DEFINICYE W MATEMATYCE

przez

G. Peano [1]),

PRZEŁOŻYŁ ZA UPOWAŻNIENIEM AUTORA

Z. Krygowski.

Definicye, jakie spotyka się w naukach matematycznych, czynią w ogólności zadość prawidłom, które chcemy sformułować.

Definicya da się sprowadzić do równości, której jedna strona (pierwsza) jest nazwą, którą definiujemy, druga zaś wyraża jej wartość. Przykład:

(pochodna funkcyi) = (granica stosunku przyrostów funkcyi i zmiennej).

Wskutek tego, podanie, które nie jest równością, nie może być definicyą Tak więc nie można brać podania:

$$2 < e < 3$$

za definicyę podstawy e logarytmów naturalnych.

Wartość nazwy, którą definiujemy, powinna być wyrażona przez wyrazy znane. Skoro stawiamy definicyę, trzeba powiedzieć wyraźnie lub implicite, jakie są wyrazy, które zakładamy jako znane.

W podręcznikach definicya zakłada, jako znane, wyrazy, objaśnione na stronicach poprzedzających. Mogą tam zdarzyć się trudności tylko dla pierwszych definicyj na pierwszych stronicach podręcznika.

Nie można ocenić wartości definicyi odosobnionej. Pytania: „Czy można zdefiniować liczbę, punkt“? nie są dobrze postawione, jeśli nie dołączymy tabeli pojęć, jakie przyjmujemy za znane.

[1]) Bibliothéque du Congrès international de Philosophie III. Paris, str. 279—288.

Nie wystarczy powiedzieć, iż zakładamy, jako znaną, mowę potoczną, gdyż zawiera ona wiele wyrazów naukowych, jak liczba, punkt... Nadto, granice mowy potocznej nie są ściśle ustalone.

Z wyjątkiem pewnych prac o logice matematycznej nie ma podręcznika, któryby na początku miał tabelę pojęć, które zakłada się jako znane. Mimo to, można łatwo skonstruować taką tabelę; przedstawiamy na próbę taką tabelę dla „Geometryi" Legendre'a. Geometrya ta z punktu widzenia, na którym tu stoimy, nie różni się od geometryi Euklidesa i wszystkich innych podręczników.

Napiszmy znak równości w definicyach na swojem miejscu; jest on zaznaczony w tekście słowami: jest, ten, ta, wszystek, jeden.

Pierwsze założenia będą wtedy:

1. (Geometrya) = (nauka, której przedmiotem jest pomiar rozciągłości).

1'. Rozciągłość ma trzy wymiary, długość, szerokość i wysokość.

2. (Linia) = (długość bez szerokości).

2'. (Punkt) = (koniec linii).

2''. Punkt nie ma rozciągłości.

3. (Linia prosta) = (najkrótsza droga od jednego punktu do drugiego).

4. (Linia krzywa) = (linia ani prosta, ani nie złożona z linij prostych).

5. (Powierzchnia) = (to, co ma długość i szerokość bez wysokości lub grubości).

Podania 1' i 2'' nie są równościami, nie są przeto definicyami.

Usuńmy dla prostoty, jako mniej nas obchodzące, założenia 1 i 4. Znajdziemy:

2.	wyraz	linia,	wyrażony przez	„długość", „szerokość".
2'.	„	punkt,	„ „	„koniec".
3.	„	prosta,	„ „	„najkrótsza", „droga".
5.	„	powierzchnia,	„	„wysokość" albo „grubość".

Mamy więc tu definicyę czterech pojęć przy pomocy sześciu niezdefiniowanych pojęć geometrycznych. Możnaby zapytać, czy nie byłoby prościej usunąć te definicye i wziąć jako pojęcia niezdefiniowane pojęcia linii, punktu, prostej, powierzchni.

Wyliczyliśmy tu pojęcia geometryczne, zawarte w tych definicyach. Aby analiza była zupełną, należy także wyliczyć pojęcia logiczne, zaznaczone wyrazami bez, od, do... i formami gramatycznemi, zawartemi w tych definicyach.

Spostrzegamy konieczność tego, analizując np. pierwsze definicye arytmetyczne Euklidesa, ks. VII. Wysłowienie ich w przekładzie wolnym jest następujące:

(jedność) = (jakość tego, co jest jednem),
(liczba) = (zbiór jedności).

Czy są one ścisłe? Można odpowiedzieć tak, jeśli przypuścimy jako znane wszystkie pojęcia, które znajdują się po stronie drugiej. Lecz można postawić zarzut, iż w pierwszej równości słowa jedność i jeden są tylko różnemi formami gramatycznemi tego samego pojęcia. W drugiej równości można uważać pojęcie liczby jako zawarte implicite, już to w pojęciu mnogości, już to w tem, co oznacza wyraz jedności w liczbie mnogiej. Różnica między dwoma zapatrywaniami pochodzi z rozmaitej doniosłości, jaką przypisujemy formom gramatycznym.

Wyliczanie pojęć rozmaitego rodzaju, zawartych w naszych podręcznikach, nie jest zbyt długie, jakby się tego początkowo można było obawiać. Jest dobrze znaną rzeczą, iż w naukach matematycznych posługujemy się tylko małą cząstką słownika i reguł gramatycznych języka. Następnie, liczba użytych wyrazów jest większa od liczby przedstawionych pojęć. Np. wyrazy: iloczyn, czynnik, mnożyć, mnożna, mnożnik, wielokrotny, dzielnik, spółczynnik, są tylko odrębnemi formami językowemi. na oznaczenie tego samego pojęcia z rozmaitego punktu widzenia, przedstawionego tym samym znakiem $\times$ we wzorach algebraicznych.

Wyliczenia tego dokonało kilku autorów, dla rozmaitych teoryj w wydawanym przez nas **Formularzu matematyki.** Liczba rozmaitego rodzaju pojęć logicznych i matematycznych, pojedyńczych lub złożonych, znajdujących się w tomie III za rok 1901 [1]), jest bliska

[1]) Świeżo wyszedł tom IV za rok 1902. (Przyp. Red.)

stu. Teorye te obejmują już część bardzo ważną nauk matematycznych.

Definicya, uważana sama w sobie, niezależnie od pojęć, jakie przypuszczamy jako znane, jest równością, której strona pierwsza jest wyrazem albo znakiem, którego nie ma po stronie drugiej.

Definicye tej postaci nazwiemy „d e f i n i c y a m i m o ż l i w e m i“. Np. założenia:

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots,$$

$$e = \lim_{n=\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\ ^{1)}$$

są „definicyami możliwemi“. Pierwsza, jako definicya istotna, jest najbardziej rozpowszechniona, drugą spotyka się w niektórych podręcznikach; trzecia nie jest używana.

W niektórych przypadkach nie definiujemy jednego wyrazu lub znaku, lecz całe wyrażenie; tak więc przypuściwszy jako znane znaczenie wzorów $x=y$, $x>y$, $x+y$, $x\times y$, ..., gdzie x i y są liczbami całkowitemi, trzeba znaczenie to zdefiniować, jeśli przypuścimy, iż x i y są liczbami wymiernemi. W przypadku tym, druga strona może zawierać znaki, znajdujące się po pierwszej stronie lecz inaczej skombinowane.

Ze zbioru podań pewnej nauki, mających charakter definicyj możliwych, wyprowadza się rozmaite teorye, albo rozmaite sposoby wykładu nauki. Obiera się pewien porządek pojęć nauki. Jeśli pewne pojęcie ma kilka możliwych definicyj, które wyrażają je przy pomocy poprzednich pojęć w pewnym ustalonym porządku, można wśród nich wybrać najdogodniejszą. Jeśli nie istnieje możliwa definicya pewnego pojęcia, wyrażająca je przy pomocy pojęć poprzednich, pojęcie takie

---

1) Na podstawie wzoru S t i r l i n g a $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$, skąd $e = (2\pi n)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} e^{\frac{\theta}{12n^2}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ przy $n=\infty$. $0<\theta<1$. (Przyp. tłóm.).

odnośnie do określonego porządku nazywać będziemy **pierwotnem**. Jakimkolwiek będzie ów określony porządek, będą zawsze istnieć pojęcia pierwotne, nie można bowiem podać definicyi pierwszego pojęcia.

Należy pojęciom nauki nadać taki porządek, aby liczba pojęć pierwotnych odnośnie do tego porządku była możliwie najmniejsza.

Definicya powinna czynić zadość prawu jednorodności, które zaraz wyjaśnimy.

Po pierwsze, definicya powinna być podaniem zupełnem, zrozumiałem samem przez się, niezależnie od innych podań tekstu. W ten to sposób pojmuję inaczej definicyę niż niektórzy autorowie, którzy część najważniejszą lub wzór zawarty w całkowitem podaniu nazywają **definicyą**.

Następnie, obie strony równości, która stanowi definicyę, powinny zawierać też same litery zmienne, wyrażające zmienne istotne.

Tak więc wzór:

$$0 = a - a$$

nie jest definicyą, gdyż nie jest podaniem zupełnem; nie mówi się bowiem tu, jaką wartość nadajemy literze a.

Podanie:

Niech będzie a pewną liczbą; mamy: $0 = a - a$,

jest podaniem zupełnem; lecz nie można go brać jako definicyę znaku 0, gdyż nie jest ono jednorodnem. W samej rzeczy, strona pierwsza jest stałym symbolem 0; druga jest funkcyą zmiennej litery a.

Podanie:

$$0 = (\text{stała wartość wyrażenia } a{-}a, \text{ jakąkolwiek jest liczba } a)$$

jest równością jednorodną, bo jakkolwiek po stronie drugiej stoi litera a, to jednak znajduje się ona tam tylko pozornie, gdyż wartość tej drugiej strony nie jest funkcyą tego a. Podanie to jest definicyą możliwą.

Obie strony równości — definicyi nietylko powinny zawierać też same litery zmienne istotne, lecz trzeba jeszcze, by wchodziły w nie w sposób podobny. Uważajmy np. liczby wymierne; mamy definicyę logiczną następującą:

Niechaj a, b, c, d będą liczby całkowite; równość $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jest identyczna z równością: $ad = bc$.

Podanie to biorą niektórzy autorowie jako definicyę [1]). W przypadku całkowitych a i b, $\frac{a}{b}$ jest liczbą wymierną; naodwrót, jeśli x jest liczbą wymierną, mamy nieskończenie wiele par całkowitych liczb a i b, czyniących zadość równości $a/b = x$. Nie możemy wskutek tego powiedzieć: „liczba wymierna x jest ułamkiem nieskracalnym"; nie można mówić o liczniku i mianowniku liczby x.

---

[1]) Tak czynią pp. O. Stolz „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik", str. 43 (1885); „Theoretische Arithmetik", str. 57 (1900); J. Tannery „Introduction à la théorie des fonctions d'une variable", str. VIII (1896); a jeszcze wyraźniej: „Leçons d'Arithmétique", str. 148 (1894); L. Couturat „De l'Infini mathématique", str. 1 (1896).

Ułamek $\frac{a}{b}$ wprowadza się wtedy przez „abstrakcyę". Nie mamy wtedy równości w postaci:

$a/b =$ (wyrażenie utworzone z pojęć poprzednich),

lecz dajemy tylko nominalną definicyę związku $a/b = c/d$.

Wolimy uważać a/b jako wyrażenie, przedstawiające działanie złożone $\times a/b$, to znaczy mnożyć przez a i dzielić przez b.

Dwa symbole działań a/b i c/d są sobie równe, skoro, zastosowane do tej samej liczby, która umożliwia oba działania, dają równe wyniki. Z definicyi tej wypływa natychmiast podanie przytoczone w tekście. Zob. „Formulaire de Mathématiques", t. III, p. 55 (1901), albo moje „Arithmetices principia", str. 13, (1889), gdzie symbole te wyrażono symbolami ideograficznemi.

Ten sam sposób uważania ułamków jako operatorów spotyka się w „Leçons sur l'Analyse infinitésimale" p. Méray, str. 2 (1894), który go już przedstawił w „Nouvelles Annales de Mathématiques", 1889, str. 421. Sposób ten jest najbardziej naturalny. Można go spotkać np. w papyrusie Rhinda (r. 2000 przed Chr.), gdzie Ahmes, rachmistrz egipski, powiada (kolumna 12):

$$1 - 2/3 - /15 = /5 + /15;$$

rzeczywiście działając na liczbie 15, mamy

$$15 - 10 - 1 = 3 + 1.$$

Idąc za autotem, nie pisaliśmy licznika, jeśli ten równy jest jedności (Nota autora z r. 1901).

Jeśli chcemy teraz zdefiniować sumę dwóch liczb wymiernych x i y, trzeba utworzyć równość postaci:

$x + y =$ (wyrażenie złożone z liter x i y i z działań arytmetycznych na liczbach całkowitych).

Podanie:

„Niechaj a, b, c, d będą liczby całkowite; jest $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$", nie stanowi definicyi możliwej. W samej rzeczy, strona pierwsza przedstawia się jako funkcya liczb wymiernych $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$; druga jako funkcya liczb całkowitych a, b, c, d, które nie są funkcyami danych liczb wymiernych.

Definicye niejednorodne nie są zbyt rzadkie w podręcznikach matematyki. Precyzya wewnętrzna nauk matematycznych poprawia nieścisłości szaty, w jaką je przyoblekamy. Te niedokładności formy nie prowadzą dobrych autorów do wniosków fałszywych. Tak np. Euler, wykonywając działania na szeregach bez względu na ich zbieżność, dochodzi do całego mnóstwa twierdzeń, wszystkich prawdziwych. Nieprecyzyjne wysławianie twierdzeń pociąga za sobą w ogólności tylko długość i ciemność. Mógłby jednak, gdyby ktoś chciał, wyciągnąć z definicyi niejednorodnej konsekwencye fałszywe. Tak np. połóżmy na podstawie definicyi:

„$\frac{a}{b} ? \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, gdzie a, b, c, d są całkowite".

Znak ? oznacza pewne działanie (nieuprawnione). Wyprowadzamy stąd:

$$\frac{1}{2} ? \frac{2}{3} = \frac{3}{5}, \quad \frac{2}{4} ? \frac{2}{3} = \frac{4}{7}; \text{ lecz } \frac{1}{2} = \frac{2}{4},$$

skąd wniosek fałszywy:

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{7}.$$

Trudność tę spostrzegało wielu autorów; aby usprawiedliwić poprzednią definicyę, przypuszcza się, iż $\frac{a}{b}$ nie jest liczbą wymierną lecz parą liczb, oddzielonych znakiem dzielenia. Lecz to sprowadziłoby dwuznaczność, gdyż we wszystkich podręcznikach wyrażenia $2+2$, 2×3, $6-2$, 2^2, ... są tylko różnemi nazwami tej samej liczby 4.

Zauważmy nakoniec, iż każdy znak lub wyraz, określone w nauce, mogą być usunięte pod warunkiem, iż zastąpimy je przez jego wartość. Inaczej mówiąc, każda definicya oznacza pewne skrócenie, które nie jest konieczne teoretycznie; może być ono dogodne, a nawet — praktycznie rzecz biorąc — nieodzowne dla rozwoju nauki.

Usunięcie w pewnej teoryi określonego znaku jest bardzo pożytecznem ćwiczeniem w celu rozpoznawania ścisłości definicyi; definicya bowiem jest niezupełna, jeśli zdarzy się, że nie można jej wszędzie zastąpić przez jej wartość. Służy ono także do oceny użyteczności definicyi, jeśli bowiem podania, w których stoi określony znak, po ich usunięciu, nie stają się zbyt długie, należy go usunąć. W podręcznikach matematyki wiele jest wyrazów, które należałoby usunąć.

T. Łopuszański,

ZARYS TEORYI LICZB WZGLĘDNYCH.

Matematyka [1]) w rozwoju swoim była ściśle związana ze światem fizycznym. Podstawowe jej pojęcia powstały jako abstrakcye z całego szeregu obserwacyj, względnie doświadczeń, a i dalszy jej rozwój był w znacznej części nie samodzielny, lecz oparty na zastosowaniach i analogiach geometrycznych i przyrodniczych. Ta metoda tworzenia się wprowadziła w podstawy matematyki pewne zamieszanie, spowodowała wiele niejasności w jej zasadniczych pojęciach i definicyach, co utrudniało w wysokim stopniu dalszy rozwój. W interesie nauki zatem

1) Wyrazu tego używam tu na oznaczenie czystej analizy, z wyłączeniem geometryi.