O ZADANIU PETERSBURSKIEM

napisał

Wł. Gosiewski.

Pod taką nazwą upowszechniło się w podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa zadanie, dotyczące gry w orzełka i reszkę na pewnych szczególnych warunkach.

Rozwiązanie tego zadania prowadzi do wyniku, na który żadną miarą zgodzić się niepodobna, i który z tego powodu nazywają zwykle paradoksem petersburskim.

Ponieważ ten paradoks budzić może pewne wątpliwości co do gruntowności samych zasad rachunku prawdopodobieństwa, a w szczególności o ile to dotyczy pojęcia nadziei matematycznej, przeto pragnęlibyśmy te wątpliwości o ile można rozproszyć.

W tym celu w pracy niniejszej zamierzamy okazać:

1) że gra w orzełka i reszkę na warunkach zadania petersburskiego jest niesłuszną (inéquitable);

2) że przyczyną tej niesłuszności są niewłaściwie dobrane warunki samego zadania, a nie zasady rachunku prawdopodobieństwa; i nareszcie,

3) że dobierając te warunki właściwie, czyni się grę słuszną i unika tem samem paradoksu.

§ 1.

Zadanie Petersburskie brzmi tak:

Piotr i Paweł grają w orzełka i reszkę na warunkach następujących:

1) Piotr rzuca monetą, i rzuca nią dotąd, aż się odwróci orzełkiem; wtedy gra jest skończona;

2) Paweł wypłaci Piotrowi jedność (np. jednego dukata lub jedno ziarnko piasku), jeśli orzełek pojawi się za pierwszym zaraz rzutem; lub dwie jedności, jeśli orzełek pojawi się za drugim dopiero rzutem; lub cztery jedności, jeśli orzełek pojawi się za trzecim dopiero rzutem i t. d., ogólnie 2^{n-1} jedności, jeśli orzełek pojawi się za n-tym dopiero rzutem.

Jaką sumę złożyć powinien Piotr Pawłowi przy rozpoczęciu gry?

Piotr może wygrać od Pawła:

$$\text{albo } 1, \text{ albo } 2, \text{ albo } 2^2, \text{ albo } 2^3, \text{ albo i t. d. jedności,}$$

z prawdopodobieństwami odpowiednio równemi:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \text{ i t. d.}$$

Stąd nadzieja matematyczna wygranej Piotra wynosi:

$$1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2^2} + 2^2\times\frac{1}{2^3} + 2^3\times\frac{1}{2^4} + \text{ i t. d.}$$

t. j. równa się nieskończenie wielkiej liczbie $^1/_2$ jedności, którą to liczbę $^1/_2$ jedności niech wyraża symbol

$$s = \left(\frac{n}{2}\right)_{n=\infty}.$$

Taką właśnie sumę złożyć powinien Piotr Pawłowi przy rozpoczęciu gry.

§ 2.

Tu widać odrazu, że gra jest niesłuszna.

Jakoż, zauważmy, że w warunkach zadania rozróżnić się dają dwa, i tylko dwa przypadki następujące:

1-o albo orzełek pojawi się za m-tym rzutem, i wtedy Paweł wypłaci Piotrowi sumę skończoną 2^{m-1}, która względem nadziei matematycznej Piotra, nieskończenie wielkiej s, jest znikającą; zatem Piotr przegra, a Paweł wygra;

2-o albo orzełek nie pojawi się nigdy, co odpowiada założeniu $m = \infty$; zatem znowóż (jeśli weźmiemy w rachubę i ten, chociaż naprawdę niemożliwy do urzeczywistnienia przypadek) Piotr przegra, a Paweł wygra.

Owóż, gra, w której jeden z partnerów (Piotr) wygrać zgoła nie może, a drugi (Paweł) wygrać musi, jest oczywiście niesłuszna.

Dowiedzmy się, w czem tkwi przyczyna tej niesłuszności.

§ 3.

Według warunków zadania, za sumę ewentualną 2^{m-1} Piotr składa Pawłowi

$$2^{m-1} \times \frac{1}{2^m},$$

t. j. $1/2$ jedności, niezależnie od tego, czy m skończone, czy nieskończenie wielkie. Tymczasem przypadek $m = \infty$ jest nieurzeczywistnialny, bo jego prawdopodobieństwo

$$\left(\frac{1}{2^m}\right)_{m=\infty} = 0.$$

Więc za przyrzeczenie Piotrowi sumy $(2^{m-1})_{m=\infty}$, o którem z pewnością wiemy, że dotrzymane nie będzie, Paweł liczy sobie równie $1/2$ jedności, jak za każde inne, które ewentualnie dotrzymane będzie. Tak postępując, Paweł wprost oszukuje Piotra, i dla tego gra Petersburska jest niesłuszna.

§ 4.

Z poprzedzającego wynika, że gra Petersburska byłaby słuszną jedynie pod warunkiem, jeśliby za przypadek $m = \infty$ nic się Pawłowi od Piotra nie należało.

Aby temu warunkowi zadość uczynić, wprowadźmy najprzód ogólnie a^{m-1} zamiast 2^{m-1}. Wówczas za sumę ewentualną a^{m-1} należeć się będzie Pawłowi

$$a^{m-1} \times \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{m-1}.$$

A że za przypadek $m = \infty$ ma mu się nic nie należeć, zatem otrzymujemy równanie:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{\infty} = 0,$$

z którego wynika $a < 2$, a nie $a = 2$.

Pod tym warunkiem ($a < 2$) suma, którą Piotr winien złożyć Pawłowi przy rozpoczęciu gry, posiada wartość skończoną, równą

$$\frac{1}{2-a}.$$

Gdy więc orzełek pojawi się za m-tym rzutem, Piotr otrzyma od Pawła sumę a^{m-1}, i wygra, jeśli:

$$a^{m-1} - \frac{1}{2-a} > 0,$$

lub przegra, jeśli:

$$a^{m-1} - \frac{1}{2-a} < 0.$$

Każdy zatem z partnerów, tak Piotr jak i Paweł, może pod warunkiem $a < 2$ wygrać lub przegrać, bo gra w tym przypadku jest słuszną

§ 5.

Jednak o możliwości przedsięwzięcia gry decyduje nie sama jej słuszność, ale i wysokość zobowiązań, które biorą na siebie partnerzy, każdy względem ogółu wszystkich innych partnerów, przyjmujących w grze udział. Te zobowiązania, jeśli się dają oznaczyć a priori, mogą być przez partnerów przy rozpoczęciu gry zdeponowane, i wtedy nazywają się stawkami; jeśli zaś oznaczyć się dają tylko maxima tych zobowiązań, proponujemy nazywać je ryzykami.

Obliczmy ryzyka Piotra i Pawła.

Załóżmy najprzód $a > 1$.

Wtedy nadzieja matematyczna Piotra jest także większa od jedności; a że Piotr wygrać musi co najmniej jedność, ryzyko jego nie może przewyższać różnicy

$$\frac{1}{2-a} - 1 = \frac{a-1}{2-a} .$$

Co do ryzyka Pawła, jest ono w tym przypadku nieograniczonem; ewentualne bowiem ryzyko Pawła równa się różnicy

$$a^{m-1} - \frac{1}{2-a} > 0$$

w której m jest wprawdzie skończone, ale może się zdarzyć tak wielkie, jak się podoba.

W razie więc $a > 1$ orzec tylko możemy, że:

$$\text{ryzyko Piotra} \leqslant \frac{a-1}{2-a} ,$$

$$\text{ryzyko Pawła} < \infty .$$

W przypadku $a < 1$, ewentualne ryzyko Piotra równa się różnicy

$$\frac{1}{2-a} - a^{m-1} > 0 ,$$

w której m, począwszy od 2, może się zdarzyć tak wielkiem jak się podoba, chociaż skończonem. Ryzyko Piotra jest zatem mniejsze od jego nadziei matematycznej.

Co do ryzyka Pawła w tym razie, zauważmy, że ponieważ nadzieja matematyczna Piotra jest mniejsza od jedności, a przegrana Pawła wynosi co najwyżej jedność, zatem największe możliwe ryzyko Pawła równa się różnicy:

$$1 - \frac{1}{2-a} = \frac{1-a}{2-a}.$$

Mamy zatem w przypadku $a < 1$:

$$\text{ryzyko Piotra} < \frac{1}{2-a},$$

$$\text{ryzyko Pawła} \leqslant \frac{1-a}{2-a}.$$

Owóż, gra, w której maximum ryzyka partnera może być tak wielkie jak się podoba, jest dla tego partnera nieograniczenie ryzykowną. On w niej udziału brać nie może, bo nie wie, czy jest dostatecznie przygotowanym do spełnienia zobowiązania, które mu los przyniesie. Taką jest właśnie dla Pawła gra w orzełka i reszkę w przypadku $a > 1$, a tem samem i niemożliwą do przedsięwzięcia. Tylko więc w przypadku $a \leqslant 1$ jest ona możliwą do przedsięwzięcia, bo jest ograniczenie ryzykowną dla obu partnerów.

§ 6.

Ten sam wynik otrzymać także można sposobem bezporównania krótszym, następującym:

Oznaczmy przez

$$\left| a^{m-1} - \frac{1}{2-a} \right|$$

wartość bezwzględną różnicy

$$a^{m-1} - \frac{1}{2-a}.$$

Stosownie do znaku tej różnicy: $+$ lub $-$, pomieniona jej wartość bezwzględna wyraża ryzyko ewentualne Pawła lub Piotra.

To wiedząc, wyraźmy nadzieję matematyczną μ-ej potęgi tego ryzyka; będzie to suma

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{2^m}\left|a^{m-1}-\frac{1}{2-a}\right|^{\mu}=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m=\infty}\left|\left(\frac{a}{\sqrt[\mu]{2}}\right)^{m-1}-\frac{1}{2-a}\left(\frac{1}{\sqrt[\mu]{2}}\right)^{m-1}\right|^{\mu}.$$

Owóż, zasadą możliwości przedsięwzięcia gry w ogóle powinno być: aby nadzieja matematyczna μ-ej potęgi ryzyka któregobądź z partnerów była skończona, jakkolwiek wielkie weźmiemy μ.

Według powyższego wzoru, warunek ten w przypadku rozważanym wymaga nierówności $a < \sqrt[\mu]{2}$, jakkolwiek wielkie weźmiemy μ, a więc wymaga, aby było $a \leqslant 1$.

Powyżej sformułowana zasada „możliwości przedsięwzięcia gry", obowiązuje nie tylko gry we właściwem tego słowa znaczeniu, ale i wszelkie inne kwestye teoryi prawdopodobieństwa, które upodobnić się dają do gier. Tak np. w rachunkach astronomicznych, fizycznych, chemicznych i t. p., wartości prawdziwe niewiadomych zastępujemy ich nadziejami matematycznemi, które obliczamy na podstawie wielkiej liczby wartości dostrzeżonych albo samych wprost niewiadomych, albo wiadomych ich funkcyj, zwykle liniowych. W ten sposób postępując, ryzykujemy błędy, popełnione na niewiadomych. Ale, że tych błędów znać nie możemy, więc aby się zabezpieczyć przed zbytnią ewentualnie niektórych wielkością, z góry zastrzegamy, że nadzieje matematyczne wszelkich potęg dodatnich ich wartości bezwzględnych są skończonemi. Tej zasady wyraźnie wprawdzie nigdzie nie formułują, wszelako tkwi ona w założeniu, przez które: nadzieja matematyczna jakkolwiek wielkiej potęgi błędu przypadkowego w ogóle — ma wartość skończoną.

Warszawa, w marcu 1902 r.