $[a, b]$ przedstawiają zatem tę samą liczbę:

$$a - b = [a, b]\,. \tag{1}$$

Wprowadziliśmy nową klasę liczb; są to liczby $[a, b]$, przy $a \leqq b$. Ponieważ każda z liczb dawniej znanych, t. j. liczb dodatnich, da się przedstawić w postaci $a - b$, przeto, jeżeli zrobimy umowę, że w przypadku $a > b$ różnicę $a - b$ będziemy oznaczali również symbolem $[a, b]$, możemy uzyskać jednostajność w oznaczaniu liczb. Wszystkie liczby, zarówno dodatnie, jak liczby nowe, możemy przedstawić w postaci

$$[a, b]\,,$$

[1]) Przyjmujemy, że liczba zero nie została jeszcze wprowadzona, wprowadzimy ją razem z liczbami ujemnemi.

gdzie a i b są zupełnie dowolnemi liczbami dodatniemi. Liczby te obejmujemy wspólną nazwą liczb względnych. W przypadku $a > b$ są liczby względne identyczne z liczbami dodatniemi.

Definicya 1. Liczby względne $[a, b]$ w przypadku $a = b$, a więc liczby względne postaci $[a, a]$, nazywamy liczbami względnemi zerowemi.

Definicya 2. Wartością bezwzględną liczby względnej $[a, b]$ nazywamy liczbę dodatnią, którą otrzymamy, odejmując mniejszą z liczb dodatnich a, b, od większej. Wartość bezwzględną liczby $[a, b]$ będziemy oznaczali symbolem $|a, b|$.

Uwaga. Z definicyi tej wynika, że liczby względne zerowe nie mają wartości bezwzględnych. Innemi słowy symbol $|a, a|$ nie ma tu znaczenia.

Przypatrując się różnym liczbom względnym, spostrzegamy, że cały ich szereg może przedstawiać tę samą liczbę dodatnią, np. wszystkie liczby $[4, 1]$, $[5, 2]$, $[6, 3]$, ... przedstawiają liczbę 3. Liczby takie musimy nazwać równemi. Idzie teraz o podanie cechy, po której moglibyśmy poznać, kiedy dwie liczby względne przedstawiają tę samą liczbę dodatnią. Widocznem jest, że dwie liczby $[a, b]$, $[c, d]$ przedstawiają tę samą liczbę dodatnią, jeżeli jest równocześnie $a > b$, $c > d$ i jeżeli $|a, b| = |c, d|$. Rezultat ten rozciągniemy na wszystkie liczby względne za pomocą następującej definicyi:

Definicya 3. Dwie liczby względne $[a, b]$, $[c, d]$ nazywamy równemi:

$$[a, b] = [c, d],$$

jeżeli zachodzi jeden z następujących przypadków:

$$1)\quad a > b,\quad c > d,\qquad |a, b| = |c, d|,$$

$$2)\quad a < b,\quad c < d,\qquad |a, b| = |c, d|,$$

$$3)\quad a = b,\quad c = d.$$

Wniosek 1. Każda liczba względna jest równa sobie samej.

Wniosek 2. Wszystkie liczby względne zerowe są sobie równe.

Twierdzenie 1. Dwie liczby względne, z których każda jest równa tej samej liczbie trzeciej, są sobie równe.

Dowód. Niech będzie:

$$[a, b] = [m, n] ,$$
$$[c, d] = [m, n] ;$$

jeżeli zachodzi tu (definicya 3) przypadek trzeci, to mamy:

$$a = b , \; m = n , \; c = d ,$$

a więc:

$$[a, b] = [c, d] .$$

W innych przypadkach mamy:

$$(2) \qquad \begin{cases} |a, b| = |m, n| \\ |c, d| = |m, n| \end{cases}$$

i albo

$$(3) \qquad a > b , \; m > n , \; c > d ,$$

albo

$$(3') \qquad a < b , \; m < n , \; c < d .$$

Ponieważ dla liczb dodatnich istnieje twierdzenie, odpowiadające naszemu, przeto z równań (2) wynika, że:

$$|a, b| = |c, d| ,$$

a z tego równania i z nierówności (3), względnie (3'), otrzymujemy na podstawie definicyi 3:

$$[a, b] = [c, d] ,$$

co było do udowodnienia.

2. Działania zasadnicze.

Zajmiemy się teraz określeniem dodawania liczb względnych. Ponieważ liczby względne mogą być identyczne z liczbami dodatniemi, przeto musimy tak określić dodawanie liczb względnych, aby w przypadku, gdy one są liczbami dodatniemi, dawało ono rezultaty zgodne z rezultatami, otrzymanemi zwykłą drogą. Zrobimy to w następujący sposób:

Niech liczby względne $[a, b]$ i $[c, d]$ przedstawiają liczby dodatnie p i q:

$$[a, b] = p\,,\ [c, d] = q\,; \tag{4}$$

widocznem jest, że należy tak określić dodawanie liczb względnych, aby w tym przypadku było:

$$[a, b] + [c, d] = p + q\,. \tag{5}$$

Lecz z równań (4) wynika, że

$$a - b = p\,,\ c - d = q\,,$$

czyli:

$$a = b + p\,,\ c = d + q\,,$$

a stąd na podstawie znanych własności liczb dodatnich otrzymujemy:

$$a+c=(b+p)+(d+q)=b+p+d+q=b+d+p+q=(b+d)+(p+q)\,,$$

czyli ostatecznie:

$$(a + c) - (b + d) = p + q\,.$$

Z tego równania i z równania (5) wynika wprost:

$$[a, b] + [c, d] = [(a + c),\ (b + d)]\,.$$

Rezultat ten rozciągniemy na wszystkie liczby względne za pomocą następującej definicyi:

Definicya 4. Sumą liczb względnych $[a, b]$, $[c, d]$ nazywamy liczbę względną $[(a + c), (b + d)]$:

$$[a, b] + [c, d] = [(a + c), (b + d)] .$$

Twierdzenie 2. Suma dwóch liczb nie zależy od porządku składników:

$$[a, b] + [c, d] = [c, d] + [a, b] \text{ [1]} .$$

Dowód łatwy.

Twierdzenie 3.

$$[a, b] + [c, c] = [a, b] .$$

Dowód. Symbol $[a, b] + [c, c]$ przedstawia liczbę względną $[(a + c), (b + c)]$, ta zaś liczba jest równa liczbie $[a, b]$, gdyż jeżeli $a = b$, to i $a + c = b + c$, jeżeli $a > b$, to i $a + c > b + c$, a zarazem $(a + c) - (b + c) = a - b$, jeżeli zaś $a < b$, to $a + c < b + c$ i $(b + c) - (a + c) = b - a$.

Twierdzenie 4. Jeżeli w sumie dwóch liczb względnych jednę z nich zastąpimy inną liczbą, jej równą, to nowa suma będzie równa sumie dawnej.

Innemi słowy, jeżeli:

$$[c, d] = [m, n] , \tag{6}$$

to:

$$[a, b] + [c, d] = [a, b] + [m, n] ,$$

czyli:

$$[(a + c), (b + d)] = [(a + m), (b + n)] . \tag{7}$$

Dowód. W przypadku $c = d$, $m = n$ twierdzenie nasze wynika wprost z twierdzenia 3, pozostaje więc przeprowadzić dowód dla dwóch następujących przypadków:

---

[1]) Symbole, znajdujące się po obu stronach tego równania, przedstawiają nie tylko dwie równe liczby względne, lecz tę samą liczbę.

$$\text{I)}\quad c > d\,,\ m > n\,,\ c - d = m - n\,,$$

$$\text{II)}\quad c < d\,,\ m < n\,,\ d - c = n - m\,.$$

Chcąc udowodnić równanie (7), należy rozważyć osobno trzy przypadki następujące:

$$1)\quad a + c > b + d\,,$$

$$2)\quad a + c < b + d\,,$$

$$3)\quad a + c = b + d\,;$$

widzimy więc, że twierdzenie nasze trzeba udowadniać z osobna w każdym z sześciu przypadków: I 1, I 2, I 3, II 1, II 2, II 3. Przeprowadzimy tu dowód tylko dla przypadku I 1; w innych przypadkach dowody przeprowadza się tak samo. Mamy zatem:

$$(8)\qquad c > d\,,\ m > n\,,\ c - d = m - n\,,$$

$$(9)\qquad a + c > b + d\,.$$

Z tej ostatniej nierównęści wynika:

$$a + c - d > b\,,$$

lub, ponieważ $c > d$:

$$a + (c - d) > b\,,$$

a stąd na podstawie (8):

$$a + (m - n) > b$$

$$(10)\qquad a + m - n > b$$

$$a + m > b + n\,.$$

Prócz tego mamy:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = a + c - d - b = a + (c - d) - b$$

$$= a + (m - n) - b = a + m - n - b = a + m - b - n = (a + m) - (b + n,)$$

a więc:

$$(11) \qquad (a+c)-(b+d)=(a+m)-(b+n).$$

Z równań (9), (10), (11) wynika, że:

$$[(a+c), (b+d)]=[(a+m), (b+n)],$$

co było do udowodnienia.

Twierdzenie 5. Suma liczb względnych $[a, b]$ i $[b, a]$ jest równa liczbie względnej zerowej.

Dowód. Wiadomo, że

$$[a, b]+[b, a]=[(a+b), (b+a)],$$

ta zaś ostatnia liczba względna jest zerową, gdyż $a+b=b+a$.

Chcąc wprowadzić odejmowanie liczb względnych, weźmy najpierw dwie liczby względne $[a, b]$, $[c, d]$, przedstawiające liczby dodatnie p, q:

$$(12) \qquad [a, b]=p, \quad [c, d]=q,$$

przyczem niech będzie np. $p>q$. Odejmowanie liczb względnych musimy tak określić, aby różnica $[a, b]-[c, d]$ przedstawiała w tym przypadku liczbę $p-q$:

$$(13) \qquad [a, b]-[c, d]=p-q.$$

Z równań (12) mamy:

$$a-b=p \quad , \quad c-d=q,$$

czyli:

$$a=b+p \quad , \quad c=d+q,$$

a stąd:

$$a+d+q=b+c+p,$$

$$a+d=b+c+p-q,$$

lub z powodu, że $p > q$:

$$a + d = (b + c) + (p - q)\,;$$

ostatecznie zatem:

$$(a + d) - (b + c) = p - q\,,$$

a więc z równania (13) otrzymujemy:

$$[a, b] - [c, d] = [(a + d), (b + c)]\,.$$

Rezultat ten uogólnimy za pomocą następującej definicyi:

Definicya 5. Różnicą liczb względnych $[a, b]$, $[c, d]$ nazywamy liczbę względną $[(a + d), (b + c)]$:

$$[a, b] - [c, d] = [(a + d), (b + c)]\,.$$

Twierdzenie 6. Suma, utworzona z różnicy i odjemnika, jest równa odjemnej.

Dowód. Jak wiadomo:

$$[a, b] - [c, d] = [(a + d), (b + c)]\,;$$

otóż:

$$[(a + d), (b + c)] + [c, d] = [(a + c + d), (b + c + d)]\,,$$

a widocznem jest, że:

$$[(a + c + d), (b + c + d)] = [a, b]\,,$$

gdyż zależnie od tego, czy $a > b$, $a < b$, $a = b$ jest i $a + c + d > b + c + d$, $a + c + d < b + c + d$, $a + c + d = b + c + d$, a na tej podstawie łatwo już można udowodnić, że w pierwszych dwóch przypadkach

$$|(a + c + d), (b + c + d)| = |a, b|\,.$$

Twierdzenie 7.

$$[a, b] - [c, c] = [a, b]\,.$$

Dowód. Symbol $[a, b] - [c, c]$ przedstawia liczbę względną

$[(a+c), (b+c)]$, ta zaś jest równa liczbie $[a, b]$, jak to wykazaliśmy przy twierdzeniu 3.

Twierdzenie 8.

$$[a, a] - [b, c] = [c, b] .$$

Dowód. Symbol $[a, a] - [b, c]$ przedstawia liczbę względną $[(a+c), (a+b)]$, ta zaś jest widocznie równa liczbie $[c, b]$.

Twierdzenie 9. Jeżeli w różnicy dwóch liczb względnych odjemną zastąpimy inną liczbą względną, jej równą, to nowa różnica będzie równa dawnej.

Innemi słowy, jeżeli:

$$[a, b] = [m, n] ,$$

to

$$[a, b] - [c, d] = [m, n] - [c, d] ,$$

czyli

$$[(a+d), (b+c)] = [(m+d), (n+c)] .$$

Dowód. Gdy $a = b$, $m = n$, twierdzenie nasze wynika wprost z twierdzenia 8; pozostaje zatem przeprowadzić dowód dla dwóch pozostałych przypadków:

$$\text{I)} \quad a > b , \; m > n , \; a - b = m - n ,$$

$$\text{II)} \quad a < b , \; m < n , \; b - a = n - m ;$$

przyczem w każdym z nich należy jeszcze rozróżnić trzy przypadki następujące:

$$1) \quad a + d > b + c ,$$

$$2) \quad a + d < b + c ,$$

$$3) \quad a + d = b + c ,$$

tak, że musimy dowód przeprowadzić osobno dla każdego z sześciu przypadków: I 1, I 2, I 3, II 1, II 2, II 3. Ograniczymy się tu do przy-

padku I 1; w innych przypadkach przeprowadzenie jest zupełnie podobne.

Mamy w tym przypadku

$$a > b\,,\ m > n\,,\ a - b = m - n\,, \tag{14}$$

$$a + d > b + c\,; \tag{15}$$

z tej ostatniej nierówności otrzymujemy:

$$a + d - b > c\,,$$

lub z powodu, że $a > b$:

$$a - b + d > c\,,$$

a stąd na podstawie (14):

$$m - n + d > c\,,$$

$$m + d > n + c\,. \tag{16}$$

Mamy również:

$$(a + d) - (b + c) = a + d - b - c = a - b + d - c$$
$$= m - n + d - c = m + d - n - c\,,$$

a więc:

$$(a + d) - (b + c) = (m + d) - (n + c)\,. \tag{17}$$

Z równań (15), (16), (17) wynika, że

$$[(a + d), (b + c)] = [(m + d), (n + c)]\,,$$

co było do udowodnienia.

Twierdzenie 10. Jeżeli w różnicy dwóch liczb względnych zastąpimy odjemnik inną, równą mu liczbą względną, to nowa różnica będzie równa dawnej.

Dowód zupełnie podobny do poprzedniego.

Twierdzenie 11. Różnica dwóch równych liczb względnych jest liczbą względną zerową.

Dowód. Niech będzie:

$$[a, b] = [c, d]; \tag{18}$$

wiadomo z definicyi odejmowania, że:

$$[a, b] - [c, d] = [(a + d), (b + c)].$$

Lecz z równania (18) wynika, że zachodzi jeden z trzech następujących przypadków:

1) $a > b$, $c > d$, $a - b = c - d$

2) $a < b$, $c < d$, $b - a = d - c$

3) $a = b$, $c = d$.

W pierwszym przypadku z równania

$$a - b = c - d$$

otrzymujemy wprost:

$$a + d = b + c,$$

z czego wynika, że nasza różnica jest rzeczywiście liczbą względną zerową. Podobny dowód łatwo przeprowadzić w dwóch pozostałych przypadkach.

Przejdźmy teraz do mnożenia liczb względnych. Weźmy najpierw dwie liczby względne $[a, b]$ i $[c, d]$, będące liczbami dodatniemi p i q:

$$[a, b] = p \quad , \quad [c, d] = q. \tag{19}$$

Mnożenie liczb względnych należy tak określić, aby iloczyn $[a, b] . [c, d]$ przedstawiał w tym przypadku liczbę dodatnią $p . q$:

$$[a, b] . [c, d] = p . q. \tag{20}$$

Z równań (19) wynika:

$$a - b = p \quad , \quad c - d = q,$$

czyli:

$$a = b + p \quad , \quad c = d + q \, ,$$

skąd otrzymujemy:

$$ac = (b + p) \, . \, (d + q) = bd + pd + qb + pq$$
$$= bd + (a - b) \, d + (c - d) \, b + pq$$
$$= bd + ad - bd + bc - bd + pq = ad + bc - bd + pq$$
$$ac + bd = ad + bc + pq \, ,$$

a więc:

$$pq = (ac + bd) - (ad + bc) \, ,$$

równanie (20) możemy zatem napisać w postaci:

$$[a, b] \, . \, [c, d] = [(ac + bd), (ad + bc)] \, .$$

Rezultat ten rozciągniemy na wszystkie liczby względne za pomocą następującej definicyi:

Definicya 6. Iloczynem dwóch liczb względnych $[a, b]$ i $[c, d]$ nazywamy liczbę względną $[(ac + bd), (ad + bc)]$:

$$[a, b] \, . \, [c, d] = [(ac + bd), (ad + bc)] \, .$$

Twierdzenie 12. Iloczyn dwóch liczb względnych nie zależy od porządku czynników:

$$[a, b] \, . \, [c, d] = [c, d] \, . \, [a, b] \, ^{1)}.$$

Dowód wprost widoczny.

Twierdzenie 13. Każda liczba względna, pomnożona przez liczbę względną zerową, daje na iloczyn liczbę względną zerową.

Dowód. Z definicyi mnożenia wynika, że

$$[a, b] \, . \, [c, c] = [(ac + bc), (ac + bc)] \, ,$$

---

[1]) Symbole po obu stronach przedstawiają tę samą liczbę względną.

ta zaś ostatnia liczba jest widocznie liczbą względną zerową.

Uwaga. Z twierdzenia 12 wynika, że iloczyn liczby względnej zerowej przez dowolną liczbę względną jest również liczbą względną zerową.

Twierdzenie 14. Jeżeli w iloczynie dwóch liczb względnych jednę z nich [1]) zastąpimy inną liczbą, jej równą, to nowy iloczyn będzie równy dawnemu.

Innemi słowy, jeżeli:

$$[c, d] = [m, n],$$

to:

$$[a, b] . [c, d] = [a, b] . [m, n],$$

czyli:

$$[(ac + bd), (ad + bc)] = [(am + bn), (an + bm)].$$

Dowód. W przypadku $c = d$, $m = n$ twierdzenie nasze wynika wprost z twierdzenia 13, pozostaje nam więc przeprowadzić dowód dla dwóch pozostałych przypadków:

$$\text{I)} \quad c > d, \; m > n, \; c - d = m - n,$$

$$\text{II)} \quad c < d, \; m < n, \; d - c = n - m;$$

w każdym z tych przypadków należy odróżnić trzy przypadki następujące:

$$1) \quad ac + bd > ad + bc,$$

$$2) \quad ac + bd < ad + bc,$$

$$3) \quad ac + bd = ad + bc,$$

tak, że twierdzenie nasze trzeba udowadniać osobno w każdym z sześciu przypadków: I 1, I 2, I 3, II 1, II 2, II 3. Zajmiemy się tu tylko przypadkiem I 1 — w innych dowód przeprowadza się tak samo.

---

[1]) Ze względu na twierdzenie 12, wszystko jedno którą.

Mamy zatem:

(21) $$c > d\,,\ m > n\,,\ c - d = m - n\,,$$

(22) $$ac + bd > ad + bc\,;$$

z (21) wynika, że

$$ac - ad = am - an$$
$$bc - bd = bm - bn\,,$$

zaś z równania (22) i z uwagi, że $c > d$:

$$ac - ad > bc - bd\,.$$

Z trzech ostatnich równań otrzymujemy:

$$am - an > bm - bn\,,$$

a stąd:

(23) $$am + bn > an + bm\,.$$

Prócz tego mamy:

$$(ac + bd) - (ad + bc) = ac + bd - ad - bc = ac - ad + bd - bc$$
$$= (ac - ad) - (bc - bd) = a(c - d) - b(c - d) = a(m - n) - b(m - n)$$
$$= (am - an) - (bm - bn) = am - an + bn - bm\,,$$

czyli ostatecznie:

(24) $$(ac + bd) - (ad + bc) = (am + bn) - (an + bm)\,.$$

Równania (22), (23) i (24) wykazują, że:

$$[(ac + bd), (ad + bc)] = [(am + bn), (an + bm)]\,,$$

co było do udowodnienia.

Zajmijmy się nakoniec dzieleniem. Weźmy najpierw liczby względne $[a, b]$ i $[c, d]$, przedstawiające liczby dodatnie p i q:

(25) $$[a, b] = p\quad,\quad [c, d] = q\,.$$

Dzielenie liczb względnych należy tak określić, aby w tym przypadku:

$$(26) \qquad [a, b] : [c, d] = p : q .$$

Z równań (25) wynika, że:

$$a - b = p \quad , \quad c - d = q ,$$

a więc:

$$p : q = \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c-d} - \frac{b}{c-d} .$$

Z równania (26) otrzymujemy zatem:

$$[a, b] : [c, d] = \left[\frac{a}{c-d} , \frac{b}{c-d} \right] .$$

Rezultatu tego jednak nie możemy przyjąć za definicyę dzielenia wszelkich liczb względnych, w każdej bowiem liczbie względnej $[x, y]$ zarówno x, jak y muszą być liczbami dodatniemi, a tymczasem u nas $\frac{a}{c-d}$, $\frac{b}{c-d}$ są niemi tylko w przypadku $c > d$, zaś w przypadkach $c < d$ i $c = d$ nie są niemi wcale, w tych więc przypadkach symbol $\left[\frac{a}{c-d} , \frac{b}{c-d} \right]$ nie ma znaczenia; innemi słowy, tego rodzaju definicya określałaby tylko dzielenie przez liczbę dodatnią. Z tego powodu musimy naszemu wzorowi nadać inną postać, a to w następujący sposób:

$$p : q = \frac{a-b}{c-d} = \frac{(a-b)(c-d)}{(c-d)^2} ,$$

lecz

$$(c - d)^2 = | c, d |^2 ,$$

a więc:

$$p : q = \frac{(a-b)(c-d)}{| c, d |^2} = \frac{ac-bc+bd-ad}{| c, d |^2} = \frac{ac+bd}{| c, d |^2} - \frac{ad+bc}{| c, d |^2} ;$$

z równania (26) otrzymujemy zatem:

$$[a, b] : [c, d] = \left[\frac{ac+bd}{|c, d|^2}, \frac{ad+bc}{|c, d|^2} \right].$$

Tu $\frac{ac+bd}{|c, d|^2}$ i $\frac{ad+bc}{|c, d|^2}$ są liczbami dodatniemi dla $c > d$ i $c < d$, a tylko w przypadku $c = d$ niemi nie są, a to dla tego, że w tym przypadku symbol $|c, d|$ nie ma żadnego znaczenia. Wzoru obejmującego i ten przypadek napisać nie można i dla tego ten najogólniejszy wzór przyjmiemy za definicyę dzielenia liczb względnych.

Definicya 7. Ilorazem liczb względnych $[a, b]$ i $[c, d]$ nazywamy liczbę względną $\left[\frac{ac+bd}{|c, d|^2}, \frac{ad+bc}{|c, d|^2} \right]$:

$$[a, b] : [c, d] = \left[\frac{ac+bd}{|c, d|^2}, \frac{ad+bc}{|c, d|^2} \right].$$

Uwaga. Należy tu wyraźnie zaznaczyć, co wynika wprost z naszej definicyi, że symbol $[a, b] : [c, d]$ w przypadku $c = d$ nie ma znaczenia, gdyż nie ma go w tym przypadku symbol $|c, d|$.

Twierdzenie 15. Iloczyn ilorazu i dzielnika jest równy dzielnej.

Dowód. Mamy:

$$[a, b] : [c, d] = \left[\frac{ac+bd}{|c, d|^2}, \frac{ad+bc}{|c, d|^2} \right];$$

z definicyi mnożenia wynika, że:

$$\left[\frac{ac+bd}{|c, d|^2}, \frac{ad+bc}{|c, d|^2} \right] . [c, d] = \left[\frac{a(c^2+d^2)+2bcd}{|c, d|^2}, \frac{b(c^2+d^2)+2acd}{|c, d|^2} \right].$$

Lecz liczba względna, tworząca prawą stronę tego równania, jest równa liczbie $[a, b]$; jeżeli bowiem $a > b$, to z uwagi, że $c^2+d^2 > 2cd$, mamy:

$$(a-b)(c^2+d^2) > (a-b) . 2cd,$$

czyli

$$a(c^2+d^2)+2bcd > b(c^2+d^2)+2acd,$$

a stąd:

$$(27)\qquad \frac{a(c^2+d^2)+2bcd}{|c,d|^2} > \frac{b(c^2+d^2)+2acd}{|c,d|^2};$$

mamy również w tym przypadku

$$\frac{a(c^2+d^2)+2bcd}{|c,d|^2} - \frac{b(c^2+d^2)+2acd}{|c,d|^2}$$

$$= \frac{(a-b)(c^2+d^2)-2cd(a-b)}{|c,d|^2} = \frac{(a-b)(c^2+d^2-2cd)}{|c,d|^2},$$

lub ponieważ $c^2+d^2-2cd = |c,d|^2$:

$$(28)\qquad \frac{a(c^2+d^2)+2bcd}{|c,d|^2} - \frac{b(c^2+d^2)+2acd}{|c,d|^2} = a-b.$$

Równania (27) i (28) stanowią dowód naszego twierdzenia w przypadku $a > b$; w przypadku $a < b$ dowód przeprowadza się tak samo, w przypadku zaś $a = b$ twierdzenie to jest wprost widoczne [1]).

Twierdzenie 16. Iloraz liczby względnej zerowej przez dowolną liczbę względną (nie zerową), jest liczbą względną zerową.

Dowód. Wiadomo, że

$$[a,a]:[b,c] = \left[\frac{ab+ac}{|b,c|^2}, \frac{ac+ab}{|b,c|^2}\right],$$

ta zaś ostatnia liczba względna jest całkiem widocznie zerową.

---

[1]) Twierdzenie to wyjaśnia nam zamieszczoną przy definicyi dzielenia uwagę, że symbol $[a,b]:[c,c]$ nie ma znaczenia, t. j. nie przedstawia żadnej liczby względnej. Rzeczywiście, gdyby przedstawiał jakąś liczbę względną, to liczba ta pomnożona przez $[c,c]$ dałaby na iloczyn liczbę $[a,b]$, z twierdzenia zaś 13-go wynika, że jeżeli $[a,b]$ nie jest również liczbą zerową, liczba taka nie istnieje.

Twierdzenie 17. Jeżeli w ilorazie dwóch liczb względnych jednę z nich zastąpimy inną liczbą, jej równą, to nowy iloraz będzie równy dawnemu.

Innemi słowy, jeżeli

$$[a, b] = [m, n],$$

to

$$[a, b] : [c, d] = [m, n] : [c, d]$$

i tak samo, jeżeli

$$[c, d] = [p, q],$$

to

$$[a, b] : [c, d] = [a, b] : [p, q].$$

Dowód zupełnie podobny do dowodu twierdzenia 14 pomijamy.

Na zakończenie tego paragrafu udowodnimy kilka jeszcze własności określonych powyżej działań.

Twierdzenie 18.

$$\{[a, b] + [c, d]\} + [e, f] = [a, b] + \{[c, d] + [e, f]\}.$$

Dowód. Wiadomo, że

$$\{[a, b] + [c, d]\} + [e, f] = [(a + c), (b + d)] + [e, f]$$
$$= [(a + c + e), (b + d + f)],$$
$$[a, b] + \{[c, d] + [e, f]\} = [a, b] + [(c + e), (d + f)]$$
$$= [(a + c + e), (b + d + f)];$$

twierdzenie nasze jest więc udowodnione.

Twierdzenie 19.

$$\{[a, b] . [c, d]\} . [e, f] = [a, b] . \{[c, d] . [e, f]\}.$$

Dowód. Wiadomo, że

$$\{[a, b] . [c, d]\} . [e, f] = [(ac + bd), (ad + bc)] . [e, f]$$
$$= [(ace + bde + adf + bcf), (acf + bdf + ade + bce)],$$
$$[a, b] . \{[c, d] . [e, f]\} = [a, b] . [(ce + df), (cf + de)]$$
$$= [(ace + adf + bcf + bde), (acf + ade + bce + bdf)];$$

twierdzenie nasze jest więc udowodnione.

Dwa ostatnie twierdzenia wyrażają t. zw. zasadę łączności.

Twierdzenie 20.

$$\{[a, b] + [c, d]\} . [e, f] = [a, b] . [e, f] + [c, d] . [e, f] .$$

Dowód. Mamy:

$$\{[a, b] + [c, d]\} . [e, f] = [(a + c), (b + d)] . [e, f)]$$
$$= [(ae + ce + bf + df), (af + cf + be + de)],$$
$$[a, b] . [e, f] + [c, d] . [e, f] = [(ae + bf), (af + be)] + [(ce + df), (cf + de)]$$
$$= [(ae + bf + ce + df), (af + be + cf + de)],$$

a więc twierdzenie nasze jest udowodnione.

Zupełnie tak samo udowadniają się następujące twierdzenia:

Twierdzenie 21.

$$\{[a, b] + [c, d]\} : [e, f] = [a, b] : [e, f] + [c, d] : [e, f] .$$

Twierdzenie 22.

$$\{[a, b] - [c, d]\} . [e, f] = [a, b] . [e, f] - [c, d] . [e, f] .$$

Twierdzenie 23.

$$\{[a, b] - [c, d]\} : [e, f] = [a, b] : [e, f] - [c, d] : [e, f] .$$

Twierdzenia 20, 21, 22, 23, wyrażają t. zw. zasadę rozdzielności.

3. Liczby względne uproszczone.

Cały szereg liczb względnych może przedstawiać tę samą liczbę dodatnią, np. liczby [4, 1], [5, 2], [6, 3] i t. d. są różnemi symbolami na oznaczenie tej samej liczby 3; wszystkie te liczby możemy zatem, jak to z całego poprzedniego paragrafu wynika, zastąpić identyczną z niemi liczbą 3. Uogólniając, załóżmy, że wszystkie równe sobie liczby względne przedstawiają tę samą liczbę; dostatecznem usprawiedliwieniem tego założenia są twierdzenia 4, 9, 10, 14, 17. Jeżeli np. mamy cały szereg równych sobie liczb względnych:

$$[a, b] = [c, d] = [e, f] = \ldots,$$

to przedstawiają one według powyższego założenia, jednę i tę samą liczbę; liczbę tę oznaczmy np. symbolem ξ. Symbol ξ i którakolwiek z powyższych liczb względnych mają to samo znaczenie, są identyczne, co wyrażamy, pisząc:

$$[a, b] = \xi\,,\ [c, d] = \xi\,,\ [e, f] = \xi\,, \ldots;$$

symbol ξ jest tylko innym sposobem pisania liczby względnej np. $[c, d]$ (por. równanie 1). Taki symbol ξ będziemy nazywali liczbą względną uproszczoną. Możemy zatem wypowiedzieć następującą definicyę:

Definicya 8. Liczbą względną uproszczoną nazywamy symbol, zastępujący ogół równych sobie liczb względnych.

Idzie teraz o obranie symboli, mających zastępować równe liczby względne; symbole te należy oczywiście dobrać w ten sposób, aby każdy symbol wyznaczał dokładnie szereg zastępowanych przez siebie liczb względnych. Przedewszystkiem więc musimy się zastanowić, jakie cechy charakteryzują w zupełności ogół równych sobie liczb względnych. Niech będą

$$[a, b] = [c, d] = [e, f] = \ldots$$

równemi sobie liczbami względnemi; jak wiadomo, mogą tu zachodzić trzy przypadki:

1) $a = b\,,\ c = d\,,\ e = f, \ldots,$

2) $a < b\,,\ c < d\,,\ e < f, \ldots,\quad |a, b| = |c, d| = |e, f| = \ldots,$

3) $a > b\,,\ c > d\,,\ e > f, \ldots,\quad |a, b| = |c, d| = |e, f| = \ldots.$

W pierwszym przypadku szereg naszych liczb względnych jest w zupełności wyznaczony tą jedną okolicznością, że $a = b$, $c = d$, $e = f, \ldots$; w tym przypadku będziemy wszystkie te równe liczby względne zastępowali symbolem 0. W przypadku drugim szereg nasz jest wyznaczony przez wspólną wartość bezwzględną liczb i przez okoliczność, że $a < b$, $c < d, \ldots$, dla tego w symbolu zastępującym ten szereg, musi występować oprócz tej wspólnej wartości bezwzględnej jeszcze jakiś znak, wskazujący na tę okoliczność, np. znak —; symbol w tym przy

padku będzie zatem $-|a, b|$. W trzecim przypadku nasze liczby względne przedstawiają, jak wiadomo, tę samą liczbę dodatnią $|a, b|$, sama ta liczba mogłaby zatem służyć w tym przypadku za żądany symbol; dla symetryi jednak piszemy go zwykle w kształcie $+|a, b|$, gdzie znak $+$ ma wyraźnie wskazywać, że $a > b$, $c > d, \ldots$ Liczba $+|a, b|$ jednak jest zupełnie jednoznaczna z liczbą $|a, b|$, np. liczba $+3$ z liczbą 3.

Definicya 9. Liczbą względną uproszczoną, zastępującą ogół liczb względnych zerowych, jest liczba 0 (zero). Liczbą względną uproszczoną, zastępującą ogół równych liczb względnych $[a, b]$, $[c, d], \ldots$, gdzie $a > b$, $c > d, \ldots$, jest symbol $+|a, b|$. Liczbą względną uproszczoną, zastępującą ogół równych liczb względnych $[a, b]$, $[c, d], \ldots$, gdzie $a < b$, $c < d, \ldots$ jest symbol $-|a, b|$. Liczby względne uproszczone postaci $+|a, b|$, lub krótko postaci $+a$ (gdzie a jest liczbą dodatnią), nazywamy liczbami dodatniemi, zaś postaci $-|a, b|$, lub krótko $-a$, liczbami ujemnemi; a nosi nazwę wartości bezwzględnej liczby względnej uproszczonej.

Mamy zatem:

$$[a, a] = [b, b] = [c, c] = \ldots = 0,$$

$$[a, b] = [c, d] = [e, f] = \ldots = \pm|a, b|.$$

Oczywistem jest, że wykonać jakieś działanie na dwóch liczbach względnych uproszczonych, znaczy wykonać to działanie na dwóch równych im liczbach względnych. Jakie liczby względne do tego celu wybierzemy jest zupełnie obojętnem, gdyż wynik działania, jak to wynika z zacytowanych na początku paragrafu twierdzeń, od tego nie zależy.

Jako przykład weźmy mnożenie:

$$(+3).(-5) = [4, 1].[1, 6] = [(4.1 + 1.6), (4.6 + 1.1)]$$
$$= [10, 25] = -|10, 25| = -15.$$

Ten sposób wykonywania działań na liczbach względnych uproszczonych jest nieco uciążliwy, łatwo jednak możemy wyprowadzić zwykle używane reguły działań. Zacznijmy od wyprowadzenia reguły na dodawanie dwóch liczb względnych uproszczonych; mogą tu zachodzić

trzy przypadki: A) obie liczby są zerami, B) jedna z liczb jest zerem, C) obie liczby są różne od zera. Z twierdzeń 2 i 3 wprost wynika, że w pierwszym przypadku suma jest równa zeru, w drugim zaś jest równa różnemu od zera składnikowi; pozostaje zająć się szczegółowo przypadkiem trzecim. Jeżeli wartości bezwzględne danych liczb oznaczymy przez α i β, to spostrzeżemy, że mogą tu zachodzić cztery przypadki:

$$1)\quad (+\alpha)+(+\beta),$$
$$2)\quad (+\alpha)+(-\beta),$$
$$3)\quad (-\alpha)+(+\beta),$$
$$4)\quad (-\alpha)+(-\beta).$$

Zajmiemy się kolejno każdym z tych przypadków, zakładając na razie, że wartości bezwzględne liczb nie są sobie równe, lecz że jest np. $\alpha > \beta$:

$$1)\quad (+\alpha)+(+\beta)=[(\alpha+1),1]+[(\beta+1),1]=[(\alpha+\beta+2),2]$$
$$=+|(\alpha+\beta+2),2|=+(\alpha+\beta),$$
$$2)\quad (+\alpha)+(-\beta)=[(\alpha+1),1]+[1,(\beta+1)]=[(\alpha+2),(\beta+2)]$$
$$=+|(\alpha+2),(\beta+2)|=+(\alpha-\beta),$$
$$3)\quad (-\alpha)+(+\beta)=[1,(\alpha+1)]+[(\beta+1),1]=[(\beta+2),(\alpha+2)]$$
$$=-|(\beta+2),(\alpha+2)|=-(\alpha-\beta),$$
$$4)\quad (-\alpha)+(-\beta)=[1,(\alpha+1)]+[1,(\beta+1)]=[2,(\alpha+\beta+2)]$$
$$=-|2,(\alpha+\beta+2)|=-(\alpha+\beta).$$

Jeżeli $\alpha=\beta$, to rezultat w przypadku 1) i 4) pozostaje ten sam, zaś w przypadku 2) i 3) nie ma znaczenia, gdyż nie mają go symbole $|(\alpha+2),(\beta+2)|$ i $|(\beta+2),(\alpha+2)|$. Z twierdzenia 5 jednak wynika, że w tym przypadku suma naszych liczb względnych uproszczonych jest zerem.

Rezultaty nasze możemy zebrać w następującem twierdzeniu:

Twierdzenie 24.

$$1)\quad 0+0=0;$$
$$2)\quad a+0=a,$$
$$0+a=a,$$

gdzie a ma przedstawiać liczbę względną uproszczoną;

3) Sumę dwóch różnych od zera liczb względnych uproszczonych, mających znaki równe, otrzymujemy, dodając do siebie ich wartości bezwzględne i sumę ich poprzedzając znakiem wspólnym; sumę zaś dwóch liczb o znakach różnych otrzymujemy, odejmując mniejszą wartość bezwzględną od większej i różnicę ich poprzedzając znakiem liczby większej; w tym ostatnim przypadku, jeżeli wartości bezwzględne są sobie równe, suma jest zerem.

Weźmy jeszcze jako przykład mnożenie. I tu mogą również zachodzić trzy przypadki: *A*) obie liczby są zerami, *B*) jedna z liczb jest zerem, *C*) obie liczby są różne od zera. Z twierdzeń 12 i 13 wynika, że w pierwszym i drugim przypadku iloczyn jest zerem, pozostaje więc zająć się szczegółowo przypadkiem trzecim. Jeżeli w tym przypadku wartości bezwzględne naszych liczb oznaczymy przez α i β, to spostrzeżemy znowu, że mogą zachodzić cztery przypadki:

$$\begin{aligned} &1)\quad (+\alpha).(+\beta),\\ &2)\quad (+\alpha).(-\beta),\\ &3)\quad (-\alpha).(+\beta),\\ &4)\quad (-\alpha).(-\beta). \end{aligned}$$

Zajmiemy się kolejno tymi przypadkami:

$$\begin{aligned} 1)\quad (+\alpha).(+\beta) &= [(\alpha+1), 1].[(\beta+1), 1]\\ &= [\{(\alpha+1).(\beta+1)+1.1\}, \{(\alpha+1).1+1.(\beta+1)\}]\\ &= [(\alpha\beta+\alpha+\beta+2), (\alpha+\beta+2)] = +|(\alpha\beta+\alpha+\beta+2), (\alpha+\beta+2)|\\ &= +\alpha\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\quad (+\alpha).(-\beta) &= [(\alpha+1), 1].[1, (\beta+1)]\\ &= [(\alpha+\beta+2), (\alpha\beta+\alpha+\beta+2)] = -\alpha\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3)\quad (-\alpha).(+\beta) &= [1, (\alpha+1)].[(\beta+1), 1]\\ &= [(\alpha+\beta+2), (\alpha\beta+\alpha+\beta+2)] = -\alpha\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4)\quad (-\alpha).(-\beta) &= [1, (\alpha+1)].[1, (\beta+1)]\\ &= [(\alpha\beta+\alpha+\beta+2), (\alpha+\beta+2)] = +\alpha\beta. \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem twierdzenie:

Twierdzenie 25.

$$\begin{aligned} &1)\quad 0.0 = 0;\\ &2)\quad \alpha.0 = 0,\\ &\qquad\quad 0.\alpha = 0, \end{aligned}$$

gdzie α jest liczbą względną uproszczoną;

3) Dwie różne od zera liczby względne uproszczone mnoży się tak przez siebie, że się mnoży ich wartości bezwzględne, a znak daje + lub — zależnie od tego, czy liczby mają znaki równe, czy różne.

Zupełnie tak samo dochodzimy do zwykłych reguł odejmowania i dzielenia, co tu dla skrócenia pomijamy. Zaznaczyć tylko należy, że przy dzieleniu trzeba na razie wykluczyć dzielenie przez liczbę zero (definicya 7 uw.); w tym przypadku potrzeba osobnych założeń.

Zaznaczymy nareszcie, że z twierdzeń 2, 12, 18, 19, 20, 21, 22, 23 otrzymujemy wprost dla liczb względnych uproszczonych zasadę przemienności, łączności i rozdzielności. Jeżeli mianowicie przez a, b, c oznaczymy liczby względne uproszczone, to mamy:

$$a + b = b + a\,,$$
$$a \,.\, b = b \,.\, a\,,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c)\,,$$
$$(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)\,,$$
$$(a + b) \,.\, c = a \,.\, c + b \,.\, c\,,$$
$$(a + b) : c = a : c + b : c\,,$$
$$(a - b) \,.\, c = a \,.\, c - b \,.\, c\,,$$
$$(a - b) : c = a : c - b : c\,.$$

Uzupełnienie opuszczonych tu dla krótkości rozumowań i twierdzeń, jak również dalsze rozwinięcie, nie przedstawia już najmniejszej trudności.

W Rzeszowie, w marcu 1902 r.