SYSTEM UNIWERSALNY
ZNAKOWANIA W TECHNICE UBEZPIECZEŃ ŻYCIOWYCH.

Podał i objaśnił oraz uwagami opatrzył

B. Danielewicz.

Chociaż dla teoryi i badań matematycznych w zasadzie jest rzeczą zupełnie obojętną, jakiego symbolu użyjemy do oznaczenia tego lub innego pojęcia, wielkości albo funkcyi, niemniej jednak w tych przynajmniej działach, które posiadają bardzo wiele pojęć, zarówno autorom jak i czytelnikom może zależeć na tem, aby znakowanie było ustalone; autorowie bowiem uniknąć przez to mogą niełatwej pracy obmyślania najodpowiedniejszych oznaczeń, a czytelnicy nie będą potrzebowali wysilać umysłu na spamiętanie w każdej książce inaczej ułożonych symboli.

W takiem położeniu znajduje się właśnie technika ubezpieczeń życiowych i dla tego zawiązany przed kilku laty w Brukselli „Komitet nieustający kongresów międzynarodowych matematyków ubezpieczeniowych“ (Comité permanent des Congrès internationaux d'Actuaires); wziąwszy w swoje ręce sprawę ujednostajnienia oznaczeń, wydelegował zaraz na początku swej działalności komisyę do zaprojektowania odpowiedniego systemu. W skład komisyi weszli pp.: Am. Bégault z Brukselli, D-r J. Karup z Goty, G. King z Londynu, L. Marie z Paryża i D-r T. B. Sprague z Edynburga.

Na drugim kongresie, odbytym w 1898 r. w Londynie, komisya przedstawiła projekt znakowań, zaczerpniętych przeważnie z książki angielskiej: „Institute of Actuaries Text-Book“, który też w d. 19 maja tegoż roku jednogłośnie został przyjęty.

Wprawdzie D-r Sprague, jeden z najznakomitszych actuaries'ów angielskich, godząc się w zasadzie na sam system, wyraził zdanie, że zarówno kolej jak i sposób opisania znaczeń symbolów nadają się jeszcze do ulepszeń, wszakże okoliczności te oczywiście nie mogą wpłynąć na zmianę oznaczeń ustanowionych, skutkiem czego ku pożytkowi i wygodzie naszych czytelników, podajemy poniżej ów system w takiej postaci, w jakiej został ogłoszony w ostatnim Buletynie Komitetu nieustającego (№ 5 z dnia 15 czerwca 1901 r. — Bruksella).

Za symbole główne przyjęto w zasadzie pierwsze głoski nazw angielskich danych pojęć, które też pomieszczamy w nawiasie, po przytoczeniu odpowiedniego określenia. Inne objaśnienia i uwagi dajemy od siebie w przypiskach.

O p r o c e n t o w a n i e (Interest — Intérêt — Verzinsung):

i = stopa rzeczywista, czyli wynagrodzenie, jakie się należy przy końcu roku za wypożyczenie 1-ki kapitału na rok jeden (interest).

$j_{(m)} = m\left\{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right\}$ = stopa nominalna, czyli m-krotnie wzięte wynagrodzenie, jakie się należy w terminach co m-a część roku za wypożyczenie 1-ki kapitału [1]).

$i^{(m)}$ = stopa rzeczywista, odpowiadająca wynagrodzeniu rocznemu od 1-ki, gdy wynagrodzenie przypada w termininach co m-a część roku [2]).

$\bar{i}$ = stopa rzeczywista, odpowiadająca wynagrodzeniu rocznemu od 1-ki, gdy wynagrodzenie liczy się w sposób ciągły [3]).

$v = (1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i}$ = wartość 1-ki kapitału płatnego za rok (value — wartość).

$d = 1 - v = \frac{i}{1+i}$ = dyskont od 1-ki płatnej za rok (discount — dyskont).

$\delta = j_{(\infty)} = \log\text{nat}\,(1+i) = -\log\text{nat}\,(1-d)$ = natężenie procentowe, albo siła dyskontowa [4]).

$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n$ = wartość początkowa (czyli teraźniejsza) renty pewnej [5]), mającej się płacić z dołu (postnumerando) przez n lat po 1-ce rocznie (annuity — płaca roczna) [6]).

$s_{\overline{n|}} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}$ = wartość końcowa renty pewnej [5]), płatnej z dołu przez n lat po 1-ce rocznie (sum — suma, zebranie) [7]).

Uwaga. D-r Karup twierdzi, że na zasadzie związków, podanych przez nas w przypiskach [1]), [2]) i [3]), oznaczenia $i^{(m)}$ oraz $\overline{i}$ są zbyteczne, gdyż dają się wyrazić przez i, $j_{(m)}$ oraz δ. Naszem zdaniem, jedno drugiemu nic nie przeszkadza.

Tablice śmiertelności (Mortality tables — Tables de mortalité — Sterblichkeitstafeln):

Głoska w nawiasie, jak np. (x) oznacza „osobę w wieku x".

Każdego rodzaju funkcyę oznacza specyalna głoska, której znaczenia w przypadkach pojedynczych zostają bliżej określone przez dodanie skaźników i t. p.

l = liczba żyjących (living — żyjący).

d = liczba zmarłych (dying — umierający) [8]).

L = ludność (liczba osób ludności stałej) [9]).

p = prawdopodobieństwo dożycia (probability — prawdopodobieństwo).

$\left.\begin{matrix} q \\ Q \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \text{prawdopodobieństwo śmierci, przyczem } q \text{ odnosi się do roku.} \\ Q \text{ do dłuższego okresu czasu } ^{10}). \end{matrix}\right.$

μ = siła śmiertelności [11]) (albo natężenie śmiertelności

$$= -\frac{1}{l}\cdot\frac{dl}{dx}\Big)^{12)}.$$

m = śmiertelność średnia (czyli stosunek liczby wypadków śmierci do liczby lat przeżytych przez osoby żyjące) [11]).

e = średnia długość życia (Expectation of life — życie spodziewane) [13]).

E = wartość ubezpieczenia na dożycie (Endowment).

a = wartość renty dożywotniej, płatnej rocznie z dołu (postnumerando) w wysokości 1-ki (annuity).

a = wartość renty dożywotniej, płatnej rocznie z góry (praenumerando) w wysokości 1-ki.

A = wartość ubezpieczenia, albo — co na jedno wychodzi — premia jednorazowa za ubezpieczenie na przypadek śmierci (Assurance).

$V =$ wartość polisy, czyli rezerwa premiowa (Value).

$W =$ ubezpieczenie zredukowane, wolne od dalszych opłat [14]).

$\left.\begin{matrix} P \\ \pi \end{matrix}\right\} =$ premie roczne, przyczem P oznacza w ogóle premię czystą, podczas gdy π [15]) wyobraża premie specyalne, np. dla ubezpieczeń ze zwrotem premii (Premium).

Brany pod uwagę wiek oznacza się za pomocą małych głosek, dodawanych jako skaźnik po stronie prawej symbolu, nieco niżej; gdy jest mowa o wieku kilku osób, skaźniki wyobrażające wiek piszą się obok siebie bez żadnych znaków rozdzielczych. Mamy więc:

$l_x =$ liczba osób żyjących, według tablicy śmiertelności, w wieku x lat.

$d_x =$ liczba osób zmarłych w wieku od x do $x + 1$ lat.

$p_x =$ prawdopodobieństwo, że (x) przeżyje rok.

$q_x =$ prawdopodobieństwo, że (x) umrze w ciągu roku.

$m_x =$ śmiertelność średnia dla okresu od x do $x + 1$ lat, w przybliżeniu $= \mu_{x+\frac{1}{2}}$.

$a_x =$ wartość 1-ki renty rocznej, płatnej osobie (x) dożywotnio z dołu.

$\mathbf{a}_x =$ wartość 1-ki renty rocznej, płatnej osobie (x) dożywotnio z góry.

$a_{xyz} =$ wartość 1-ki renty rocznej, płatnej z dołu aż do śmierci jednej z trzech osób (x), (y) i (z) — (renta wspólna).

$A_x =$ wartość ubezpieczenia 1-ki kapitału, płatnego przy końcu roku, w którym (x) umrze.

$A_{xyz} =$ wartość ubezpieczenia 1-ki kapitału, płatnego przy końcu roku, w którym związek osób (x), (y) i (z), przez śmierć jednej z nich, zerwany zostanie.

Gdy głoska w skaźniku jest objęta kątem prostym, wtedy nie oznacza wieku, lecz czas trwania opłat. Tym sposobem:

$a_{x\overline{n}|} =$ wartość 1-ki renty, płatnej za życia osoby (x) przez n lat, czyli jest to renta, oparta na życiu (x), lecz skrócona do n lat (nie mogąca trwać dłużej niż n lat).

$A_{x\overline{n}|}$ = wartość ubezpieczenia jednostki kapitału, płatnego przy końcu roku śmierci osoby (x), jeżeli ta umrze w ciągu n lat, lub po upływie n lat, jeżeli wtedy osoba (x) pozostawać będzie przy życiu. Jest to zatem skrócone (mieszane) ubezpieczenie z terminem n-letnim.

Gdy skaźnik sprowadza się tylko do jednej głoski, objętej kątem prostym, to oznacza on tylko czas określony:

$a_{\overline{n}|}$ = wartość 1-ki renty pewnej, płatnej przez n lat.

$A_{\overline{n}|} = v^n$ = wartość 1-ki kapitału, płatnego bezwarunkowo po upływie n lat.

Gdy głoski skaźnika są rozdzielone kreską pionową, to się rozumie, że osoby postawione przed kreską wprzód mają umrzeć. Stosownie do tego:

$a_{y|x}$ = wartość 1-ki renty, opartej na życiu osoby (x), której wypłata rozpoczyna się po śmierci osoby (y).

$A_{z|xy}$ = wartość ubezpieczenia 1-ki kapitału, płatnego po śmierci jednej z dwóch osób (x) lub (y), przy założeniu, że obie przeżyją osobę (z).

Gdy nad skaźnikiem znajduje się kreska pozioma, to nie bierze się pod uwagę istnień połączonych lecz przeżywające. Liczba przeżywających osób oznacza się głoską lub cyfrą, postawioną po stronie prawej nad kreską poziomą. Jeśli do głoski, którą niech będzie r, nie dodaje się żadnego innego oznaczenia, wówczas określa to co najmniej r osób przeżywających inne; gdy zaś jest zamknięta w nawias prostokątny, wtedy ma się na względzie ściśle r osób przeżywających. Jeżeli wreszcie ponad kreską poziomą nie ma wcale głoski ani liczby, wychodzi na jedno, jakby była jednostka, czyli oznacza, że co najmniej jedna osoba ma przeżyć wszystkie pozostałe. Mamy przeto:

$e_{\overline{xyz\ldots(m)}}^{\;r}$ = średnia trwałość wspólnego życia m osób, przy co najmniej r przeżywających.

$p_{\overline{xyz\ldots(m)}}^{\;[r]}$ = prawdopodobieństwo, że z pośród m osób, żyjących na początku roku, ściśle r osób żyć będzie przy końcu roku (przeżyje rok).

$a_{\overline{xyz}}$ = wartość 1-ki renty rocznej, płatnej tak długo, dopóki chociaż jedna z trzech osób (x), (y) i (z) pozostawać będzie przy życiu.

Cyfry, pomieszczone nad lub pod głoskami skaźnika, oznaczają porządek (kolej), w jakim osoby mają umierać. Cyfry górne oznaczają osoby, od których śmierci zależy ostatecznie dane zjawisko; cyfry dolne natomiast określają porządek, w jakim inne osoby mają wymierać. Tak więc jest np.:

$$\left.\begin{matrix} Q^1_{xyz} \\ Q^2_{xyz} \\ Q^3_{xyz} \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} \text{prawdopodobieństwo,} \\ \text{że z pośród trzech} \\ \text{osób } (x), (y), (z) \end{matrix} \left\{\begin{matrix} (x) \text{ umrze pierwsza} \\ \text{„ \quad „ \quad druga} \\ \text{„ \quad „ \quad trzecia.} \end{matrix}\right.$$

$A^{4}_{\underset{3\,2\,1}{wxyz}}$ = wartość ubezpieczenia 1-ki kapitału, płatnego przy końcu roku śmierci osoby (w), gdy ta umrze ostatnia i gdy z trzech innych najprzód umrze (z), potem (y), następnie (x).

$\left.\begin{matrix} a^{\ 1}_{\overline{y\underset{1}{z}}|x} \\ \text{lub } a^2_{yz|x} \end{matrix}\right\}$ = wartość 1-ki renty, płatnej osobie (x) po śmierci (z) i (y), gdy (z) umrze przed (y).

$A_{\overline{xy}:\underset{3}{z}}$ = wartość ubezpieczenia 1-ki kapitału, płatnego przy końcu roku, w którym umiera druga (przeżywająca pierwszą) z dwóch osób (x) i (y), jeżeli ta śmierć następuje przed śmiercią osoby (z), czyli płatnego w razie, gdy (z) przeżywa obie osoby (x) i (y).

Jeżeli jasność wymaga oddzielenia głosek w skaźniku, to należy użyć dwukropka, a nie kropki lub przecinka, co przy wprowadzeniu liczb łatwo wzięte być może za znak ułamku dziesiętnego [16]). Pisze się zatem $a_{x+n:y+n}$ i $A_{35:40}$.

Głoska, napisana po stronie lewej symbolu, nieco niżej, oznacza liczbę lat, na jaką rozciąga się prawdopodobieństwo lub operacya, oznaczona przez symbol. A więc:

${}_np_x$ = prawdopodobieństwo, że (x) przeżyje n lat.

${}_nE_x$ = wartość ubezpieczenia 1-ki kapitału na dożycie, płatnego po upływie n lat.

Gdy po głosce, stojącej z lewej strony symbolu, nieco niżej, następuje kreska pionowa, to głoska oznacza czas odroczenia, gdy kreska pionowa poprzedza głoskę, wówczas ta ostatnia oznacza czas trwania:

$_n|q_x$ = prawdopodobieństwo, że (x) po upływie n lat, w ciągu następnego, t. j. $n+1$-go roku umrze.

$|_nQ_x$ = prawdopodobieństwo, że (x) umrze w ciągu n lat.

$|_na_x = a_{x\overline{n}|}$ = wartość 1-ki renty rocznej, opartej na życiu (x) i skróconej do n lat, czyli płatnej co najwyżej przez n lat (renta czasowa).

$_t|_na_x$ = wartość jednostki renty rocznej, opartej na życiu (x), płatnej przez lat n po upływie lat t (renta odroczona czasowa).

Głoska w nawiasie, pomieszczona po stronie prawej, nieco wyżej symbolu, oznacza części na jakie rok się dzieli. Stosownie do tego:

$a^{(m)}$ = wartość 1-ki renty, płatnej w m ratach rocznie po $\frac{1}{m}$.

$A_x^{(m)}$ = wartość ubezpieczenia 1-ki kapitału, płatnego przy końcu tej $\frac{1}{m}$ części roku, w której (x) umarła.

Gdy rok jest podzielony na nieograniczenie wiele części, czyli — co na jedno wychodzi — gdy m staje się nieskończenie wielkiem, to się nie zastępuje m przez ∞, lecz stawia się nad symbolem kreskę poziomą. Zatem:

$\bar{a}$ = wartość renty ciągłej w stosunku 1-ki rocznie.

$\bar{A}$ = wartość ubezpieczenia 1-ki kapitału, płatnego w chwili śmierci (natychmiast po śmierci).

Małe kółko, umieszczone nad symbolem, oznacza ściśle obliczoną długość życia, ewentualnie wypłatę proporcyonalną. Jest więc:

$\mathring{e}$ = kompletna długość średnia życia.

$\mathring{a}$ = wartość kompletnej renty dożywotniej (w której za czas przeżyty, po ostatnim terminie płatności raty prawidłowej, płaci się część odpowiednio proporcyonalną).

Przy rentach na przeżycie, terminy, w jakich renty ewentualne mają się płacić, bywają czasami z góry określane, czasami zaś zależą od chwili, w której zachodzi zdarzenie, od jakiego otrzymywanie renty jest zawisłe. Otóż ma się oznaczać przez:

$a_{y|x}$ = wartość renty na przeżycie, płatnej osobie (x) po raz pierwszy w końcu roku, w którym umrze (y), albo średnio w sześć miesięcy po śmierci (y).

$\hat{a}_{y|x}$ = wartość renty na przeżycie, płatnej osobie (x) po raz pierwszy w rok po śmierci (y).

$\overset{\wedge}{\mathring{a}}_{y|x}$ = wartość renty kompletnej, t. j. płatnej osobie (x) po raz pierwszy w rok po śmierci (y), a po raz ostatni przy śmierci (x) w stosunku do czasu, przeżytego przez tę osobę od chwili wypłaty ostatniej raty prawidłowej.

Symbole: P dla premii (rocznej), V dla rezerwy premiowej i W dla ubezpieczeń zredukowanych, wolnych od dalszych opłat (polisy spłacone) mają być w zasadzie łączone z symbolami, przedstawiającymi odpowiednie wartości ubezpieczeń, czyli premie jednorazowe. Zatem:

$P(A^{1}_{xy})$ = premia roczna od ubezpieczenia 1-ki kapitału, płatnego w razie przeżycia osoby (x) przez (y).

${}_tV(A_{x\overline{n}|})$ = rezerwa premiowa po t latach od ubezpieczenia skróconego (mieszanego) 1-ki kapitału, opartego na życiu (x).

${}_tW(A_x)$ = ubezpieczenie zredukowane, wolne od dalszych opłat, przez jakie po t latach może być zastąpione ubezpieczenie zwyczajne 1-ki kapitału na przypadek śmierci, oparte na życiu (x).

Skaźniki i tym podobne znaki i znaczki, które rodzaj ubezpieczenia określają, mają być dodawane do powyżej podanych symboli, określające zaś sposób płacenia premii rocznych, mają być łączone z symbolem P — tak, że mamy:

${}_nP(\overline{A}_x)$ = premia roczna, płatna co najwyżej przez lat n, za ubezpieczenie 1-ki kapitału, mającego się wypłacić zaraz po śmierci osoby (x).

$P_{xy}(A_x)$ = premia roczna, płatna przez czas łącznego życia osób (x) i (y), za ubezpieczenie 1-ki kapitału, mającego się wypłacić przy końcu roku, w którym (x) umrze.

${}_tP^{(m)}(A_{x\overline{n}|})$ = premia roczna, płatna w m ratach rocznie, co najwyżej przez lat t, za ubezpieczenie skrócone (mieszane) 1-ki kapitału z terminem dożycia osoby (x) do wieku $x + n$.

W niektórych pojedynczych przypadkach w których możność niewłaściwego zrozumienia rzeczy jest wyłączona, dozwala się używać symboli P, V i W samodzielnie tak, że można w razach takich pisać P^1_{xy} za $P(A^1_{xy})$, ${}_tV_{x\overline{n}|}$ za ${}_tV(A_{x\overline{n}|})$ i ${}_tW_x$ za ${}_tW(A_x)$ [17]).

W poszukiwaniach szczególnych, w których zachodzą wartości zmodyfikowane funkcyj znanych, zaleca się stosować akcenty. Gdy np. do obliczenia rezerwy używa się zamiast premii netto, jakiejś szczególnej (np. wziętej według innej tablicy śmiertelności lub obciążonej pewnym dodatkiem), to się ją oznacza przez P', a odpowiednią rezerwę przez V'. W podobny sposób premia taryfowa może być oznaczona przez P'', wykup przez V'', a rzeczywiście przez instytucyę wydzielane, zredukowane, wolne od dalszych opłat ubezpieczenie przez W''.

Wymieniamy jeszcze następujące symbole złożone:

(Ia) = wartość renty zaczynającej się od 1-ki rocznie i rosnącej co rok o 1-kę (Increasing annuity — renta rosnąca).

(IA) = wartość ubezpieczenia kapitału na przypadek śmierci, poczynającego się od 1-ki i rosnącego co rok o 1-kę (Increasing Assurance — ubezpieczenie rosnące).

(va) = wartość renty zmieniającej się (varying annuity — renta zmieniająca się).

(vA) = wartość zmieniającego się ubezpieczenia kapitału na przypadek śmierci (varying Assurance — ubezpieczenie zmieniające się).

Gdy odpowiednie renty lub ubezpieczenia posiadają ograniczony czas trwania, wtedy oznaczający te okoliczności skaźnik ma być pomieszczony zewnątrz nawiasem:

$(Ia)_{x\overline{n}|}$ = wartość renty czasowej (skróconej do n lat), zaczynającej się od 1-ki rocznie i rosnącej co rok o 1-kę.

$(IA)^1_{x\overline{n}|}$ = wartość skróconego do n lat ubezpieczenia kapitału na przypadek śmierci, poczynającego się od 1-ki i rosnącego co rok o 1-kę.

$(va)_{x\overline{n}|}$ = wartość zmieniającej się renty czasowej (skróconej do n lat).
$(vA)^1_{x\overline{n}|}$ = wartość zmieniającego się czasowego ubezpieczenia kapitału na przypadek śmierci (skróconego do n lat).

Jeżeli tylko wzrost lub zmiana są ograniczone co do czasu, samo zaś ubezpieczenie trwa przez całe życie, to skaźnik pomieszcza się bezpośrednio przy symbolu I lub v:

$(I_{\overline{n}|}a)_x$ = wartość renty dożywotniej,
$(I_{\overline{n}|}A)_x$ = wartość ubezpieczenia zwyczajnego kapitału na przypadek śmierci,
} poczynające się od 1-ki i rosnące corocznie o 1-kę przez n lat.

$(v_{\overline{n}|}a)_x$ = wartość renty dożywotniej,
$(v_{\overline{n}|}A)_x$ = wartość ubezpieczenia zwyczajnego kapitału na przypadek śmierci
} zmieniające się przez n lat.

Liczby zdyskontowane oraz ich sumy (tablice pomocnicze — Commutations Columns — Colonnes de Commutation — Kommutations — Kolumnen):

$$\left.\begin{aligned}
D_x &= v^x l_x.\\
N_x &= D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \text{i t. d.}\\
N_x &= D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \text{i t. d.}\\
S_x &= N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \text{i t. d.}\\
C_x &= v^{x+1} d_x.\\
M_x &= C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \text{i t. d.}\\
R_x &= M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \text{i t. d.}
\end{aligned}\right\} \quad 18)$$

Jeżeli zdyskontowane liczby zmarłych oraz ich sumy mają dawać bezpośrednio premie, zapewniające natychmiastową wypłatę kapitału zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, to należy odnośne symbole zaopatrzyć u góry w linijkę poziomą. A więc:

$$\begin{aligned}
\overline{C}_x &= v^{x+\frac{1}{2}} d_x, \text{ przybliżenie.}\\
\overline{M}_x &= \overline{C}_x + \overline{C}_{x+1} + \overline{C}_{x+2} + \text{i t. d.}\\
\overline{R}_x &= \overline{M}_x + \overline{M}_{x+1} + \overline{M}_{x+2} + \text{i t. d.}
\end{aligned}$$

Życia złączone (Joint lives — Têtes réunies— Verbundene Leben):

$$D_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}} l_x l_y .$$

$$N_{xy} = D_{x+1:y+1} + D_{x+2:y+2} + D_{x+3:y+3} + \text{i t. d.}$$

$$C_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}+1} (l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}).$$

$$M_{xy} = C_{xy} + C_{x+1:y+1} + C_{x+2:y+2} + \text{i t. d.}$$

$$C^1_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}+1} d_x l_{y+\frac{1}{2}} .$$

$$M^1_{xy} = C^1_{xy} + C^{\ 1}_{x+1:y+1} + C^{\ 1}_{x+2:y+2} + \text{i t. d.}$$

Wybór (Selection — Sélection — Selection oder Auswahl). Wiek, w którym dopełniono wyboru ma być pisany w nawiasach prostokątnych. Gdy w skaźniku, oprócz liczby w klamrach, występują jeszcze inne — dodatkowe, wtedy oznaczają czas, jaki upłynął od chwili dokonania wyboru. Razem wzięty skaźnik oznacza zatem, jak zwykle, obecny wiek osoby:

$a_{[x]}$ = wartość 1-ki renty dla dopiero co wybranej osoby w wieku lat x.

$a_{[x]+n}$ = wartość 1-ki renty dla osoby obecnie $x+n$ letniej, która przed n latami, t. j. w wieku x, była poddana wyborowi.

$a_{[x-n]+n}$ = wartość 1-ki renty dla osoby obecnie x letniej, która przed n latami, mając wtedy $x-n$ lat, była wybrana.

To samo stosuje się i do innych funkcyj.

Uwagi i objaśnienia.

[1]) Przy takiem znaczeniu $j_{(m)}$, oczywiście:

$$\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m = 1+i\,, \quad \text{skąd } j_{(m)} = m\left\{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right\}.$$

[2]) I tu:

$$\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m = 1+i^{(m)}, \quad \text{a stąd } i^{(m)} = \left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m - 1\,.$$

[3]) Innemi słowy, jest to wartość graniczna ilości $i^{(m)}$ przy $m = \infty$.

Ponieważ, jak wiadomo:

$$\lim \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m = e^{j\,(\infty)},$$

przeto

$$i^{(\infty)} = \bar{i} = e^{j\,(\infty)} - 1\,.$$

Zobaczymy z dalszych oznaczeń, że $\bar{i} = e^{\delta} - 1$.

[4]) Wyrażenie $j_{(m)} = m\,.\left\{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right\} = \dfrac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}}$, przy $m = \infty$, przybiera postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$, której wartość równa się stosunkowi pochodnych licznika i mianownika, wziętych względem $\frac{1}{m}$, przy $m = \infty$. Owóż stosunek pomienionych pochodnych równa się

$$\frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}\,.\log^{1)}(1+i)}{1},$$

zatem, przy $m = \infty$

$$j_{(\infty)} = \delta = \log(1 + i),$$

albo, ponieważ z $d = \dfrac{i}{1+i}$ wypada $1 + i = \dfrac{1}{1-d}$, mamy jeszcze

$$j_{(\infty)} = \delta = -\log(1 - d)\,.$$

Zauważyć przy tem należy, że symbol δ powstał przez analogię z d.

[5]) Rentą pewną nazywa się dochód, otrzymywany przez pewną z góry ściśle oznaczoną liczbę lat, bez względu na to, czy osoba pobierająca dochód, pozostaje przez ten czas przy życiu, czy też nie.

[6]) Na podstawie znanego wzoru na sumę wyrazów postępu geometrycznego

$$a_{\overline{n}|} = \frac{v\,(1 - v^n)}{1 - v}\,.$$

---

[1]) log oznacza logarytm naturalny (t. j. przy podstawie e).

[7]) Z tej samej, co i w przypisku [6]), przyczyny

$$s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} .$$

[8]) Widzimy, że d ma podwójne znaczenie: raz wyobraża dyskont, drugi raz liczbę zmarłych. Należałoby zatem wprowadzić pomiędzy tymi symbolami pewne rozróżnienie, np. pierwsze oznaczać przez **d** (proste), drugie przez d (ukośne); albo pierwsze przez ∂, drugie przez d. Chociaż w ogóle i jedno i drugie jest niedobre, gdyż d, ∂, Δ i δ mają już swoje powszechnie uprzywilejowane znaczenia: d jest symbolem różniczki zupełnej, ∂—różniczki cząstkowej, Δ—różnicy skończonej, a δ—waryacyi. Wobec tego najlepiej byłoby innych użyć oznaczeń. Przez niektórych autorów liczba zmarłych oznacza się przez greckie τ (Tod — śmierć).

[9]) Przez analogię z l.

[10]) Ponieważ q najczęściej jest dopełnieniem p do jedności, więc dlatego prawdopodobieństwo śmierci oznaczone zostało przez q, jako przez głoskę następującą bezpośrednio po p w alfabecie łacińskim.

[11]) Symbole m i μ wzięte zostały od wyrazu „mortality"—śmiertelność, umieranie.

[12]) Jeżeli l oznacza funkcyę, wyrażającą liczbę osób, żyjących w danej chwili, to po upływie dx czasu (wyrażonego jako nieskończenie mała cząstka pewnego okresu czasu, np. roku, przyjętego za jednostkę) żyje osób $l+dl$, t. j. umarło w ciągu czasu dx osób $l-(l+dl) = -dl$. Więc prawdopodobieństwo śmierci w ciągu czasu dx równa się $-\frac{dl}{l}$. Gdy dalej to ostatnie wyrażenie podzielimy przez dx, otrzymany iloraz równać się będzie temu samemu, coby wypadło z pomnożenia $-\frac{dl}{l}$ przez liczbę cząstek dx zawartą w roku, czyli $-\frac{1}{l}\cdot\frac{dl}{dx}$ oznacza prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku, przy założeniu, że w przeciągu każdej cząstki czasu dx prawdopodobieństwo śmierci jest to samo. Natężenie śmiertelności jest zatem śmiertelnością momentalną (w danej chwili) rozciągniętą na rok cały (roczną w stosunku do danego momentu, o ile — naturalnie — rok przyjmujemy za jednostkę czasu, z którą porównywamy chwilę dx).

Można to jeszcze tak objaśnić:

Gdy l jest liczbą żyjących, wyrażoną jako funkcya wieku x, $-\frac{dl}{dx}$ jest prędkością zmieniania się ludności, a więc $-\frac{1}{l}\cdot\frac{dl}{dx}$ prędkością zmieniania się prawdopodobieństwa śmierci i to się nazywa natężeniem śmiertelności. A ponieważ z drugiej strony $-\frac{dl}{dx}$ jest liczbą zmarłych w ciągu roku, przy założeniu, że w każdej cząstce czasu dx umiera ta sama liczba $-dl$ osób, przeto ten drugi sposób objaśnienia prowadzi nas do tego samego pojęcia, do jakiego nas doprowadził sposób pierwszy.

[13]) To oznaczenie nie jest szczęśliwie pomyślane, ponieważ e ma już ustalone w matematyce znaczenie jako podstawa logarytmów naturalnych, skutkiem czego może ewentualnie zajść nieporozumienie. Wprawdzie, z przyczyny ograniczonej liczby głosek, niepodobna, aby każde pojęcie matematyczne mogło być inaczej oznaczone, niemniej wszakże unikać trzeba jednakich oznaczeń w tym samym dziale. Tymczasem e jako podstawa logarytmów naturalnych używa się i w technice ubezpieczeń życiowych. Czy nie lepszem byłoby tu użycie greckiej głoski ε?

[14]) W „Text-Book of the Institut of Actuaries", pojęcie to jest oznaczone przez (FP), prawdopodobnie od nazwy „Paid — up Policy" — polisa spłacana. Ponieważ jednak symbol złożony jest niedogodny w użyciu, więc go zastąpiono przez pojedynczą głoskę W.

[15]) Z podobnej jak w przypisku [13]) przyczyny, w miejsce tego oznaczenia byłoby również pożądane inne (np. Π duże), ponieważ π ma, podobnie jak e, ustalone w matematyce znaczenie, jako stosunek okręgu koła do średnicy.

[16]) Naszem zdaniem byłoby lepiej użyć średnika ($a_{x+n\,;\,y+n}$ i $A_{35\,;\,40}$), ponieważ dwukropek może być wzięty za znak dzielenia.

[17]) D-r Sprague i King są zdania, że symbole P, V i W powinny być w ogóle używane samodzielnie i tylko w szczególnie skomplikowanych przypadkach mogą być łączone z innymi (jak z A lub a).

[18]) Geneza tych oznaczeń jest następująca: $v^x l_x$ najczęściej wchodzi we wzorach jako mianownik, $\Sigma v^x l_x$ — jako licznik; ponieważ zaś w języku angielskim „Divisor" oznacza dzielnik, a „Numerator" —

licznik, przeto zdyskontowaną liczbę żyjących ($v^x l_x$) oznaczono głoską D, a ich sumy przez N. Symbol S pochodzi od wyrazu „Sum“ — suma, zebranie. Symbole C; M; R są głoskami bezpośrednio poprzedzającemi w alfabecie głoski D, N, S.

PRZEGLĄD LITERATURY. BIBLIOGRAFIA.

Merecki Romuald. Klimatologia ziem polskich. I. Nieokresowa zmienność temperatury powietrza. Rozp. Akad. Umj. W. mat.-przyr. 1899. T. XXXV, str. 265—376.

Doniosłość tej pracy polega przedewszystkiem na tem, że jest pierwszą w polskiej literaturze w tym kierunku. Wyboru wszakże elementu klimatycznego na te pierwsze studya za zupełnie szczęśliwy uznać nie możemy dla tego, że:

1) zmienność temperatury jest czynnikiem bardzo trudno nadającym się do wyprowadzania wniosków klimatologicznych. Tych trudności autor nie tai wprawdzie przed sobą samym, wyjaśnia je, szuka ich przyczyn, a ta strona krytyczna pracy, mająca z natury rzeczy charakter meteorologiczny, jest najlepszą i ze wszech miar ciekawą; nie brak też w tej części pracy wyników i poglądów nowych lub samodzielnych (np. krytyka metod redukcyjnych, str. 274 i dalsze, zmiana zmienności z wysokością, str. 302, związki między falą ciepła, a falą ciśnienia atmosferycznego, str. 327 i dalsze i t. d.);

2) zmienność temperatury, jako czynnik, wahający się względnie w bardzo małych granicach, wymaga materyału obserwacyjnego zupełnie bez skazy; takim, naturalnie, materyał, na którym pracował autor, nie jest; takiego w ogóle nie ma, a więc winien być materyał surowy poprzednio poddany krytyce, obserwacye fałszywe lub podejrzane winny być usunięte. Tej ostrożności autor nie zastosował, wyniki tedy jego są niewątpliwie nie wolne od błędów, tkwiących w materyale.