zestawienie w całość wszystkich z różnych stron ogłoszonych obserwacyj, przy rozważnej dyskusyi ich wartości i ich wzajemnych stosunków, znajduje każdy oddzielny szereg należyte spożytkowanie. Pracę taką, mającą na widoku wyprowadzenie wyników ostatecznych, zamierzają wykonać pp. Müller i Kempf w Potsdamie.

Pułkowo, 31 grudnia 1901 r.

Wł. Gosiewski,

Z TEORYI RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

Reguły prawdopodobieństwa.

§ 1.

Rozróżniać będziemy dwie kategorye zdarzeń: aktualności, t. j. zdarzenia, które już się stały, i ewentualności, t. j. zdarzenia, które dopiero stać się mogą.

Każde bez wyjątku zdarzenie może się stać lub nie stać, bo nawet aktualność możemy uważać jako zdarzenie, które, jakkolwiek już się stało, wszelako mogło było się nie stać.

Jako jednak taka, co już stała się, aktualność jest zdarzeniem pewnem, podczas gdy ewentualność jest zdarzeniem niepewnem, a więc tylko prawdopodobnem.

Mówiąc o zdarzeniu, że jest prawdopodobnem, wyrażamy przez to, że jest tylko w części, a nie w całości, pewnem, i w ten sposób określamy prawdopodobieństwo jako część pewności. Gdy więc zgodzimy się uważać *jedność* za symbol pewności, symbolem prawdopodobieństwa będzie wtedy *liczba dodatnia mniejsza od jedności*, a symbolem niepodobieństwa będzie *zero*,

§ 2.

Rozważajmy zdarzenie ewentualne a, któremu niech przynależą: prawdopodobieństwo stania się zdarzenia $p(a)$ i prawdopodobieństwo niestania się zdarzenia $p(-a)$.

Ponieważ zdarzenie ewentualne stać się lub nie stać musi, przeto stanie się jego lub niestanie jest pewnością. W tem rozumieniu zdarzenia a i $-a$ są wręcz sobie przeciwne, a pewność, tak dla trzymającego za zdarzeniem a, jak i dla trzymającego za zdarzeniem $-a$, jest tylko ewentualnością, której wartość aktualna wynosi dla pierwszego $p(a)$, dla drugiego $p(-a)$, a dla obu spólnie $p(a)+p(-a)$.

Ale dla obu spólnie trzymających za zdarzeniami a i $-a$ pewność jest aktualnością, bo jedno ze zdarzeń a lub $-a$ stać się musi; zatem istnieje związek

$$p(a)+p(-a)=1 \tag{1}$$

wyrażający, że suma prawdopodobieństw stania się i niestania zdarzenia, albo też suma prawdopodobieństw dwóch zdarzeń wręcz sobie przeciwnych, równa się jedności.

§ 3.

Rozważajmy teraz dwa zdarzenia ewentualne a i b, którym odpowiadają zdarzenia wręcz przeciwne $-a$ i $-b$.

Każdemu ze zdarzeń a i b przynależy trojakie prawdopodobieństwo: jedno bezwzględne, t. j. niezależne od stania się lub niestania zdarzenia drugiego, i dwa względne, z których pierwsze wymaga aktualnego stania się zdarzenia drugiego, a drugie wymaga aktualnego niestania się zdarzenia drugiego. Prawdopodobieństwa te dla zdarzenia a oznaczać będziemy odpowiednio symbolami $p(a)$, $p_b(a)$ i $p_{-b}(a)$, a dla zdarzenia b symbołami $p(b)$, $p_a(b)$ i $p_{-a}(b)$.

Symbol $p_a(b)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia b, pod warunkiem aktualnego stania się zdarzenia a. Ponieważ jednak zdarzenie a jest tylko ewentualnością, której przynależy prawdopodobieństwo bezwzględne $p(a)$, liczba $p_a(b)$ jest również ewentualnością, której przynależy to samo prawdopodobieństwo $p(a)$. Każda przeto jednostka liczby $p_a(b)$ warta jest aktualnie nie jedność, lecz $p(a)$. Tym sposobem iloczyn $p(a)\,p_a(b)$ wyraża prawdopodobieństwo zdarzenia b, pod warunkiem ewentualnego stania się zdarzenia a, albo — co jest to samo: wyraża prawdopodobieństwo zdarzenia złożonego (a, b). Dla tego właśnie to prawdopodobieństwo oznaczać także będziemy symbolem $p(a, b)$, co wyrażamy równaniem:

$$p(a, b) = p(a)\,p_a(b) \tag{2}$$

Z uwagi na równość oczywistą $p(a, b) = p(b, a)$, strona prawa równania (2) nie zmienia swej wartości od przestawienia między sobą zdarzeń a i b. Zresztą wzór (2) służy widocznie dla każdego ze zdarzeń złożonych: $(a, -b)$, $(-a, b)$, $(-a, -b)$.

Stosując do wzoru (2) szereg podstawień kolejnych: $a = a_1$ $b = a_2, c$; $c = a_3, d$; i t. d. aż do wyczerpania wszystkich zdarzeń $a_1, a_2, \ldots, a_n$, znajdziemy łatwo wzór następujący:

$$p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = p(a_1)\,p_{a_1}(a_2) \ldots p_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}(a_n). \tag{3}$$

Jest to wyraz ogólny tak zwanej reguły prawdopodobieństwa złożonego, którą sformułować można w tych słowach: prawdopodobieństwo zdarzenia złożonego równa się iloczynowi prawdopodobieństw zdarzeń składowych, w jakimkolwiek porządku wyobrażamy sobie te zdarzenia, pod warunkiem wszakże, że każdy czynnik następny tego iloczynu wyraża prawdopodobieństwo odnośnego zdarzenia, w założeniu, że zdarzenia, odpowiadające czynnikom poprzednim, stały się aktualnie.

§ 4.

Ponieważ jest ogólnie $p_a(b) \neq p_{-a}(b)$, inne zatem jest prawdopodobieństwo zdarzenia b, gdy zdarzenie a stało się, a inne, gdy się nie stało. Z tego powodu mówimy, że zdarzenie b jest w ogóle zależnem od a, i nawzajem, a zależy od b. Tylko jedynie w przypadku równości $p_a(b) = p_{-a}(b)$ zdarzenia a i b są wzajemnie niezależnemi.

Rozważmy ten przypadek szczegółowo.

Posiłkując się równaniem (2), napiszmy równanie:

$$p(a, -b) = p(a)\, p_a(-b)$$

i dodajmy je stronami odpowiedniemi z równaniem (2); znajdziemy:

$$p(a, b) + p(a, -b) = p(a)\left\{p_a(b) + p_a(-b)\right\}.$$

Stąd, w myśl związku (1), mamy:

$$(4) \qquad p(a) = p(a, b) + p(a, -b),$$

a przestawiając między sobą a i b, mamy oraz:

$$(5) \qquad p(b) = p(a, b) + p(-a, b).$$

Ale na mocy równania (2) i analogicznego z niem: $p(-a, b) = p(-a)\, p_{-a}(b)$, warunek $p_a(b) = p_{-a}(b)$ daje:

$$p_a(b) = p_{-a}(b) = \frac{p(a, b)}{p(a)} = \frac{p(-a, b)}{p(-a)} = \frac{p(a, b) + p(-a, b)}{p(a) + p(-a)}.$$

Zważywszy więc na równanie (5) i związek (1), mamy widocznie:

$$(6) \qquad p_a(b) = p_{-a}(b) = p(b),$$

a po przestawieniu między sobą a i b jest oraz:

$$(7) \qquad p_b(a) = p_{-b}(a) = p(a).$$

Gdy więc zdarzenia a i b są wzajemnie niezależnemi, wówczas wszystkie trzy prawdopodobieństwa przynależne każdemu z tych zdarzeń są sobie równe.

Na mocy tego wyniku wzór (2) przyjmuje postać:

$$(8) \qquad p(a, b) = p(a)\, p(b),$$

a wzór ogólny (3) postać:

$$(9) \qquad p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = p(a_1)\, p(a_2) \ldots p(a_n).$$

Jeśli więc zdarzenie składa się ze zdarzeń wzajemnie niezależnych, prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest iloczynem prawdopodobieństw zdarzeń składowych, bez żadnych zresztą zastrzeżeń.

§ 5.

Posiłkując się wzorem (4), napiszmy równanie:

$$p(-a) = p(-a, b) + p(-a, -b)$$

i dodajmy je stronami odpowiedniemi z równaniem (4). Zważywszy przytem na związek (1), znajdziemy wtedy

$$(10) \qquad p(a, b) + p(a, -b) + p(-a, b) + p(-a, -b) = 1 .$$

Z drugiej strony, w myśl związku (1), różnica $1 - p(-a, -b)$ jest symbolem prawdopodobieństwa zdarzenia wręcz przeciwnego zdarzeniu $(-a, -b)$; jest zaś rzeczą oczywistą, że tem zdarzeniem wręcz przeciwnem może być tylko ewentualne stanie się p r z y n a j m n i e j jednego zdarzenia a lub b, t. j. stanie się albo zdarzenia (a, b) albo $(a, -b)$ albo $(-a, b)$.

Oznaczmy symbolem p (a lub b) [1]) prawdopodobieństwo zdarzenia wręcz przeciwnego zdarzeniu $(-a, -b)$. Będziemy wtedy mieli:

$$p(a \text{ lub } b) = 1 - p(-a, -b) ,$$

a po uwzględnieniu związku (10):

$$p(a \text{ lub } b) = p(a, b) + p(a, -b) + p(-a, b) .$$

Stąd, przez wyrugowanie wyrazów $p(a, -b)$ i $p(-a, b)$ przy pomocy równań (4) i (5), znajdziemy ostatecznie:

$$(11) \qquad p(a \text{ lub } b) = p(a) + p(b) - p(a, b) .$$

Stosując do wzoru (11) podstawienia kolejne: $a = a_1$, $b = a_2$ lub c, $c = a_3$ lub d, i t. d. aż do wyczerpania wszystkich zdarzeń $a_1, a_2, \ldots, a_n$, znajdziemy ogólnie:

---

[1]) Właściwie pisać by należało: p (przynajmniej a lub b), dla krótkości jednak wyraz „przynajmniej“ opuszczamy.

$$(12) \quad \begin{aligned} & p\,(a_1 \text{ lub } a_2 \ldots \text{ lub } a_n) = \sum_i p\,(a_i) - \sum_{i,j} p\,(a_i, a_j) \\ & + \sum_{i,j,k} p\,(a_i, a_j, a_k) - \ldots + (-1)^{n-1} p\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,. \end{aligned}$$

Jest to wyrażenie prawdopodobieństwa stania się przynajmniej jednego zdarzenia a_1 lub $a_2 \ldots$ lub a_n.

Stosując do wyrazów $p\,(a_i, a_j)$, $p\,(a_i, a_j, a_k)$ i t. d. regułę prawdopodobieństwa złożonego, możnaby jeszcze wyrażenie (12) uczynić zależnem jedynie od prawdopodobieństw bezwzględnych i względnych samych zdarzeń $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tego jednak robić nie będziemy, bo właśnie tylko postać (12) jest nam tu potrzebną.

§ 6.

Dotąd uważaliśmy zdarzenia $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jako niewyłączające się i przy tem wzajemnie zależne lub niezależne. Obecnie przyjmujemy, że zdarzenia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wyłączają się, że zatem prawdopodobieństwa złożone $p\,(a_i, a_j)$, $p\,(a_i, a_j, a_k)$, i t. d. są niepodobieństwami. Wtedy wzór (12) redakuje się do następującego:

$$(13) \qquad p\,(a_1 \text{ lub } a_2 \ldots \text{ lub } a_n) = \sum_i p\,(a_i)$$

i wyraża prawdopodobieństwo stania się: nie przynajmniej jednego zdarzenia a_1 lub $a_2 \ldots$ lub a_n, bo żadne ze zdarzeń złożonych (a_i, a_j), (a_i, a_j, a_k), i t. d. stać się już nie może, ale wprost tylko: jednego zdarzenia a_1 lub $a_2 \ldots$ lub a_n, t. j. którego bądź jednego ze zdarzeń $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Ponieważ jest oczywiście

$$\sum_i p\,(a_i) \leqslant 1\,,$$

widzimy stąd, że cechą charakterystyczną zdarzeń wyłączających się jest oraz i to, że suma przynależnych im prawdopodobieństw nie może nigdy przewyższać jedności.

Wzór (13) jest wyrazem ogólnym t. zw. reguły prawdopodobieństwa całkowitego, która sformułować się daje temi słowy: prawdopodobieństwo stania się którego bądź jednego ze zdarzeń wyłączających się równa się sumie prawdopodobieństw przynależnych tym zdarzeniom.

Prawdopodobieństwo a priori i prawdopodobieństwo a posteriori.

§ 7.

Skoro już znamy reguły prawdopodobieństwa, możemy się zająć ustanowieniem definicyi prawdopodobieństwa, wszakże nie definicyi arytmetycznej, bo ta była punktem wyjścia dla ustanowienia pomienionych reguł, lecz definicyi filozoficznej.

Rozważajmy dwa ewentualne zdarzenia x i a, o których zakładamy, że są w ewentualnym związku przyczynowym, a w szczególności, że a jest ewentualnym skutkiem ewentualnej przyczyny x.

Zdarzenie, że a jest ewentualnym skutkiem ewentualnej przyczyny x, jest zdarzeniem złożonem (x, a), któremu przynależy prawdopodobieństwo $p\,(x, a)$.

Według reguły prawdopodobieństwa złożonego, mamy:

$$p\,(x, a) = p\,(x)\, p_x\,(a)\,, \tag{14}$$

albo także

$$p\,(x, a) = p\,(a)\, p_a\,(x)\,, \tag{15}$$

$p\,(x)$ oznacza prawdopodobieństwo przyczyny x bezwzględne, t. j. w założeniu, że przyczyna x ma skutek a lub którybądź z możliwych skutków — a, np. a', a'' i t. d.;

$p_x\,(a)$ jest prawdopodobieństwem względnem, w którem x jest aktualnością, a a ewentualnością: jest to prawdopodobieństwo ewentualnego skutku a aktualnej przyczyny x;

$p\,(a)$ oznacza prawdopodobieństwo skutku a bezwzględne, t. j. w założeniu, że skutek a ma przyczynę x lub którąbądź z możliwych przyczyn — x, np. x', x'' i t. d.;

$p_a\,(x)$ jest prawdopodobieństwem względnem, w którem a jest aktualnością, a x ewentualnością: jest to prawdopodobieństwo ewentualnej przyczyny x aktualnego skutku a lub wprost aktualności a.

Zsumujmy każde z równań (14) i (15) względem x, x', x'' i t. d. aż do wyczerpania wszystkich możliwych przyczyn, znajdziemy:

$$\sum_x p(x, a) = \sum_x p(x) p_x(a) , \tag{16}$$

$$\sum_x p(x, a) = p(a) \sum_x p_a(x) . \tag{17}$$

W myśl reguły prawdopodobieństwa całkowitego, suma $\sum_x p_a(x)$ oznacza prawdopodobieństwo którejbądź z ewentualnych przyczyn x aktualności a. Ale że aktualność jest z pewnością skutkiem jakiejś przyczyny, prawdopodobieństwo $\sum_x p_a(x)$ równać się powinno jedności:

$$\sum_x p_a(x) = 1 . \tag{18}$$

Uwzględniając ten wynik w (17), znajdujemy:

$$\sum_x p(x, a) = p(a) , \tag{19}$$

a następnie z równania (16), znajdujemy oraz:

$$p(a) = \sum_x p(x) p_x(a) . \tag{20}$$

Dla zdarzenia wręcz przeciwnego $-a$ jest widocznie:

$$p(-a) = \sum_x p(x) p_x(-a) . \tag{21}$$

Dodając więc równania (20) i (21) stronami odpowiedniemi i pamiętając, że:

$$p(a) + p(-a) = 1 \quad \text{oraz} \quad p_x(a) + p_x(-a) = 1 ,$$

otrzymujemy związek:

$$\sum_x p(x) = 1 , \tag{22}$$

zapewniający istnienie przyczyny bezwzględne, podczas gdy związek (18) zapewnia istnienie przyczyny względne, bo zapewnia ją tylko dla aktualności a.

Wzór (20) jest wyrazem definicyi filozoficznej prawdopodobieństwa zdarzenia a; brzmi ona tak: prawdopodobieństwo bezwzględne zdarzenia a równa się sumie iloczynów z prawdopodobieństw bezwzględnych wszystkich możliwych przyczyn przez odpowiadające im prawdopodobieństwa względne ewentualnego skutku, którym ma być to zdarzenie a.

Jeśli przyczyny oznaczonej x jesteśmy pewni, t. j. jeśli wszystkie wyrazy strony lewej równania (22) są zerami, prócz wyrazu

$$(23) \qquad p\,(x) = 1\,,$$

to wszystkie także wyrazy strony prawej równania (20) są zerami, prócz wyrazu przywodzącego się do $p_x\,(a)$, i mamy wówczas:

$$(24) \qquad p\,(a) = p_x\,(a)\,.$$

§ 8.

Z równań (14), (15) i (20) znajdujemy łatwo:

$$(25) \qquad p_a\,(x)' = \frac{p\,(x)\,p_x\,(a)}{\sum\limits_x p\,(x)\,p_x\,(a)}\,.$$

Jest to prawdopodobieństwo ewentualnej przyczyny x aktualności a, lub po prostu prawdopodobieństwo przyczyny.

Tym sposobem zdarzeniu a odpowiadają dwa wyłączające się prawdopodobieństwa: jako ewentualności odpowiada mu prawdopodobieństwo bezwzględne stania się $p\,(a)$, (20), a jako aktualności odpowiada mu prawdopodobieństwo względne przyczyny $p_a\,(x)$, (25). Dla tego to $p\,(a)$ nazywamy także prawdopodobieństwem a priori, a $p_a\,(x)$ prawdopodobieństwem a posteriori.

Dotąd wszakże termin „a priori“ przywiązywano zwykle do prawdopodobieństwa, mającego swój ogólny wyraz we wzorze (24); co się nam wydaje niewłaściwem z powodu, że wzór ten wyraża prawdopodobieństwo zdarzenia a jako skutku ewentualnego przyczyny aktualnej x; że zatem wzór ten wyraża prawdopodobieństwo względne, a nie bezwzględne, jak wyraz (20), który z tego powodu, zdaniem naszem, właściwiej odpowiada terminowi „a priori“.

§ 9.

W naukach doświadczalnych obowiązuje zasada poznawalności przyczyny z jej skutku. Według tej zasady prawdopodobieństwo przyczyny $p_a(x)$ zależyć powinno tylko od aktualności a jako jej skutku, zatem od samych prawdopodobieństw $p_x(a)$. To zaś, jak widać z wzoru (25), możliwem jest jedynie wówczas, gdy wszystkie prawdopodobieństwa $p(x)$, wchodzące do wzoru (25), są sobie równe. Wtedy mamy

$$p_a(x) = \frac{p_x(a)}{\sum\limits_x p_x(a)} . \tag{26}$$

Jest to zatem prawdopodobieństwo przyczyny, pod warunkiem poznawalności jej ze skutku.

§ 10.

Dwie są w ogóle metody badania naukowego: indukcya i dedukcya, które różnią się zasadniczo tem, że punktem wyjścia indukcyi jest aktualność, a punktem wyjścia dedukcyi — ewentualność. W pierwszej posługujemy się (bezwiednie) prawdopodobieństwem a posteriori (26), w drugiej prawdopodobieństwem a priori (20).

Dedukcya opiera się na jednym tylko aksiomacie, że ewentualność przyczynę mieć musi, ale nie wchodzi wcale w istotę tej przyczyny; indukcya, prócz aksiomatu, że aktualność przyczynę mieć musi, przyjmuje nadto, że owa przyczyna jest poznawalną z aktualności. Tem właśnie niższą jest indukcya od dedukcyi.

Ale nauki indukcyjne, posługując się przeważnie aktualnościami, bogatsze są w fakty, a uboższe w teorye, z powodu ograniczoności pojęcia przyczyny. Przeciwnie, nauki dedukcyjne są uboższe w fakty, a bogatsze w teorye, z powodu nieograniczoności pojęcia przyczyny.

Oto są kapitalne różnice między czystą indukcyą a czystą dedukcyą.

Nadzieja matematyczna.

§ 11.

Niech liczba A będzie ewentualnością, której przynależy prawdopodobieństwo $p(a)$. Przez $p(a)$ należy tu rozumieć liczbę, nie mającą w ogóle żadnego związku funkcyjnego z liczbą A.

Ponieważ każda jednostka liczby A warta jest aktualnie nie jedność, lecz $p(a)$, wartością aktualną liczby ewentualnej A jest iloczyn $Ap(a)$.

Tyle więc można zaryzykować za liczbę ewentualną A i spodziewać się ewentualnego zysku $A - Ap(a) = Ap(-a)$, z prawdopodobieństwem $p(a)$. Wartością zatem aktualną pomienionego zysku jest iloczyn $Ap(-a)p(a)$.

Zaryzykowawszy jednak iloczyn $Ap(a)$ za liczbę ewentualną A, narażamy się na ewentualną stratę tego iloczynu, z prawdopodobieństwem $p(-a)$. Wartość zatem aktualna tej ewentualnej straty wynosi $Ap(a)p(-a)$, t. j. ściśle tyle, ile poprzednio obliczona wartość aktualna ewentualnego zysku.

Na tem to właśnie zrównaniu: wartości aktualnej ewentualnej straty z wartością aktualną ewentualnego zysku, polega zasada tak zwanej słuszności (equitabilité) w grach hazardownych. W wysłowieniu jednak tej zasady używa się zwykle terminu „nadzieja matematyczna“, który znaczy to samo, co wartość aktualna czegoś ewentualnego.

§ 12.

Uważajmy teraz dwie liczby ewentualne A i B, którym niech odpowiednio przynależą prawdopodobieństwa $p(a)$ i $p(b)$.

Ponieważ wtedy wartością aktualną liczby ewentualnej A jest $Ap(a)$, a liczby ewentualnej B jest $Bp(b)$, zatem wartością aktualną sumy ewentualnej $A + B$, czyli nadzieją matematyczną tej sumy jest

$$E = Ap(a) + Bp(b)\,. \tag{27}$$

Posługując się równaniami (4) i (5), znajdujemy także:

$$(28) \qquad E = Ap(a, -b) + Bp(-a, b) + (A+B)\,p(a, b),$$

gdzie $p(a, -b)$, $p(-a, b)$, $p(a, b)$ oznaczają prawdopodobieństwa zdarzeń wyłączających się $(a, -b)$, $(-a, b)$, (a, b).

Stąd widać, że zaryzykowawszy sumę E, możemy spodziewać się: albo ewentualnego zysku, równego $A-E$, z prawdopodobieństwem $p(a, -b)$, lub równego $B-E$, z prawdopodobieństwem $p(-a, b)$, lub równego $A+B-E$, z prawdopodobieństwem $p(a, b)$; albo też ewentualnej straty, równej E, z prawdopodobieństwem $p(-a, -b)$.

Oznaczmy przez E_z wartość aktualną ewentualnego zysku, czyli jego nadzieję matematyczną, a przez E_s — wartość aktualną ewentualnej straty, czyli jej nadzieję matematyczną. Wówczas, według (28), będzie:

$$(29) \quad E_z = (A-E)\,p(a, -b) + (B-E)\,p(-a, b) + (A+B-E)\,p(a, b);$$

jest zaś oczywiście:

$$(30) \qquad E_s = E\,p(-a, -b).$$

Owóż, przy pomocy równań (10) i (28), oraz (29) i (30) łatwo otrzymać równość:

$$(31) \qquad E_z = E_s,$$

która wyraża zasadę słuszności w przypadku dwóch liczb ewentualnych A i B.

Tę zasadę rozciągnąć w ten sam sposób łatwo do przypadku ilukolwiek liczb ewentualnych A, B, C i t. d.

§ 13.

Jeśli zdarzenia a i b wyłączają się, mamy wówczas:

$$p(a, b) = 0\,,\ p(a, -b) = p(a)\,,\ p(-a, b) = p(b)\,,$$

oraz

$$p(-a, -b) = 1 - p(a) - p(b)\,.$$

Stąd łatwo widzieć na co zamieniają się w tym przypadku równania (28), (29) i (30), a więc i to, że o ewentualnym zysku, równym $A + B - E$, mowy już wtedy być nie może.

Jeśli nadto $p(a) + p(b) = 1$, obie strony równości (31) stają się zerami, a zasada słuszności wyraża się wówczas równaniem (29), które przywodzi się do następującego:

$$(A-E)\,p(a) + (B-E)\,p(b) = 0 \,. \tag{32}$$

Z uwagi na związek $p(a) + p(b) = 1$, równanie (32) niczem się zgoła nie różni od równania (27).

§ 14.

Na zakończenie dodamy, że definicyę prawdopodobieństwa „arytmetyczną" zawdzięczamy I. Bernoulli'emu (Ars conjectandi. Bazylea 1713). W pracy niniejszej pragnęliśmy wykazać, jak płodną jest ta definicya. Ona jedna, jedyna, wystarczyła nam do ustanowienia wszystkich reguł prawdopodobieństwa, nie wyłączając nadziei matematycznej.

Co innego gdy idzie o zastosowanie, t. j. o wyznaczenie wartości prawdopodobieństwa w danym przypadku Tu, stosownie do przypadku, można się posługiwać temi lub owemi sposobami, a także i definicyą Laplace'a, która na mocy definicyi Bernoulli'ego, nie budzi już żadnej wątpliwości, w rodzaju petitio principii, podniesionej przez H. Poincarégo.

Warszawa, w styczniu 1902 r.