PRÓBA ZASTOSOWANIA BADAŃ HYDRODYNAMICZNYCH
DO PROTUBERANCYJ SŁONECZNYCH,

napisał

F. Biske.

A. Ustanowienie równań.

I. Na słońcu, tam gdzie się znajduje warstwa dolna korony, dają się widzieć czasami do ogromnej wysokości dochodzące wybuchy chromosfery, co stanowi zjawisko protuberancyj (wyskoków). W zjawiskach tych występujące prędkości początkowe wybuchu gazów, przeważnie H, jakoteż He, Na, Mg, Ca, Ba, Fe w ilościach mniejszych, są tak wielkie, że objaśnienie wyskoków tych w sposób mechaniczny zdaje się przedstawiać niejakie trudności.

Podejmując próbę rozwiązania tego zagadnienia, stawiam najprzód zadanie następujące:

Niechaj pewien gaz wypływa z prędkością początkową w_2 ze zbiornika, w którym ciśnienie jest p_1, do przestrzeni otwartej, w której ciśnienie zmniejsza się od dołu do góry [1]) według prawa:

$$p = p_2 \cdot e^{-\frac{n}{m} \cdot z},$$

gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych, n ciężarem właściwym gazu pod ciśnieniem 1 cm. i przy temperaturze przestrzeni otwartej, m ciężarem właściwym normalnym rtęci. Wyznaczyć wielkość p_1 z danych wartości pozostałych wielkości.

---

[1]) A. Ganot. Kurs fizyki.

II. Podamy najprzód znane równania hydrodynamiczne obu gazów [1]), by je zastosować do naszego zagadnienia.

1. Równania hydrodynamiczne ruchu gazów, przy uwzględnieniu działania sił stycznych tarcia między cząsteczkami płynu ruchliwego, są następujące:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
&\varrho\left(\frac{Du}{Dt}-X\right)+\frac{\partial p}{\partial x}-\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
&\qquad-\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,\\
&\varrho\left(\frac{Dv}{Dt}-Y\right)+\frac{\partial p}{\partial y}-\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\
&\qquad-\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,\\
&\varrho\left(\frac{Dw}{Dt}-Z\right)+\frac{\partial p}{\partial z}-\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\\
&\qquad-\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\frac{Df(x,y,z,t)}{Dt}=\frac{\partial f(x,\ldots)}{\partial t}+\frac{\partial f(x,\ldots)}{\partial x}\cdot u+\frac{\partial f(x,\ldots)}{\partial y}\cdot v+\frac{\partial f(x,\ldots)}{\partial z}\cdot w
$$

W punkcie gazu, określonym przez spółrzędne prostokątne x, y, z, w czasie t, trzy składowe prędkości są u, v, w. Jest to zmieniająca się sposobem ciągłym prędkość prawidłowa, z jaką cząsteczki wszystkie poruszają się postępowo, przyczem ruch nieprawidłowy w odległościach nieskończenie małych nie uwzględnia się.

Składowe na jednostkę masy gazowej działających sił zewnętrznych są tu X, Y, Z. Rozumie się przez nie siłę ciężkości; w tych

[1]) G. G. Stokes. Mathematical und physical papers. Vol. I. (92).

zaś przypadkach, gdy zachodzi ruch wirowy, także ich siłę odśrodkową.

W punkcie gazu (x, y, z) w czasie t ciśnienie jest p. Ciśnienie p_1 w zbiorniku odnosi się do pewnej głębokości pod podstawą wyskoku, w jakiej cząsteczki gazu posiadają jeszcze nieznaczną prędkość lub nie posiadają żadnej. Ciśnienie p_2 u podstawy wyskoku oceniamy z wyglądu linij widmowych gazu w wyskoku.

Gęstość jest tu ϱ. Gęstość gazów jest zmienna, jako funkcya ciśnienia i temperatury. Spółczynnik tarcia wewnętrznego jest μ. Dla gazów spółczynnik ten jest niezależny od ciśnienia [1]), ale zależny od temperatury.

Równania te stosują się do płynów jednorodnych lub niejednorodnych [2]), których temperatura zmieniać się może tylko o tyle, o ile zniża się lub podwyższa przez rozszerzenie lub zgęszczenie [3]).

Te równania różniczkowe są stopnia pierwszego, rzędu drugiego, a więc ich całki zawierają dwie stałe niezależne. Można stosować te równania do ruchu protuberancyj.

Jeżeli ruch płynu powstaje i odbywa się pod wpływem sił, które mogą być przedstawione jako pochodne potencyału — V sił, to również i spółrzędne prostokątne prędkości każdej cząsteczki płynu, gdyby wykonywała jedynie ruch postępowy bez jednoczesnego ruchu obrotowego, możnaby wyrazić jako wzięte w odpowiednich kierunkach pochodne pewnej funkcyi, zwanej potencyałem prędkości:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

a zatem:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

---

[1]) O. E. Meyer. Die kinetische Theorie der Gase (133).
[2]) H. Lamb. Treatise on the Motion of Fluids (1).
[3]) G. G. Stokes. Math. a. phys. pap. Vol. I (92).

W tym przypadku, ponieważ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

równania ruchu byłyby:

$$(1') \quad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot v + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot w + \frac{\partial V}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{4}{3} \mu \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \text{ i t.d.} \end{aligned}$$

Przy zmianie prędkości u, v, w i gęstości ϱ wraz z miejscem i przy statecznym przebiegu ruchu do wielkości i kierunku w każdym punkcie, byłoby jeszcze:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0.$$

Przez pomnożenie równań ruchu (1′) przez $\partial x, \partial y, \partial z$ trzy te równania miałyby jednę wspólną całkę.

Jednakże zdaje się, że cechy potencyału prędkości i ruchu statecznego nie mają miejsca w protuberancyach, przeto ten sposób rozwiązania nie może tu być stosowany.

2. Jeżeli zmiana ciśnienia gazu odbywa się tak szybko, iż jego temperatura, zmieniona przez rozszerzenie lub zgęszczenie, nie wyrównywa się przez zetknięcie z otaczającemi gazami lub przez promieniowanie, wtedy stosować można równanie [1]):

$$(2) \quad \frac{T_1 + 273}{T_2 + 273} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

gdzie T jest temperatura, p ciśnienie, k znany stosunek obu gatunków ciepła właściwego gazu.

---

[1]) S. D. Poisson. Traité de mécanique (407).

Równanie to jest wyprowadzone pod warunkiem, że ilość ciepła gazu nie zmieniła się jeszcze przy bardzo prędkim ruchu, przyczem k jest dla jednego i tego samego gazu stałą, niezależną od ciśnienia i temperatury.

Równanie to można stosować do ruchu protuberancyj ze względu na krótkie trwanie zjawiska w stosunku do jego wielkiej rozciągłości przestrzeniowej.

3. Uwzględniwszy zmianę temperatury gazu, zależną od zmiany gęstości i odwracając uwagę od zmniejszania się lub zwiększania ciepła przez promieniowanie lub przewodnictwo cieplne, można do gazu będącego w ruchu stosować równanie [1]):

$$\varrho = n \cdot p^{\frac{1}{k}}, \tag{3}$$

zamiast

$$\varrho = n \cdot p,$$

gdzie ϱ jest gęstością, p ciśnieniem, n gęstością gazu pod ciśnieniem 1 cm. i przy temperaturze gazu, k stosunkiem obu gatunków ciepła właściwego.

Równanie to można stosować z tych samych powodów, co i równanie (2).

4. Z niezmienności elementu masy ∂m płynu w czasie wypływa „równanie ciągłości“:

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0,$$

gdzie:

$$\frac{D\varrho}{Dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial \varrho}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial \varrho}{\partial z} \cdot w.$$

Równanie to wyraża, że każdy element objętości zawiera zawsze te same cząsteczki, a więc, że masa jego jest niezmienna w czasie.

---

[1]) H. Helmholtz. Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen Osw. Kl. d. ex. W. 73).

Zdaje się wszakże, że warunek ten nie ma miejsca w protuberancyach i dla tego równanie to nie będzie tu stosowane.

5. Prócz tych równań należałoby się jeszcze wziąć pod uwagę równanie:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial x} . u + \frac{\partial L}{\partial y} . v + \frac{\partial L}{\partial z} . w = 0$$

gdzie $L = 0$ jest równaniem powierzchni, w której się płyn znajduje.

Równanie to wyraża, że pewna cienka warstwa cząsteczek w bezpośredniej sąsiedztwie z powierzchnią nie bierze udziału w ruchu cieczy, co również zdaje się nie mieć miejsca w protuberancyach.

III. Przechodzimy do całkowania równań.

Obierzmy układ prostokątny osi spółrzędnych z początkiem u podstawy protuberancyi, z osią z dodatnią w kierunku promieniowym do góry, z osiami x i y w płaszczyznie stycznej.

Okoliczność ta, że wypływ w protuberancyach wybuchowych ma miejsce tylko wzdłuż jednego wymiaru, że wartość jego prędkości jest znana z obserwacyi, oraz, że w większości protuberancyj ruchy wirowe nie zachodzą, redukują się równania (1) do jednego.

Dla ruchu w kierunku osi z będzie:

$$\varrho\left(\frac{Dw}{Dt} - Z\right) + \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \tag{4}$$

gdzie

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} . w .$$

Równania (2) i (3) pozostają bez zmiany:

$$\frac{T_1 + 273}{T_2 + 273} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} \tag{5}$$

i

$$\varrho = n . p^{\frac{1}{k}} . \tag{6}$$

Jeżeli pomnożymy równanie (4) w formie rozwiniętej przez ∂z i zauważymy, że

$$\frac{\partial z \,.\, \partial w}{\partial t} = w \,.\, \partial w \,,$$

będzie:

$$(7) \qquad 2\, w \partial w - Z \partial z + \frac{\partial p}{\varrho} - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\varrho} \,.\, \partial \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \,.$$

Całkowanie w granicach 0 i z, gdzie na z wzięte będą wartości $+z$ i $-z$, daje:

$$2 \int w \partial w = w^2 \,.$$

Jeżeli ciążenie słońca w punkcie początkowym układu spółrzędnych, w odległości R od środka jest G, to będzie w granicach od 0 do $+z$:

$$-Z = G_2 = G \,.\, \left(\frac{R}{R+z} \right)^2$$

oraz

$$G \,.\, R^2 \int \frac{\partial z}{(R+z)^2} = -G \,.\, \frac{R^2}{R+z} \,.$$

Temperatura T_1 przed wypływem jest wyższa, aniżeli temperatura T_2 po wypływie, może być jednak uważana za stałą w granicach od 0 do $+z$ i od 0 do $-z$; dla tego też n, jako funkcya temperatury, pozostaje stałem przy całkowaniu; z równania (6) otrzymujemy:

$$\int \frac{\partial p}{\varrho} = \int \frac{k}{n^k} \,.\, \varrho^{k-2} \,.\, d\varrho = \frac{k}{k-1} \,.\, \frac{\varrho^{k-1}}{n^k} = \frac{k}{k-1} \,.\, \frac{p}{\varrho} \,.$$

W wyrazie ostatnim w równaniu (7) μ jest dla gazów niezależne od ciśnienia, ale zależne od temperatury, i dla tego też będzie stałe przy całkowaniu w tych samych granicach, jak i temperatura. Jeżeli wyraz ten zcałkujemy przez części, będzie:

$$\frac{4}{3}\mu\int\frac{1}{\varrho}\cdot\partial\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{4}{3}\frac{\mu}{\varrho}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{4}{3}\mu\int\frac{1}{\varrho^2}\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial z}\cdot dw.$$

Jeżeli wysokość protuberancyi jest H, to przy uwzględnieniu zmniejszania się ciążenia z wysokością będzie dla każdego punktu w granicach od 0 do $+z$ [1]):

$$w^2=2\,GR^2\left(\frac{1}{R+z}-\frac{1}{R+H}\right)=\frac{2\,GR^2}{R+H}\cdot\frac{H-z}{R+z},$$

a ponieważ prędkość początkowa dla $z=0$,

$$w_2{}^2=\frac{2\,GRH}{R+H},$$

będzie zatem, jak tego potrzeba do rozwinięcia na szereg:

$$w^2=w_2{}^2\cdot\left(\frac{1-\frac{z}{H}}{1-\frac{z}{R}}\right)\quad\text{i}\quad w=w_2\cdot\left(1-\frac{z}{H}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{z}{R}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Z wzoru na zmniejszanie się ciśnienia z wysokością:

$$p=p_2\cdot e^{-\frac{n}{m}\cdot z} \tag{8}$$

i z równania (6) wynika:

$$\varrho=n\cdot p_2{}^{\frac{1}{k}}\cdot e^{-\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{m}\cdot z}=\varrho_2\cdot e^{-\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{m}\cdot z}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{\varrho^2}=\varrho_2{}^{-2}\cdot e^{\frac{2}{k}\cdot\frac{n}{m}\cdot z},\quad\frac{\partial\varrho}{\partial z}=-\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{m}\cdot\varrho_2\cdot e^{-\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{m}\cdot z}$$

$$\partial w=-w_2\cdot\frac{R+H}{2\,RH}\left(1-\frac{z}{H}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{z}{R}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\partial z,$$

---

[1]) S. D. Poisson. Traité de méc. (76).

będzie przeto:

$$\int \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial z} \cdot \partial w = w_2 \cdot \frac{R+H}{2RH} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{n}{m} \cdot \varrho_2^{-1} \cdot \int \left(1-\frac{z}{H}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{z}{R}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{1}{k} \cdot \frac{n}{m} \cdot z} \cdot \partial z .$$

Całka ta najłatwiej daje się obliczyć za pomocą szeregu. Jeżeli położymy:

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{n}{m} = a , \quad \frac{1}{H} = b , \quad \frac{1}{R} = c ,$$

będzie:

$$e^{az} = 1 + \frac{1}{1}(az) + \frac{1}{1.2}(az)^2 + \ldots ; \text{ lim } R_n = 0 \text{ dla skończonego } az .$$

$$\left.\begin{aligned} (1-bz)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot (bz) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1.2}(bz)^2 + \ldots \\ (1+cz)^{-\frac{3}{2}} &= 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot (cz) + \frac{3.5}{2.2} \cdot \frac{1}{1.2}(cz)^2 - \ldots \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{lim } R_n = 0 \\ &\text{dla } z \angle H,\ z \angle R . \end{aligned}$$

Jeżeli szeregi zbieżne nieskończone utrzymują swoją zbieżność jeszcze wtedy, gdy wyrazy wszystkie będą wzięte z jednakowemi znakami, to iloczyn ich jest również będzie szeregiem zbieżnym się i suma tego ostatniego jest iloczynem sum szeregów poprzednich.

Dla ostatniego szeregu z jednakowemi znakami jest:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{2n+3}{2n+2} cz = cz .$$

Szereg ten jest zbieżny również, jeżeli jest $z \angle R$.

Jeżeli oddzielne szeregi, znajdujące się pod znakiem całkowym, pomnożymy przez siebie i zcałkujemy, uwzględniając tylko zmienną z, co wystarcza dla dalszych wywodów, będzie:

$$\int \left(1-\frac{z}{H}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1-\frac{z}{R}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{1}{k} \cdot \frac{n}{m} \cdot z} \partial z = \int \left[1 \pm az \pm \ldots\right] \partial z = z \pm a', z^2 \pm \ldots$$

Po podstawieniu wartości całek, równaniem ruchu będzie:

$$(9)\qquad w^2 - G\,.\,\frac{R^2}{R+z} + \frac{k}{k-1}\,.\,\frac{p}{\varrho} - \frac{4}{3}\,.\,\frac{\mu}{\varrho}\,.\,\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$-\frac{4}{3}\mu\, w_2\,\frac{R+H}{2RH}\,.\,\frac{1}{k}\,.\,\frac{n}{m}\,.\,\varrho_2^{-1}\,.\,(z \pm a' z^2 \pm \ldots) + C_1 = 0\,.$$

Dla wyznaczenia stałej C_1 rozważmy gaz w zbiorniku. Granicami dla wyrazu pierwszego były 0 i $+z$; w zbiorniku jest $w = 0$, wyraz ten znika więc. Granicami dla wyrazu drugiego były 0 i $+z$; ponieważ nie jest wiadomem, w jakiej odległości $-z$, prawdopodobnie małej w stosunku do R, ma to miejsce, wolno więc przyjąć, że wpływ ciążenia równa się wpływowi tegoż dla $z = 0$, wyraz ten daje $-G\,.\,R$. Granicami dla wyrazu trzeciego były 0 i $\pm z$; w zbiorniku $\frac{p}{\varrho} = \frac{p_1}{\varrho_1}$, wyraz ten daje $+\frac{k}{k-1}\,.\,\frac{p_1}{\varrho_1}$. Granicami dla wyrazu ostatniego były 0 i $+z$; w zbiorniku, gdzie $w = 0$, jest również $\mu = 0$, wyraz ten znika.

Będzie więc:

$$(10)\qquad C_1 = G\,.\,R - \frac{k}{k-1}\,.\,\frac{p_1}{\varrho}\,.$$

By wykonać drugie całkowanie, mnożymy równanie (9) przez ∂z i bierzemy granice 0 i z, gdzie stosujemy tylko wartość $+z$; wtedy jest:

Dla wyrazu pierwszego w (9):

$$\int w^2\,\partial z = w_2^2\,.\int\left(1 - \frac{z}{H}\right).\left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1}.\,\partial z$$

$$= w_2^2\,.\left(1 - \frac{z}{H} - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{HR}\ldots\right)\partial z = w_2^2\,.\left(z - \frac{1}{2}\,.\,\frac{z^2}{H} - \frac{1}{2}\,.\,\frac{z^2}{R} + \frac{1}{3}\,.\,\frac{z^3}{H}\ldots\right)$$

a ponieważ dla $z = H$ całka ta jest:

$$w_2^2\,.\,H\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\,.\,\frac{H}{R}\ldots\right),$$

zaś $\frac{1}{6}\,.\,\frac{H}{R} = \frac{1}{378}$, wystarczą tu przeto tylko pierwsze dwa wyrazy:

$$\int w^2 \partial z = w_2^2 \,.\, z - \frac{1}{2} \,.\, w_2^2 \,.\, \frac{z^2}{H} \,.$$

Wyraz drugi w (9) będzie:

$$G \,.\, R^2 \int \frac{\partial z}{R+z} = G \,.\, R^2 \log \,.\, (R+z) \,.$$

Wyraz trzeci, ponieważ z równań (6) i (8) wynika:

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{1}{np^{\frac{1-k}{k}}} = - \frac{1}{n \,.\, p_2^{\frac{1-k}{k}} \,.\, e^{-\frac{1-k}{k} \cdot \frac{n}{m} \cdot z}} = \frac{p_2}{\varrho_2} \,.\, e^{-\frac{k-1}{k} \cdot \frac{n}{m} \cdot z} ,$$

będzie:

$$\frac{k}{k-1} \cdot \int \frac{p}{\varrho} \,.\, \partial z = - \left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{p_2}{\varrho_2} \,.\, e^{-\frac{k-1}{k} \cdot \frac{n}{m} \cdot z} .$$

Wyraz czwarty w (9) będzie:

$$\frac{4}{3} \mu \int \frac{1}{\varrho} \partial w = \frac{4}{3} \mu \frac{w}{\varrho} + \frac{4}{3} \mu \int w \,.\, \frac{1}{\varrho^2} \,.\, \partial \varrho ,$$

gdzie:

$$\int w \,.\, \frac{1}{\varrho^2} \,.\, \partial \varrho = - w_2 \,.\, \varrho_2^{-1} \,.\, \frac{1}{k} \cdot \frac{n}{m} \cdot \int \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} \,.\, e^{\frac{1}{k} \cdot \frac{n}{m} \cdot z} \,.\, \partial z$$

Ponieważ nowe szeregi:

$$(1 - bz)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} (bz) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2} (bz)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{1}{1.2.3} (bz)^2 - \ldots ,$$

$$(1 + cz)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \,.\, (cz) + \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{1}{1.2} (cz)^2 \ldots ,$$

na podstawie związków:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{2n+1}{2n+2} bz = bz ,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{2n+3}{2n+2} cz = cz ,$$

są zbieżne i dla wyrazów z jednakowemi znakami, gdy jest $z \angle H$, $Z \angle R$, przeto:

$$\int\left(1-\frac{z}{H}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{z}{R}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{m}\cdot z}\cdot\partial z=\int\left[1\pm b_1 z\pm\ldots\right]\partial z=z\pm b'_1 z^2\pm\ldots$$

W wyrazie ostatnim w (9) będzie:

$$\int(z\pm a'_1 z^2\pm\ldots)\,\partial z=a_0 z^2\pm a_1'' z^3\ldots$$

Z równania (10) będzie:

$$G.R\int\partial z=G.R.z\,;\quad\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_1}{\varrho_1}\int\partial z=\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_1}{\varrho_1}.z.$$

Po podstawieniu otrzymanych wartości całek, równanie (9) ruchu będzie:

$$w_2^2-\frac{1}{2}.w_2^2.\frac{z^2}{H}-G.R^2\log(R+z)-\left(\frac{k}{k-1}\right)^2\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{p_2}{\varrho_2}\cdot e^{-\frac{k-1}{k}\cdot\frac{n}{m}\cdot z}-\frac{4}{3}\mu\frac{w}{\varrho}$$

$$+\frac{4}{3}\mu w_2\varrho_2^{-1}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{m}\cdot(z\pm b_1' z^2\pm\ldots)-\frac{4}{3}\mu w_2\cdot\frac{R+H}{2RH}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{n}{m}\cdot\varrho_2^{-1}(a_0 z^2\pm a_1'' z^3)\ldots$$

$$+G.R.z+\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_1}{\varrho_1}.z+C_2=0.$$

Celem wyznaczenia stałej C_2 rozważamy gaz w wierzchołku protuberancyi, t. j. dla $z=H$, gdzie $w=0$ i zatem $\mu=0$.

Wyraz czwarty na mocy równań (6) i (8) będzie:

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^2\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{p_2}{\varrho_2}e^{-\frac{k-1}{k}\cdot\frac{n}{m}\cdot H}=\left(\frac{k}{k-1}\right)^2\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{p_3}{\varrho_3}.$$

Wyrazy z szeregami znikną, niezależnie od tego, iż szeregi te są zbieżne tylko dla $z \angle H$, ponieważ jest $\mu=0$.

Będzie więc:

$$C_2 = -\frac{1}{2} \cdot w_2^2 \cdot H + G \cdot R^2 \cdot \log (R+H)$$

$$+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{p_3}{\varrho_3} - G \cdot R \cdot H + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\varrho_1} \cdot H.$$

Teraz rozważamy gaz dla $z = 0$, gdzie $w = w_2$, $\varrho = \varrho_2$. Ponieważ z równań (6) wynika:

$$\frac{p_2}{\varrho_2} - \frac{p_3}{\varrho_3} = \frac{p_2}{\varrho_2} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right],$$

przeto szukanem równaniem ruchu będzie:

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\varrho_1} \cdot H = \frac{1}{2} \cdot w_2^2 \cdot H + G \cdot R \cdot \left[H - R \cdot \log\left(\frac{R+H}{R}\right)\right]$$

(11)
$$+\left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \frac{m}{n} \cdot \frac{p_2}{\varrho_2}\left[1 - \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] + \frac{4}{3}\mu \frac{w_2}{\varrho_2}.$$

Ażeby utrzymać zgodność wymiarów, trzeba w równaniu (7) pojmować z jako równe zawsze $\frac{z \cdot \text{cm.}}{1 \cdot \text{cm.}}$, ponieważ n i m mają wymiary te same, z oraz H są wymiaru (l); czynnik 1 cm. pozostaje więc wciąż po różniczkowaniu i całkowaniu.

Wymiary te w kolei wyrazów są następujące:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(m \cdot l^{-1} \cdot t^{-2})}{(m \cdot l^{-3})} \cdot (l) \\ (l^2 \cdot t^{-2}) \cdot (l) \\ (l \cdot t^{-2}) \cdot (l) \cdot (l) \\ \frac{(m \cdot l^{-3}) \cdot (l)}{(m \cdot l^{-3})} \cdot \frac{(m \cdot l^{-1} \cdot t^{-2})}{(m \cdot l^{-3})} \\ (m \cdot l^{-1} \cdot t^{-1}) \cdot \frac{(l \cdot t^{-1})}{(m \cdot l^{-3})} \end{array}\right\} (l^3 \cdot t^{-2}).$$

B. Zastosowanie liczebne równań.

I. Do wyznaczenia ciśnienia p_1 potrzebne są niektóre wartości liczbowe. Do wyznaczenia temperatury protuberancyj wystarczają następujące uwagi:

Temperatura istotna fotosfery (przy spółczynniku promieniowania 1) na podstawie prawa, iż „Ilość ciepła wysyłanego przez promieniowanie ciała jest proporcyonalna do 4-tej potęgi jego temperatury bezwzględnej", wynosi na podstawie nowszych obserwacyi około 7760°. Do obliczenia prawdziwej temperatury fotosfery należałoby uzasadnić to prawo promieniowania przy stosowalności go do ciał o spółczynniku promieniowania mniejszym niż 1, przytem ten ostatni musiałby być znany dla gazów przy tej wysokiej temperaturze. W dzisiejszym stanie wiedzy naszej można wziąć dla temperatury prawdziwej wartość 10000° [1]). Jako maximum temperatury prawdziwej możnaby postawić 40000°, jednakże wysoka ta wartość jest już bardzo nieprawdopodobna.

Temperatury te stosują się naturalnie tylko do warstw górnych fotosfery, dalej w głąb słońca temperatura musi się silnie zwiększać jeszcze; przyjmijmy wszakże, iż temperatura protuberancyj przy wypływie nie różni się zasadniczo od temperatury warstw górnych. Temperatura gazów przed wypływem jest naturalnie zasadniczo większa z powodu oziębiania się przy prędkości tak wielkiej. Temperatury obie te są związane równaniem (2).

Obliczenie wykonamy, przyjmując, że temperatura prawdziwa gazu po wypływie jest 10000° i że maximum wynosi 40000°.

Dla ciśnienia p_2 można wywnioskować wartość przybliżoną w sposób następujący:

Wygląd linij jasnych gazów protuberancyj przedstawia się w przybliżeniu takim, jaki daje się widzieć w linjach gazów rozżarzonych w rurach elektrycznych. Jeżeli przyjąć temperaturę gazów w protuberancyi i w rurach elektrycznych jako w przybliżeniu jednakowe, to na podstawie badań o wpływie ciśnienia

---

[1]) D-r J. Scheiner. Strahlung u. Temperatur der Sonne (523, 1, 49, 59).

i grubości warstwy promieniującej na szerokość i niewyrazistość linij widmowych, wywnioskujemy, że liczba cząsteczek gazu, które się znajdują na odcinku o grubości protuberancyi jest tego samego rzędu co liczba cząsteczek, które żarzą się w rurze elektrycznej o grubości niewielu centymetrów [1]). Stąd, jeżeli b oznacza ciśnienie, d grubość warstwy świecącej w rurze elektrycznej, D grubość podstawy protuberancyi w promieniu widzenia, ciśnienie u podstawy protuberancyi będzie:

$$p_2 = \frac{b \,.\, d}{D},$$

a ponieważ [2]):

$$b = 0{,}05 \text{ cm.}, \quad d = 5 \text{ cm.}, \quad D = 2.10^{10} \text{ cm.},$$

przeto

$$p_2 = \frac{1}{8 \,.\, 10^{10}} \text{ cm.}$$

Przy wyższej temperaturze gazów w protuberancyi byłoby p_2 jeszcze mniejsze.

Rachunek też wykonamy przy wartości większej $p_2 = \frac{1}{8 \,.\, 10^5}$ cm.

Wyskoki składają się z mieszaniny różnych gazów, przeważnie jednakże z wodoru. Ponieważ dla gazów innych odpowiednie stałe nie są znane, to uwzględnimy jedynie wodór; wtedy przy temperaturze 0^0, ciśnieniu 76^0, gęstości względnie do wody $s = \frac{0{,}06958}{773{,}3}$, spółczynniku rozszerzalności $d = 0{,}00367$, ciężarze właściwym wodoru pod ciśnieniem 1 cm. i przy temperaturze T^0 będzie:

$$n = \frac{s}{(1 + a\,T) \,.\, 76},$$

---

[1]) D-r J. Scheiner. Die Spectralanalyse der Gestirne (207).

[2]) P. A. Secchi. Le Soleil. T. II (67).

gdzie zastosowano wzór $\frac{pv}{1+aT}=R$, ponieważ wzór $\frac{(p+\frac{a}{v^2})(v-b)}{1+aT}=R$ jako wyprowadzony jest z poprawek zboczeń przy bardzo wielkich ciśnieniach, oraz stałe znalezione nie dadzą się stosować przy ciśnieniach bardzo małych [1]).

Ciężar właściwy normalny rtęci jest $m=13{,}595$. Stosunek obu gatunków ciepła właściwego dla wodoru jest $k=1{,}41$.

Zależność spółczynnika tarcia od temperatury może być wyrażona przez czynnik $(1+aT)^n$, gdzie n ma wartość $\frac{2}{3}$ od 0^0 do 1300^0 [2]). Ponieważ $\mu_0=0{,}00009$, będzie:

$$\mu=0{,}00009\,.\,(1+aT)^{\frac{2}{3}}\,.$$

Prędkości spostrzegane protuberancyj wybuchowych wynoszą 12, 60, 80 do 100 kilometrów [3]) na sekundę. Średnie wysokości protuberancyj wynoszą do 11120.10^5 cm. [4]). Prędkości początkowe stąd obliczone są:

$$w_2=\sqrt{\frac{2\,GRH}{R+H}}=77.10^5 \text{ cm.}$$

Ciążenie słońca

$$G=26660 \text{ cm.}$$

Ponieważ $R=695715.10^5$ cm., przeto dla wyznaczenia ciśnienia p_1, pomnożywszy równanie (9) przez $\frac{k-1}{k}\,.\,\frac{1}{H}$ i oznaczywszy część drugą przez A, otrzymamy przy uwzględnieniu równania (3):

---

[1]) Wzór van der Waalsa.
[2]) O. E. Meyer. Die kin. Th. d. G. (158).
[3]) P. A. Secchi. Le Soleil. T. II (Protuberances, 75).
[4]) D-r J. Scheiner. Str. u. Temp. d. Sonne (54).

$$p_1^{\frac{k-1}{k}} = A \,.\, n_1 \,.$$

Jeżeli oznaczymy spółczynnik przy n przez B, będzie:

$$n_1 = \frac{B}{T_1},$$

a ponieważ z równania (5) mamy:

$$T_1 = T_2 \,.\, \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

przeto:

$$p_1^{\frac{2(k-1)}{k}} = A \,.\, n_2 \,.\, p_2^{\frac{k-1}{k}} \,.$$

Dla wartości danych ciśnienia p_2 i temperatury T_2 otrzymujemy następujące wartości ciśnienia p_1 i temperatury T_1:

	p_2		
T_2		10000^0	40000^0
	$1^{cm.}$ / $8 \,.\, 10^{10}$	$p_1 = 214{,}7^{At}$ $T_1 = 249.10^6$	$= 19{,}8$ $= 497.10^6$
	1 / $8 \,.\, 10^5$	$= 67475{,}0$ $= 47.10^6$	$= 6221{,}6$ $= 93.10^6$

II. Rozważano już dawniej odpowiednie zagadnienie przy pewnych uproszczeniach [1]). Dla sprawdzenia powyższych wyników, wyprowadzimy z tych wzorów wartości liczebne.

Niechaj w zbiorniku ciśnienie i gęstość będą p_1 i ϱ_1; w przestrzeni otwartej p_2 i ϱ_2; mamy wyznaczyć prędkość wypływu.

---

[1]) H. Lamb. Treat. on the mot. of Fl. (27).

Zakładając, że ruch jest stateczny, że więc w (4) $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$, i pomijając siły zewnętrzne i tarcia, a więc całkując jednorazowo, znajdziemy przy tymże układzie spółrzędnych:

W zbiorniku przy ciśnieniu p_1, gęstości ϱ_1 i prędkości $w = 0$:

$$C_1 = -\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\varrho_1}.$$

Przy wypływie pod ciśnieniem p_2 i przy gęstości ϱ_2 prędkość $w = w_2$, zatem równanie ruchu na podstawie równania (9) będzie:

$$\frac{1}{2} w_2^2 + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_2}{\varrho_2} - \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\varrho_1} = 0 \tag{12}$$

i [1])

$$w_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1}} \cdot \left(\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Równanie to zwykle bywa stosowane do doświadczeń.

Dla sprawdzenia powyższych, z równania (11) otrzymanych wartości liczebnych, używamy do obliczenia równania (12) i otrzymujemy przytem na log $\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\varrho_1}$:

	Równanie (12)	Równanie (11)
$T_2 = 10000^0$, $p_2 = \frac{1 \text{ cm.}}{8 \cdot 10^{10}}$	13,471952	13,647299
$= 10000^0$, $= \frac{1 \text{ cm.}}{8 \cdot 10^5}$	13,471952	14,576305
$= 40000^0$, $= \frac{1 \text{ cm.}}{8 \cdot 10^{10}}$	13,471952	13,645702
$= 40000$, $= \frac{1 \text{ cm.}}{8 \cdot 10^5}$	13,471952	13,650759

[1]) H. Lamb. Treat. on the Mot. (s. 27).

Zgodność jest zadawalająca, jednakże wartości z równania (11) są nieco większe z powodu uwzględnienia tarcia.

Dla ciśnienia p_1 i temperatury T_1 otrzymalibyśmy wartości prawie też same.

III. Wybuch wyskoku spowodowany bywa przez tęż samą siłę ciśnienia dla każdej części składowej mieszaniny gazu. Stąd powstała siła ciśnienia w kierunku ruchu będzie jednakowo wielka dla każdej części składowej. Składa się ona z ciśnienia w mieszaninie gazu spoczywającej i z ciśnienia wybuchu [1]). Ponieważ ciśnienie w spoczywającej mieszaninie gazu jest jednakowo wielkie dla każdej części składowej, przeto i siła ciśnienia wybuchu będzie jednakowo wielka dla każdej części składowej, t. j.

$$\varrho_H \cdot w_H^2 = \varrho_{He} \cdot w^2_{He} = \ldots,$$

gdzie ϱ jest gęstością, w szybkością wybuchu, albo

$$\varrho_H \cdot 2\,GH_H = \varrho_{He} \cdot 2\,GH_{He} = \ldots,$$

a zatem:

$$H_H : H_{He} : \ldots = \frac{1}{\varrho_H} : \frac{1}{\varrho_{He}} : \ldots$$

Dla wartości liczebnych [2]):

$$\varrho_H = 1\,;\ \varrho_{He} = 2{,}14\,;\ \varrho_{Na} = 12{,}75\,,$$

otrzymalibyśmy stosunek wysokości pojedynczych linij w widmie wyskoków:

$$H_H : H_{He} : H_{Na} : = 1 : 0{,}47 : 0{,}07 : \ldots$$

Wysokości spostrzeżone odpowiadają przybliżenie tym liczbom [3]).

IV. Maximum masy wypływu jest zależna od wielkości $w_2 \cdot \varrho_2$. Licząc podług wzoru (12), otrzymujemy:

$$w_2 \varrho_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot \varrho_1 \cdot p_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}} \right]},$$

---

[1]) O. E. Meyer. Die Kinetische Theorie der Gase (s. 69).

[2]) Proc. Roy. Soc. 12 marca 1896. V. 59 (s. 325).

[3]) D-r J. Scheiner. Die Sp. d. Gestirne (s. 203).

ponieważ

$$w_2 = \frac{2k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\varrho_1} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Maximum wielkości $w_2 \varrho_2$ odpowiada maximum wyrażenia w nawiasach klamrowych, a więc ma miejsce, jeżeli

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{2}{k+1}.$$

Prędkość wybuchu będzie wtedy:

$$w_2 = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot \frac{p_1}{\varrho_1}}.$$

Dla wartości liczebnych $T_2 = 10000^0$ i $p_2 = \frac{1 \text{ cm.}}{8 \cdot 10^{10}}$ otrzymujemy:

$$w_2 = 38859.10^2 \text{ cm.},$$
$$H = 28321.10^4 \text{ cm.}.$$

Prędkość ta i wysokość są mniejsze, aniżeli średnie obserwowane.

Im gęstszą jest masa w protuberancyi, tem mniejszą musiałaby być wysokość jego. Tak zwane protuberancye wybuchowe metaliczne zdają się być tego przykładem.

V. Poprzednio wyobrażano sobie, że olbrzymie prędkości, obserwowane w protuberancyach, zależeć muszą od różnic ciśnień niezwykle silnych, i wywnioskowano stąd, że protuberancyj nie można wyjaśnić na drodze mechanicznej, że muszą być one pochodzenia elektrycznego, t. j. że prędkości obserwowane nie odpowiadają rzeczywistym miejsca zmianom mas. Mniemam, iż udało mi się wykazać, że wielkie ciśnienie początkowe nie jest bynajmniej koniecznem do wytworzenia tych prędkości. Natomiast dla temperatur otrzymałem wartości bardzo wysokie; przy naszej zupełnej nieznajomości stosunków w masie wewnętrznej słońca nie może być mowy o naukowej dyskusyi tego rezultatu.