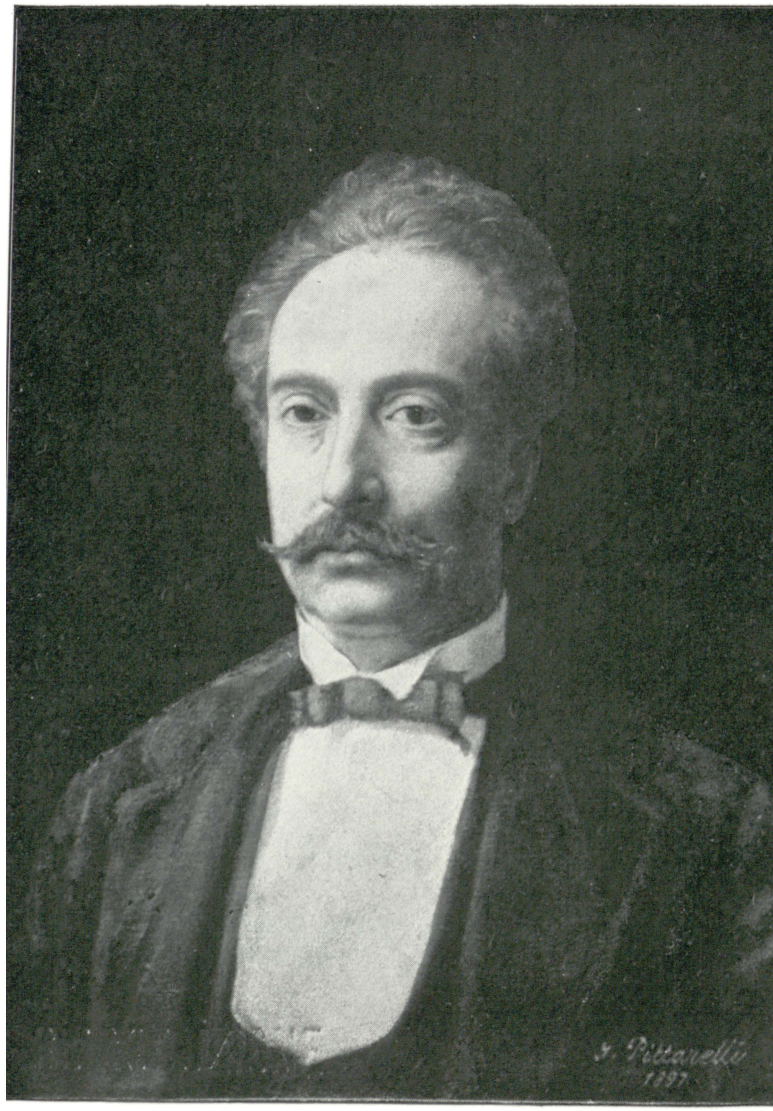

EUGENIO BELTRAMI.

EUGENIUSZ BELTRAMI

napisał

E. Pascal [1]).

Wielki to zaszczyt być powołanym przez głosy życzliwych kolegów do zasiadania w tem świetnem Zgromadzeniu uczonych [2]), a zaszczyt ten staje się jeszcze większym, gdy łączy się z obowiązkiem wygłoszenia wspomnienia o umyśle tak świetnym, o takiej wspaniałej ozdobie nauk matematycznych, o człowieku tak genialnym, jakim był Eugeniusz Beltrami.

Słowa moje, nieozdobne i ubogie, zdołają dać zaledwie blade wyobrażenie o potędze i naturze tego umysłu; to tylko powiedzieć mogę, że w ostatnich miesiącach z wielkiem upodobaniem i wielką rozkoszą umysłową przebiegłem stopniowo całą jego genialną produkcyę naukową, cały ten ogrom prawie 120 prac nad najróżnorodniejszemi przedmiotami analizy, geometryi, mechaniki i fizyki matematycznej, stanowiących wielki i trwały pomnik jego sławy.

W pracach Beltrami'ego, w odróżnieniu od prac wielu innych, ideę matematyczną ożywia prawie zawsze tchnienie artystyczne; dzięki zaś trafnym zestawieniom, dzięki odpowiednio dobranym spostrzeżeniom o początku, naturze i dziejach traktowanego przedmiotu, o jego analogiach z innemi, o nowych jego stronach i nowych zagadnieniach, które porusza, dzieła Beltrami'ego mają dla czytelnika urok nieprzeparty; powiedziałbym, że wywierają nań wpływ magiczny, otwierając mu na każdym kroku nowe i szerokie horyzonty.

---

[1]) Mowa, odczytana na posiedzeniu uroczystem Instytutu królewskiego lombardzkiego nauk i literatury; przekład, ogłoszony za upoważnieniem Autora. *S. D.*

[2]) Prof. Pascal został obrany członkiem czynnym Instytutu lombardzkiego, jako następca Beltrami'ego. *S. D.*

Najwybitniejsza właściwość Beltrami'ego, jedna, — że tak powiem—z jego charakterystyk, mianowicie, że zdobił piętnem genialności artystycznej każdy przedmiot przez siebie badany, była, być może, wypływem środowiska artystycznego, w którem się urodził i rozwijał w pierwszych latach młodości.

Sławnym rzeźbiarzem w kamieniu był dziad jego Jan Beltrami, który pozostawił w Kremonie, gdzie urodził się i umarł, oraz poza miastem rodzinnem, cenne pamiątki swego artyzmu. Ojciec jego, także Eugeniusz, zasłużony malarz i miniaturzysta, zamieszany w Kremonie w rozruchy patryotyczne w roku 1848, emigrował do Piemontu, później do Francyi, i zmarł w Paryżu jako konserwator Muzeum sztuk pięknych. Rzeźbiarzem był jeden z jego wujów, Luigi, który poślubił rzeźbiarkę padewską; poetką i muzykiem niepospolitym była jego matka Eliza Barozzi, wenecyanka, żyjąca dotąd w Wenecyi, jako staruszka ośmdziesięcioletnia; ona to przed pięćdziesięcioma dwoma latami, pałając świętą miłością ojczyzny, brała poważny udział w ruchach kremoniańskich w r. 1848.

W takiej to rodzinie artystów i patryotów urodził się Eugeniusz Beltrami w Kremonie dnia 16 listopada 1835 r.

Zwalczywszy w młodych latach przeciwności, wskutek których zmuszony był przerwać studya, rozpoczęte w Pawii i przyjąć na kilka lat posadę w administracyi dróg żelaznych lombardzko-weneckich, obdarzony samowiedzą przeczystą (jak się wyraża o nim jego znakomity biograf), spostrzegł dość jeszcze wcześnie drogę, na którą ma wstąpić, by pójść za głosem powołania. Pod wpływem nieprzepartego pociągu do nauk matematycznych rozpoczął sam w 25 roku życia ponownie pracę nad swem wykształceniem, wsparty głównie radami Franciszka Brioschi'ego. Brioschi w tym czasie ogłosił był cykl rozpraw, które zjednały mu sławę znakomitego matematyka; należały one do tego okresu jego działalności, który Beltrami nazwał później okresem heroicznym działalności naukowej tego uczonego.

Pierwsza praca matematyczna Beltrami'ego, mająca datę 1 listopada 1861 r. i tytuł: „O niektórych układach krzywych płaskich"

(43) [1]), została ogłoszona w tomie IV-ym dziennika Tortolini'ego, wydawanego w Rzymie. Przypomniawszy w tej nocie własność elementarną hyperbol równobocznych spółśrodkowych, które przez obrót o 45° około środka dają układ ortogonalny względem pierwotnego, autor stawia zagadnienie ogólniejsze: jakie są układy krzywych płaskich, które przez obrót o pewien kąt około punktu na ich płaszczyźnie, dają układ, przecinający pierwotny pod danym kątem stałym? Rozwiązanie zagadnienia zależy od równania różniczkowego rzędu pierwszego, zawierającego funkcyę dowolną. Praca to skromna, lecz precyzya spostrzeżeń i dokładność rozbioru zagadnienia pozwalały już dobrze wróżyć o początkującym autorze.

Prawie po roku, t. j. we wrześniu 1862 r., Beltrami wykończył pracę większej objętości i większego znaczenia: „O teoryi rozwiniętych niezupełnych i ich rozwijających" (44), (Annali di Tortolini, t. IV, Serya 1, (1862); do pracy tej pobudziło go czytanie rozprawy o tymże przedmiocie, ogłoszonej na pięć lat wcześniej, w roku 1857, przez Brioschi'ego.

Rozwiniętą niezupełną linii jest inna linia, której każda styczna jest przecięta przez linię daną pod kątem, zmiennym od punktu do punktu, według pewnego określonego prawa; pierwsza linia nazywa się rozwijającą drugiej.

Brioschi rozważał był jedynie przypadek, w którym kąt ω jest stały, t. j. przypadek rozwiniętych niezupełnych zwykłych. Beltrami, postawiwszy sobie przypadek ogólniejszy, dowiódł, pomiędzy innemi, pięknego twierdzenia, że każda nierozwinięta niezupełna jest linią geodezyjną powierzchni, będącej miejscem wszystkich rozwiniętych niezupełnych, utworzonych według jednego i tego samego prawa. Twierdzenie to znane było tylko w jednym przypadku szczególnym $\left(\omega = \text{stałej} = \frac{\pi}{2}\right)$.

W tymże tomie dziennika Tortolini'ego, prócz krótkiej uwagi o metodzie bardzo łatwej znajdowania prawie bez rachunku równań linij krzywiznowych powierzchni oraz promieni krzy-

---

[1]) Liczby w nawiasach, umieszczone po tytule, odnoszą się do spisu prac naukowych Beltrami'ego, podanego na końcu tego życiorysu. *S. D.*

wizny (**20**), znajduje się także przekład Beltrami'ego sławnej rozprawy Gaussa o t. zw. odwzorowaniu podobnem jednej powierzchni na drugiej (**123**), ogłoszonej w r. 1825 w „Astronomische Abhandlungen“ (wydawanych w Altonie przez Schumachera) w odpowiedzi na zadanie konkursowe, postawione w r. 1822 przez Towarzystwo Nauk w Kopenhadze.

Okoliczność ta, na pozór nieznacząca, nie jest wszakże pozbawiona dla nas interesu, gdyż pokazuje, że Beltrami już na początku swych studyów pozostawał pod wpływem dzieł wielkiego matematyka getyngeńskiego. W samej rzeczy odtąd ujawnia się stale wpływ Gaussa i jego szkoły w całkowitym rozwoju stopniowym twórczości Beltrami'ego.

Zatrzymałem się nieco dłużej nad pierwszemi objawami tej twórczości, nie dla tego by one miały wagę szczególną, lecz dla tego, że były pierwszemi; i jak w opowiadaniu o przygodach życia człowieka wielkich czynów szukamy z upodobaniem szczegółów jego dzieciństwa, podobnie w opisie karyery naukowej człowieka genialnego badamy jego pierwsze prace, spodziewając się znaleść w nich zarod jego genialnej twórczości.

Beltrami, zwróciwszy na się temi pierwszemi pracami uwagę matematyków, mógł już w r. 1862 rzucić posadę administracyjną, którą zajmował, i mając lat 27, został mianowany profesorem uniwersytetu w Bolonii. Od tej chwili życie jego płynęło łagodnie i spokojnie, zaprzątnięte tylko troską o rodzinę, szkołę i ulubione spekulacye.

Nie chciał on przyjąć żadnego urzędu, któryby odrywał go od tych zajęć, a jego bardzo spóźniona nominacya na senatora, której bynajmniej nie dopominał się, nastąpiła na kilka zaledwie miesięcy przed zgonem.

Można o nim powiedzieć to, co Manzoni pisał o kardynale Fryderyku: życie jego było jakby strumieniem, który wytrysnąwszy czystym ze skały, bez zatrzymania i mącenia się, wpływa czystym do rzeki. Był on czystym i jasnym we wszystkiem, w życiu rodzinnem, w rozmowach, w sądach o ludziach i rzeczach, w swych wykładach i pismach.

I zawsze jasnym był też w życiu akademickiem, w życiu, które zwłaszcza w uniwersytetach miast małych bywa nieraz u nas

bardzo przykre, pełne niezgód, sprzeczek i niesmaków. Wywierał on tu wpływ niezmiernie dobroczynny i zbawienny; był niejako wzorem, stojącym ponad wszystkimi; wzorem, który wszyscy naśladować pragnęli. Jego obecność wystarczała nieraz do powstrzymywania niewłaściwych żądań jednych lub do przytłumiania próżnych ambicyj drugich.

Beltrami był tedy w październiku 1862 mianowany profesorem nadzwyczajnym algebry uzupełniającej i geometryi analitycznej w Uniwersytecie bolońskim.

Prace, które aż do tego czasu ogłosił, nie były licznemi i nie mogą równać się pod względem znaczenia z pracami późniejszemi; ale widać już z nich było, że młody autor nie był zwykłym uczonym i że w tych pierwszych owocach jego geniuszu ujawniają się przymioty, które potem tak uświetniały jego prace późniejsze, a mianowicie powściągliwość w połączeniu z cierpliwem i niestrudzonem dążeniem do prostoty i wytworności metod, oraz bezustanne usiłowanie upraszczania i uprzystępniania tego, co innym zdawało się być bardzo zawikłanem. Wielką zasługę miał tu Franciszek Brioschi, który zrozumiał młodego i skromnego matematyka i umiał zachęcić go do dalszej pracy.

Po roku pobytu w Bolonii, gdzie kolegami jego byli Cremona, znany już z prac wielkiego znaczenia, oraz Chelini, którego pozostał szczerym przyjacielem na zawsze, zwłaszcza w nieszczęściu, był Beltrami mianowany profesorem zwyczajnym geodezyi w Pizie. Stanowisko to otrzymał na przedstawienie Henryka Betti'ego, chluby Włoch, dzielnego i niezmordowanego wychowawcy młodych i uczonych. Aby przygotować się należycie do nowej katedry, Beltrami, za radą Betti'ego, przebył kilka miesięcy w Medyolanie, w obserwatoryum Schiaparelli'ego, którego prace ówczesne pozwalały przewidywać wielką sławę, jaką obecnie cieszy się ten uczony.

W Pizie w roku 1864—1865 napisał Beltrami, prócz innych prac, swoje sławne „Badania z analizy przystosowanej do geometryi“ (21), które należy uważać jako za otwarcie znacznej części jego badań z dziedziny geometryi różniczkowej, prowadzonych kolejno w latach następnych; to też w pracach późniejszych zwraca

się nieraz do pierwszych swych badań z r. 1864. W Pizie też spotykał się często z Riemannem, a głębokie rozważania genialnego matematyka niemieckiego nad naturą przestrzeni wywarły wpływ niemały na badania klasyczne i osobliwe rezultaty o przestrzeniach o krzywiznie stałej, które Beltrami ogłosił później po trzech czy czterech latach.

Po trzech latach pobytu w Pizie, przeniósł się powrotnie do Bolonii, jako wykładający mechanikę teoretyczną, naukę, do której czuł pociąg, dzięki naturze swych studyów.

Gdy po roku 1870, w latach pierwszych gorącego i czystego entuzyazmu, powzięto piękną myśl stworzenia w Rzymie, nowej i odnowionej stolicy Włoch, wielkiej wszechnicy królestwa, postanowiono powołać do niej najlepsze siły naukowe, jakie w rozmaitych dziedzinach wiedzy posiadały wtedy Włochy. Do tych właśnie należał i Beltrami, którego liczne prace głównie w geometryi różniczkowej, a przedewszystkiem oryginalne badania nad teoryą przestrzeni, zjednały ich autorowi sławę powszechną. To też w październiku 1873 r. Beltrami przyjął wezwanie do Rzymu na katedrę mechaniki teoretycznej i analizy wyższej. Ale pozostał tu tylko trzy lata i w r. 1876 znów przeniósł się do uniwersytetu w Pizie na katedrę fizyki matematycznej i mechaniki wyższej.

Już w czasie pobytu swego w Rzymie rozpoczął był powoli w pracach swych oddalać się od przedmiotów, dotąd głównie uprawianych, i ogłosił był pewną liczbę prac z kinematyki i fizyki matematycznej. W Pawii, czy to z obowiązku nauczania, czy to dla tego, że w tym kierunku unosił go nieuniknienie rozwój kolejny jego działalności naukowej, poświęcił się całkowicie badaniom w dziedzinie fizyki matematycznej i mechaniki, a rzadkie jego prace treści odmiennej, ogłaszane w tym okresie jego działalności, powstały najczęściej pod wpływem zagadnień mechanicznych i fizykalnych, albo też były już przygotowane w zasadzie w latach poprzednich. Taką jest np. obszerna rozprawa p. t.: „Badania w dziedzinie geometryi analitycznej“ (4), ogłoszona w r. 1879 w pismach Akademii bolońskiej, która wraz z notą „o powierzchniach rzędu 3-go“ (5), ogłoszoną w tymże roku w „Rendinconti“ Instytutu lombardzkiego, wiąże się z dawnemi jego badaniami z lat 1868

i 1871 i jest zebraniem zupełnem i systematycznem szeregu badań, metod i postępowań, które obmyślił był i doprowadził do wykończenia w czasie dawniejszym.

W krótkiem a wytwornem „Wspomnieniu o Alfredzie Clebschu“ (**135**), które napisał i ogłosił w roku 1872 w Dzienniku Battaglini'ego wykazał, że w podziwu godnej karyerze naukowej wyrwanego nauce w 40 zaledwie roku życia a już głośnego sławą w świecie naukowym wielkiego matematyka niemieckiego, należy odróżnić dwa okresy, a mianowicie: pierwszy, w którym badania Clebscha odnosiły się specyalnie do mechaniki analitycznej i sprężystości; drugi, w którym Clebsch pozostawił ślady głębokie na wszystkich prawie polach geometryi wyższej i analizy wyższej. Otóż warto zaznaczyć, że i w działalności naukowej Beltrami'ego, którego geniusz miał tyle punktów styczności z geniuszem Clebscha, należy również odróżnić dwa okresy analogiczne, lecz w porządku odwrotnym: dla niego bowiem początek okresu drugiego schodzi się prawie z epoką, w której napisał wspomnienie o Clebschu.

W pracach okresu drugiego, który trwał przeszło lat dwadzieścia, gdy pierwszy trwał trzy pięciolecia, swoją sześćdziesiątką prac przebiegł Beltrami prawie wszystkie części fizyki matematycznej: teorye elektryczności, magnetyzmu, potencyału światła, ciepła, sprężystości.

Niżej powiem szczegółowo o każdej z prac Beltrami'ego, ale już tu nie chcę pominąć milczeniem tego, że znalazł on sposób związania teoryi sprężystości ze swemi dawnemi i sławnemi badaniami nad przestrzeniami o krzywiznie stałej, wykrywszy, że równania sprężystości w ośrodkach jednorodnych wiąże hypoteza liniowości przestrzeni. Tym sposobem ujawnił się poraz pierwszy związek, którego nikt przedtem nie przeczuwał, a który wyjaśnił pewne trudności, jakie napotykali poprzednicy Beltrami'ego na tem polu.

Po śmierci Casorati'ego, który był najdroższym jego kolegą przez lat czternaście w Pawii, Beltrami w roku 1891 przeniósł się znów do Uniwersytetu w Rzymie, który już od dłuższego czasu starał się go posiadać; w Rzymie to, ku powszechnemu żalowi, w dniu 18 lutego 1900 r. zasnął łagodnie. Śmierć jego była

łagodna i spokojna, jak cichem i łagodnem było to życie — jakby starożytnego filozofa.

Rzadko kiedy widziano takie spółczucie szczere i powszechne uczniów i wielbicieli; w każdem towarzystwie naukowem, we wszystkich najsławniejszych akademiach głoszono jego pochwałę, gdyż wszystkie miały zaszczyt zaliczać go do grona swych członków, wszystkich był on prawdziwą ozdobą. Członkiem czynnym tego Instytutu był on od roku 1877, i zasiadał tu po Janie Codazza; do Akademii bolońskiej należał od roku 1867, do Towarzystwa Czterdziestu od roku 1870, do Akademii dei Lincei od roku 1873, do Akademii francuskiej, w której nastąpił był po Clausiusie, od r. 1890; dalej należał do Akademij w Berlinie, Monaco, Turynie, Neapolu, Getyndze i t. d. i t. d.

Książe analistów francuskich, czcigodny Hermite, przesyłając mi dnia 25 lutego 1900 roku, w kilka dni po śmierci Beltrami'ego, wyrazy swego głębokiego żalu, dołączył słowa następujące: „wyrażam moje spółczucie z powodu straty p. Beltrami'ego, jednego ze znakomitych mistrzów analizy we Włoszech, umysłu pięknego i rzadkiego, twórcy dzieł pierwszorzędnych, i doskonałego człowieka, którego przyjaźń była dla mnie zaszczytem i dobrodziejstwem, jakiego już więcej nie znajdę"...

Ośm miesięcy przed swoją śmiercią napisał Beltrami świetne wspomnienie o Brioschim. Była to ostatnia jego praca, którą słusznie uważać możemy za najpiękniejszy i najtrwalszy pomnik, wzniesiony ku czci wielkiego lombardczyka.

Dziwnym tedy zdarzeniem losu, Beltrami, który w początkach swej karyery naukowej pozostawał silnie pod wpływem Brioschi'ego, poświęcił i ostatnią pracę swego wielkiego umysłu pamięci jego, nakreśliwszy dwa wspomnienia (jedno w „Annali di matematica" w grudniu 1897 roku, drugą w Akademii dei Lincei dnia 12 czerwca 1898) i zająwszy się wydaniem tomu I-go dzieł Brioschi'ego, których dokończenia nie danem mu już było doczekać.

Świetną była mowa Beltrami'ego o Brioschim, odczytana na uroczystem posiedzeniu Akademii dei Lincei dnia 12 czerwca 1898 r. w obecności Ich królewskich Mości; błyszczało w niej wspaniale godne podziwu mistrzowstwo Beltrami'ego,

które jakby pragnął potęgować i zlać harmonijnie w tej ostatniej swej pieśni na cześć swego pierwszego i czczonego mistrza.

Jakiż kontrast szczególny! Ci dwaj ludzie, którzy wzajemnie rozumieli się tak głęboko, byli tak rożni od siebie!

Pierwszy z nich, Brioschi, rozpoczął swój zawód naukowy w wieku bardzo młodym, w czasach smutnych, kiedy trzeba było prawie wszystko stwarzać we Włoszech na polu nauki; poddał się on temu kierunkowi i tej dążności w matematyce, która w tych czasach wzniosła się był do takiej sławy i powagi przez wielkiego Jacobi'ego, i temu kierunkowi pozostał wierny przez całe życie. Drugi, Beltrami, wszedł do palestry naukowej wtedy, kiedy dzięki pracom pierwszego warunki kultury matematycznej we Włoszech niezmiernie się polepszyły, a lubo pozostawał początkowo pod wpływem Brioschi'ego, odrazu zaciążył ku innemu ideałowi w matematyce; ideałem tym był kierunek, w którym intuicya miała tyleż, a może i więcej wagi, niż sztuczne metody algorytmowe; kierunek, do którego może bardziej dojrzały już czasy kultury matematycznej ogólnej, a który ujawnił się w sławnej szkole getyngeńskiej. Brioschi, pobudzany wciąż żądzą rozwijania obfitych sił swego geniuszu na różnych coraz rozleglejszych polach działania, po dziesięciu latach pracy naukowej, wszedł do życia publicznego, w którem wzniósł się szybko, nie porzucając atoli nigdy badań, które zjednały mu taką sławę. Beltrami przeciwnie, nie dając się uwieść bynajmniej pragnieniom innych efemerycznych nieraz tryumfów, nie opuszczał nigdy ciszy studyów i swoich zajęć spokojnych i uspakajających. Brioschi, charakter rozkazujący z wolą energiczną, jak rzadko, ufający prawie nieograniczenie przedziwnej sile swego geniuszu, doznał, obok wielkich i niespodziewanych tryumfów, i nie mało też goryczy; Beltrami nigdy być może nie zaznał w swem życiu goryczy, ale za to więcej od pierwszego doznał tych prawdziwych rozkoszy, jakie daje poszukiwanie prawdy.

Przechodząc teraz do bliższej oceny produkcyi naukowej Beltrami'ego, nie mogę nie wyznać, że to trudne zadanie podejmuję z wielką bojaźliwością. I dla tego to w przedstawieniu

rezultatów, przez niego osiągniętych, w wykazaniu porządku, w jakim pojawiały się one w jego umyśle, stanowiska, jakie należy się im w historyi nauki, związków, jakie łączą je z badaniami jego własnemi i z badaniami innych, postaram się—o ile to będzie możliwem—przemawiać własnemi słowy twórcy raczej, niż swojemi.

Podzielę wszystkie jego prace porządkiem materyi na jedenaście kategoryj: 1-o Geometrya analityczna, 2-o Geometrya nieskończonostkowa, 3-o Analiza czysta, 4-o Mechanika cieczy, 5-o Mechanika w ogólności, 6-o Potencyał, atrakcya, elektryczność, magnetyzm, elektromagnetyzm, 7-o Sprężystość, 8-o Ciepło, 9 o Akustyka, 10-o Bibliografia, referaty, przekłady, 11-o Wspomnienia, nekrologie, biografie.

Mówić będę naturalnie o jego pracach, należących do dziewięciu pierwszych kategoryj, a na końcu podam wykaz systematyczny prac wszystkich.

I. Geometrya analityczna.

Pierwsza grupa prac z geometryi analitycznej odnosi się do krzywych wymiernych.

W dwóch notach z roku 1868: „Uwagi do teoryi krzywych sześciennych skośnych“ (1), stara się on podać metodę badania tych krzywych, opartą specyalnie na szczególnej metodzie odwzorowania ich płaszczyzny ściśle stycznej, metodzie bardzo płodnej i rozwiniętej następnie w obszerniejszej pracy, ogłoszonej po jedenastu latach: „Badania w dziedzinie geometryi analitycznej“ (4), (1874), której celem było wyłożyć—że tu użyję słów jego własnych — szereg postępowań i metod godnych uwagi ze względu na wielorakość ich użytku i niezwykłą ich giętkość.

Krzywemi sześciennemi skośnemi zajmowali się pierwsi Möbius, v. Staudt, Reye, a potem Cremona. Praca Beltrami'ego zbliża się do prac tego ostatniego; znajdujemy tu ważne dopełnienie do teoryi t. zw. figur sprzężonych, wprowadzonych przez Cremonę; widać z niej nadto, że krzywa sześcienna skośna prowadzi nietylko do odpowiedniości zerowej Möbiusa, ale i do innej odpowiedniości rzędu

wyższego, a to za pomocą pewnych hyperboloid, związanych z krzywą sześcienną.

Ostatnia część dwóch not ma charakter polemiczny, w celu wykazania, że w dziele v. Dracha, w owym czasie wydanem, wyzyskano obficie, bez wymienienia wszakże autora, rozprawę Cremony, ogłoszoną na dziesięć lat przedtem w „Annali di matematica".

Pracą pokrewną do poprzedzającej, mianowicie przez stosowaną w niej metodę, jest ogłoszona w r. 1871 w rozprawie „Niektóre wzory z teoryi elementarnej stożkowych" (2), przypominającej w wielu punktach rodzaj rozważań, które w dwa lata później rozwinął Darboux w znanej książce: „Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques". W pracy tej zaznaczył też Beltrami, że do teoryi stożkowych wprowadzić można wielkości analogiczne do tych, które przyjmuje się za spółrzędne prostych w przestrzeni, a zbadanie tego faktu zeszło się z pojęciami geometryi wielowymiarowej, które zakomunikował mu Cremonie w liście; list ten ogłosił Beltrami z dodaniem komentarza (3) w następnym (dziesiątym) tomie dziennika Battaglini'ego.

Metody, użyte w tych pracach, Beltrami rozwinął i szeroko zastosował w pracy swej: „Badania w dziedzinie geometryi analitycznej" (4). Punktem zasadniczym tych poszukiwań (poświęconych pamięci zmarłego na krótko przedtem i opłakiwanego przez uczonych przyjaciela jego Chelini'ego) jest zasada algebraiczna, wypowiedziana przez Chelini'ego w roku 1849 a obejmująca w pewnym względzie jako przypadek szczególny wzory, odnoszące się do rozkładu funkcyj ułamkowych wymiernych.

Beltrami przy pomocy postępowania i wzorów, odznaczających się niezrównaną wytwornością, otrzymał rezultaty częścią znane, częścią zaś nowe w teoryi krzywych sześciennych skośnych, krzywych rzędu czwartego skośnych wymiernych, i krzywych wymiernych w ogólności oraz w teoryi powierzchni rozwijalnych; pokazał on dalej, że też same wzory mogą służyć i dla krzywych sześciennych płaskich ogólnych. W drugiej części swej pracy stara się uogólnić swoje wzory i postępowania, w celu

zbadania miejsc, powstających z podwójnej nieskończoności punktów (powierzchni), i jako przykład bada powierzchnię Steinera, dla której wyznacza linie asymptotyczne, wyznaczone już dawniej przez Clebscha i Cremonę.

Ściśle związaną z temi „Badaniami“ i równocześnie ogłoszoną jest krótka praca p. t.: „O równaniu pięciościanowem powierzchni rzędu trzeciego“ (**5**), (1879), którą należy uważać jako inne znów zastosowanie metod wyżej wspomnianych. Wyszedłszy z sześciościanu ogólnego, dowodzi istnienia pięciościanu biegunowego Sylvestera i wyznacza go dla powierzchni sześciennych, a otrzymawszy z równania sześciościanu równanie pięciościanu, dowodzi, że każdy sześciościan daje się wpisać w powierzchnię Hessego; mówi wreszcie o sześciościanach specyalnych, wprowadzonych dawniej przez Cremonę w badaniu powierzchni sześciennych.

Inna grupa prac z geometryi analitycznej odnosi się do sławnych twierdzeń Feuerbacha, Simpsona i Steinera o kołach i stożkowych dziewięciu punktów, które rozciągnąwszy na przestrzeń, wiąże z badaniem powierzchni rzędu 3-go, zwanej powierzchnią Cayley'a, mającej cztery punkty podwójne i interesującej mianowicie z tego względu, że jest biegunową wzajemną powierzchni Steinera.

W pracy z r. 1863 p. t.: „Uogólnienie dla przestrzeni twierdzeń o stożkowych dziewięciu punktów“ (**7**), ogłoszonej w tomie I Dziennika Battaglini'ego i która jest jakoby dalszym ciągiem pracy p. t.: „O stożkowych dziewięciu punktów“ (**6**), ogłoszonej poprzednio w tymże tomie, uogólnia on dla przestrzeni pewne własności czworokąta płaskiego, uogólnienie to przygotował był już w pracy poprzedniej. Przy pomocy niego otrzymuje on pewne proste własności powierzchni Cayley'a, które później po dziewięciu latach badał szczegółowiej Eckardt, znalazłszy ponownie wiele własności, poprzednio już przez Beltrami'ego odkrytych.

Twierdzenia o kole i o stożkowych dziewięciu punktów wypowiedział częścią pierwszy Feuerbach, uogólnili Steiner, Terquem i uzasadnili jako nowe Hamilton, Hart, Sal-

mon, Casey; później zajmowali się tym przedmiotem Battaglini i Trudi.

W pracy z tegoż samego roku: „O stożkowych dziewięciu punktów i niektórych pytaniach z niemi związanych“ (**9**) Beltrami rozważa te twierdzenia w ich ogólności i przy sposobności bada bliżej naturę i własności przekształcenia figur płaskich, rozważanego już przez Steinera i Magnusa w r. 1832; przekształcenia, do którego zwrócił się właśnie w tej epoce Schiapparelli w rozprawie, ogłoszonej w Aktach Akademii turyńskiej, nazwawszy je przekształceniem stożkowem. Nieco później, Cremona uogólniając to pojęcie, położył podwaliny badań ogólnych nad tem przekształceniem, które na cześć jego nazwano „kremoniańskiem“.

W kilka lat później Beltrami powrócił do tych samych pytań w dwóch rozprawach, drukowanych w Akademii bolońskiej i zatytułowanych: „O niektórych twierdzeniach Feuerbacha i Steinera“ (**10**), (1875) i „Rozważania analityczne nad pewnem twierdzeniem Steinera“ (**11**), (1877), w których rozpatruje te twierdzenia w ich największej ogólności rzutowej, dołączając jeszcze nieosiągnięte w swych pracach dawniejszych, mimo żywo— jak sam o tem mówi—odczuwanego pragnienia uogólnienia twierdzeń, odnoszących się do styczności. Przez wprowadzenie pojęcia stożkowej bezwzględnej, miejsce geometryczne steinerowskie (luogo steineriano) jak je nazywa, z płaskiego staje się miejscem stopnia 3-go i tym sposobem obwiednia steinerowska wznosi się do klasy trzeciej. Uogólniając to do przestrzeni n-wymiarowej, znajduje, że miejsce i obwiednia mają rząd i klasę $n+1$ i że są biegunowemi wzajemnemi względem kwadryki bezwzględnej; dla płaszczyzny i przestrzeni zwykłej (euklidesowej) temi miejscami są stożkowa wraz z prostą w nieskończoności i powierzchnia rzędu 3-go Cayley'a wraz z płaszczyzną w nieskończoności. Następnie stawia pytanie: jakiemu warunkowi winna czynić zadość stożkowa bezwzględna, aby miejsce płaskie rozpadło się na prostą i na stożkową, a obwiednia na punkt i na stożkową. Pytanie to chwilowo pozostawił nierozstrzygniętem, ale rozwiązał je później sposobem wielce prostym w nocie kilkostronicowej w swoich „Badaniach w dziedzinie geometryi analitycznej“, o których wyżej była mowa.

Pracą innego rodzaju, godną wzmianki osobnej, są „Badania nad geometryą form dwójkowych sześciennych“ (12), ogłoszone w r. 1870 w Akademii bolońskiej. Jest to wytworna monografia z teoryi form sześciennych dwójkowych, napisana z punktu widzenia, wprowadzonego przez Bellavitisa, a później przez Möbiusa w jego sławnym „Rachunku barycentrycznym“. Badania te Beltrami'ego wyprzedził był Battaglini w swoich poszukiwaniach, prowadzonych, z nieco odmiennym zamiarem, nad przedstawieniem geometrycznem form dwójkowych. Uważając pierwiastki i spółczynniki formy sześciennej jako zespolone, i przedstawiając znanym sposobem pierwiastki za pomocą punktów płaszczyzny, otrzymuje stąd Beltrami piękną interpretacyę geometryczną zależności pomiędzy figurami, utworzonemi z punktów formy zasadniczej, a pomiędzy jej formami spółzmiennemi.

Te są główne prace Beltrami'ego z dziedziny geometryi analitycznej; pozostałe są przeważnie ćwiczeniami, i dla tego powiemy o nich tylko krótko.

„Dowód pewnego twierdzenia Salmona“ (14), (Nouv. Ann. t. II, str. 181); idzie tu o znalezienie miejsca geometrycznego wierzchołków czworościanu, którego ściany przechodzą przez punkty stałe, boki zaś ściany przeciwległej wierzchołkowi pozostają na płaszczyźnie stałej. Miejscem tem jest powierzchnia sześcienna.

„Dowód pewnego twierdzenia Mannheima“ (15), (tamże, str. 209). Idzie tu o miejsce geometryczne, będące kwadryką.

„Twierdzenie podane do dowiedzenia“ (16), (tamże, str. 236). Mowa tu o twierdzeniu dowiedzionem później w pracy (7) o punktach środkowych 28 odcinków, wyznaczonych przez środki 8 kul wpisanych w czworościan; te punkty środkowe znajdują się na powierzchni rzędu 3-go Cayley'a.

W piśmie p. t.: „Rozwiązanie zagadnienia o powierzchniach rzędu drugiego“ (13), (Giorn. di Battaglini t. I) — mówi o tym samym przedmiocie, co w pracy następującej:

„Rozwiązanie pytania: niechaj będzie dana powierzchnia stopnia drugiego, z wyjątkiem kuli, i punkt stały, miejsce widza; pod jakim kątem widzieć on będzie powierzchnię“ (16)? (Nouv. Ann. t. II, str. 355); pytanie to było już postawione w Nouvelles Annales.

W artykule: „Dowód pewnego twierdzenia W. Robertsa“ (17), (Nouv. Ann. t. IV, str. 233), rozwiązuje za pomocą spółrzędnych eliptycznych pytanie, postawione przez Strebora, o znalezieniu powierzchni, będącej miejscem przecięć kołowych średnicowych elipsoid, należących do układu spółogniskowego i przecinających elipsoidy ortogonalnie. Pytanie to rozwiązali już dawniej inni za pomocą metody geometryi nieskończonostkowej. Beltrami znalazł, że powierzchnia szukana jest rzędu czwartego z prostą podwójną i każda płaszczyzna, przez nią poprowadzona, przecina powierzchnię według koła.

„O niektórych ogólnych własnościach krzywych algebraicznych“ (18), (Giorn. di Battaglini, t. IV). Wychodząc z twierdzenia analitycznego, przypisywanego Lesliemu, o sumie wartości funkcyi całkowitej wstawy i dostawy łuków, idących po sobie w postępie arytmetycznym, znajduje Beltrami niektóre własności metryczne odcinków, wyciętych przez krzywę w pęku prostych, tworzących ze sobą kąty równe. Twierdzenia te napotkali byli już dawniej Chasles, Breton de Champ i Cauchy.

„O odległości najmniejszej dwóch prostych“ (19), (Giorn. di Battaglini, t. V). Wzór zwykły geometryi analitycznej na odległość najmniejszą dwu prostych staje się złudnym, gdy dwie proste stają się równoległemi. Stammer w tymże dzienniku Battaglini'ego wskazał sposób usunięcia tej nieoznaczoności; Beltrami podaje inny sposób, oparty na bezpośrednich rozważaniach geometrycznych.

II. Geometrya nieskończonostkowa.

Prac Beltrami'ego z dziedziny geometryi nieskończonostkowej jest około dwudziestu sześciu i dotyczą one wszystkich prawie, rzec można, części tej nauki, która zawdzięcza mu postęp poważny. Jeżeli pominiemy rozpatrzone już wyżej dwie pierwsze prace, które można uważać za należące do geometryi nieskończonostkowej krzywych, i pracę p. t.: „O pewnych wzorach, dotyczących krzywizny powierzchni“ (20), w której bardzo łatwym sposobem otrzymuje równanie linij krzywiznowych i równanie pro-

mieni krzywizny, to pierwszą ważną pracą Beltrami'ego w tej materyi jest sławna rozprawa: „Badania z analizy przystosowanej do geometryi“ (21), ogłoszona przezeń w kilku częściach w ciągu lat 1864—65 w Dzienniku Battaglini'ego. Praca ta jest jakby osnową wszystkich jego prac następnych z geometryi różniczkowej; w niej to znajdujemy zawiązek wszystkich pomysłów, które potem kolejno rozwijał; ona to — powiedzieć można — zjednała Beltrami'emu poważne miejsce pomiędzy matematykami, którzy w tym czasie dążyli do ustanowienia podstaw tego ogółu teoryj, któreby potem można było złączyć w jedno ciało systematyczne doktryny.

Rozpoczyna Beltrami od badania układów promieni i dochodzi do licznych i świetnych uogólnień znanego sławnego twierdzenia Malusa-Dupina; wprowadza parametry różniczkowe, do których zwracał się tak często w swych pracach późniejszych i których używał tak wytwornie w swych pracach z dziedziny fizyki matematycznej; bada powierzchnie, których promienie krzywizny są połączone pewnym związkiem, powierzchnie, na które świeżo zwrócili uwagę swemi pracami Weingarten i Dini; mówi o rozwijaniu powierzchni jednych na drugie, o krzywiznie geodezyjnej, o funkcyi bezwzględnej Gaussa i t. d. i t. d.

Jego prace późniejsze z geometryi różniczkowej są w ogóle tak ściśle z sobą związane, że niełatwo oddzielić je od siebie dość wyraźnie. Mimo to, podzielimy je na pewne grupy, wyróżniając prace, traktujące specyalnie o zginaniu powierzchni prostoliniowych, o powierzchniach o polu najmniejszem, o powierzchniach i przestrzeniach o krzywiznie stałej.

W pracy: „O niektórych własnościach powierzchni obrotowych“ (22), znajduje Beltrami twierdzenie o krzywiznie powierzchni obrotowej, ortogonalnej do różnych położeń innej powierzchni, przemieszczającej się stopniowo wzdłuż własnej osi. Szczególnym przypadkiem tego twierdzenia jest piękne twierdzenie Liouville'a o pseudosferze. Przechodzi następnie do badania pseudosfery, dla której oblicza pole i objętość; dowodzi, że pseudosfera jest jedyną powierzchnią obrotową, która, będąc przekształcona za pomocą zginania na inną powierzchnię obrotową tak,

aby południki przekształcały się na południki, daje powierzchnię tożsamą z pierwszą. Przechodzi potem do powierzchni, dla których różnica promieni głównych krzywizny jest w każdym punkcie stała. W tym czasie badania Dini'ego nad powierzchniami, których promienie główne krzywizny są połączone pewnym związkiem, doprowadziły go do pracy: „O rozwiązaniu pewnego zagadnienia, dotyczącego powierzchni skośnych“ (**23**), (1865), w której dowiódł, że helisoidy są jedynemi powierzchniami prostoliniowemi skośnemi, których promienie główne krzywizny są połączone związkiem. Do tego samego wyniku doszedł metodą odmienną równocześnie Dini; Beltrami zaś stosował metody, których z takim powodzeniem użył w badaniach swych nad zginaniem powierzchni.

Do teoryi rozwijalności powierzchni należy specyalnie praca z r. 1868: „O teoryi ogólnej powierzchni“ (**26**), której zadaniem jest utworzenie teoryi odkształcenia bez stosowania spółrzędnych krzywoliniowych, które zresztą, jak sam mówi, są narzędziem najodpowiedniejszem w tego rodzaju badaniach. Wyszedłszy z naturalnego rozważania spółrzędnych ortogonalnych w przestrzeni, pokazuje, że można i tą drogą dojść do dwóch twierdzeń zasadniczych, t. j. do twierdzenia Gaussa o niezmienności krzywizny i do twierdzenia Mindinga o niezmienności krzywizny geodezyjnej każdej linii.

W nocie „O teoryi linij geodezyjnych“ (**25**), (1868), stosuje tę teoryę do sławnych twierdzeń Rachunku waryacyjnego, otrzymanych przez Jacobi'ego, a powtarzając i otrzymując na nowo rezultaty znane, dochodzi do wzorów, odznaczających się godną uwagi prostotą.

Na liniach geodezyjnych opiera się zasadniczo i praca z r. 1869: „O nowym elemencie, wprowadzonym do teoryi powierzchni przez Christoffela“ (**27**). Uczony ten w tym czasie w rozprawie, ogłoszonej w pismach Akademii berlińskiej, położył podstawy pewnego gatunku trygonometryi powierzchni krzywych, której elementami są łuki geodezyjne, i wprowadził wielkości, nazwane przez siebie długościami zredukowanemi łuku geodezyjnego. Beltrami, posługując się równaniem o pochodnych cząstkowych rzędu 2-go, którego nie stosował był

Christoffel, udowadnia sposobem prostym liczne własności długości zredukowanych, analogiczne z własnościami odcinków prostoliniowych na płaszczyźnie, i znajduje, że powierzchnie o krzywiznie stałej są jedynemi powierzchniami, dla których długość zredukowana zależy tylko od odległości geodezyjnej dwóch punktów, a nie od ich położenia.

Pracę: „O zmiennych zespolonych na jakiejkolwiek powierzchni“ (**24**), (1867) należy uważać jako dopełnienie poprzednich jego „Badań z dziedziny analizy stosowanej do geometryi“ (**21**). W pracy tej rozwija myśl nową i płodną, starając się rozciągnąć na powierzchnię dowolną znane pojęcia Cauchy'ego i Riemanna z teoryi funkcyi zmiennej zespolonej, przedstawionej przez punkty na płaszczyźnie. Znajduje on związki, zastępujące w tym przypadku równanie Laplace'a, i dowodzi twierdzenia o przekształceniu całki powierzchniowej na całkę liniową, które to twierdzenie dla powierzchni, odniesionej do spółrzędnych krzywoliniowych, stanowi analogon do znanego twierdzenia, dotyczącego przestrzeni trójwymiarowej, odniesionej do spółrzędnych zwykłych. Twierdzenie to w roku następnym uogólnił, uzasadniając je dla całek wielokrotnych w pracy: „O teoryi ogólnej parametrów różniczkowych“ (**47**), o której niżej mówimy. Zebranie głównych rezultatów, otrzymanych w tej dziedzinie badań i w teoryi parametrów różniczkowych, ogłosił później po niemiecku w tomie I dziennika „Mathematische Annalen“ w rozprawie „O teoryi miary krzywizny“ (**28**).

Przez odpowiednie wytworne ugrupowanie szeregu wzorów i wprowadzenie pewnych dziewięciu wyrażeń, z których trzy znalazł już był Bertrand, otrzymał Beltrami w pracy z r. 1872: „O układzie wzorów do badania linij i powierzchni ortogonalnych“ (**29**), równania, obejmujące w sobie jako przypadek szczególny znane wzory Lamégo dla układów potrójnych ortogonalnych.

W czwartym tomie dziennika „Nouvelles Annales“ ogłosił Beltrami piękne twierdzenie o promieniu krzywizny linii asymptotycznej (tytuł pracy: „O krzywiznie pewnych linij, nakreślonych na powierzchni“ (**30**)). Twierdzenie to pobudziło odrazu Bonneta do podania dwóch wyrażeń ogólnych na promień krzywizny w punkcie krzywej asymptotycznej, przy pomocy wyrażeń

na promienie krzywizny dwóch linij, przez ten punkt przechodzących. Do tych dwóch wzorów powrócił Beltrami w roku następnym w pracy: „Dowód dwóch wzorów Bonneta“ (31), ogłoszonej w dzienniku Battaglini'ego.

W r. 1868 w pismach Akademii bolońskiej ogłosił świetną monografię „O powierzchniach o polu najmniejszem“ (34). Poprzedza tę pracę wstęp historyczny o teoryi tych powierzchni, obszerny, szczegółowy, napisany z niezrównaną wytwornością, dziś jeszcze wciąż cytowany i pożyteczny. Nie mniejszego znaczenia są przyczynki Beltrami'ego do tej teoryi, którą uprawiali pierwsi geometrowie wieku naszego Monge, Legendre, Lacroix, Ampère, Poisson, Steiner, Bonnet, Weingarten, wreszcie Weierstrass.

Otrzymawszy z własnych wzorów twierdzenie Bonneta o podziale na pary wszystkich powierzchni o polu najmniejszem w ten sposób, aby powierzchnie, należące do jednej pary, dały się rozwinąć jedna na drugiej, dowodzi twierdzeń, znalezionych przed pięcioma laty przez Matheta, przy pomocy których z jednej powierzchni o polu najmniejszem można otrzymać inne.

Nieco dawniej, Weierstrass podał był sławne wzory na spółrzędne wszystkich powierzchni o polu najmniejszem. Beltrami, idąc po tej samej drodze, poszedł od pewnego punktu drogą odmienną i otrzymał inne wzory, mogące służyć z pożytkiem do udowodnienia i rozwiązania pewnych zagadnień o powierzchniach najmniejszych (np. otrzymujemy z nich łatwo twierdzenie Matheta), gdy wzory Weierstrassa nadają się zwłaszcza w badaniu powierzchni minimalnych algebraicznych. W końcu swej pracy mówi Beltrami o powierzchniach, mających krzywiznę średnią stałą, których powierzchnie minimalne są przypadkiem szczególnym i o których w tym czasie ukazały się dwie prace, jedna Dini'ego, druga Brioschi'ego.

„O zginaniu powierzchni prostoliniowych“, Beltrami ogłosił w r. 1865 dwie prace (32, 33), z których jednę można uważać za przeróbkę drugiej. Już Minding, Bonnet, Bour zajmowali się byli zagadnieniem o zginaniu powierzchni prostoliniowych, lecz jedynie w przypadku, gdy tworzące są prostoliniowemi; we wzorach ostatecznych podanego przez nich rozwiązania wystę-

powała funkcya dowolna, której wyznaczenie stawiało trudności w stosowaniu wzorów. Beltrami unika tej niedogodności przez to, że rozwiązuje zadanie w znaczeniu w pewnej mierze odwrotnem, t. j. wprowadzając od samego początku z góry przepisane warunki przekształcenia, jakie chcemy osiągnąć; otrzymuje w ten sposób długi i ważny szereg twierdzeń, które stały się dziś, rzec można, klasycznemi i stanowią część składową każdego kursu geometryi różniczkowej.

Z prac nad geometryą nieskończonostkową krzywych płaskich i skośnych, prócz dwóch pierwszych, już omówionych, wymieniamy jeszcze pracę: „O pewnej własności linij o krzywiznie podwójnej“ (**45**), w której podaje ciekawą i osobliwą własność kinematyczną układu trzech prostych wzajemnie prostopadłych: stycznej, normalnej głównej i normalnej drugorzędnej w każdym punkcie linii skośnej. Geometryczny dowód tej własności dał później Chelini (Giorn. di Batt. **5**, p. 190), Beltrami zaś stosował ją w pracy kinematycznej o ruchu geometrycznym ciała stałego, toczącego się po innem ciele stałem.

Ostatnią grupę prac z geometryi różniczkowej, niewątpliwie najważniejszą ze wszystkich, stanowią prace o powierzchniach i przestrzeniach o krzywiznie stałej oraz o geometryi pseudosferycznej.

W tej dziedzinie Beltrami doszedł do wyników genialnych, które odrazu podniosły wysoko jego sławę.

Sam on opowiada w liście do Henryka D'Ovidio (świeżo ogłoszonym w pismach Akademii Turyńskiej 1899—1900) o tem, w jaki sposób wprowadzony został w tę dziedzinę poszukiwań. Pewna uwaga, rzucona przez Lagrange'a w jednej z rozpraw o kartach geograficznych, doprowadziła go w r. 1866 do rozwiązania zagadnienia: „Przenieść punkty powierzchni na płaszczyznę w ten sposób, aby linie geodezyjne przedstawiły się jako linie proste“ (**35**). Znalazł on, że powierzchnie takie muszą posiadać koniecznie krzywiznę stałą.

Pobudzony pomysłami Riemanna w nieśmiertelnej pracy, po jego zgonie wydanej: „O hypotezach, będących podstawą geometryi“, zamierzył Beltrami rozciągnąć poprzednie swe

rozważania na przestrzeń. Tym sposobem ukazała się jego „Teorya zasadnicza przestrzeni o krzywiznie stałej“ (37), (1868), w której wychodząc ze specyalnej formy elementu liniowego w takiej przestrzeni, dowodzi, że linie geodezyjne przedstawiają się przy pomocy równań liniowych. Nie dostrzegł on atoli wówczas, że z łatwością można było rozwiązać i zadanie odwrotne, t. j. uogólnienie zadania, rozwiązanego w r. 1866. Uczynił to w cztery lata później Schläfli, którego rozprawa pobudziła Beltrami'ego do ogłoszenîa nowej pracy o tym przedmiocie.

W tymże czasie ogłosił Beltrami rozprawę, ściśle związaną z poprzednią, a mianowicie: „Próbę interpretacyi geometryi nieeuklidesowej“ (36), w której poraz pierwszy, ku najwyższemu zaciekawieniu geometrów, wykazał, że wszystkie twierdzenia geometryi nleeuklidesowej, którą już więcej niż przed trzydziestoma laty utworzyli na dwóch różnych drogach Łobaczewskij i Bolyai i która w tym czasie żywo interesowała geometrów, dają się interpretować na powierzchniach o krzywiznie stałej ujemnej, położonych w przestrzeni euklidesowej.

W cytowanej wyżej pracy „O przestrzeniach o stałej krzywiznie“, Beltrami zupełnie naturalnie doprowadzony został do takiej interpretacyi dla jakiejkolwiek przestrzeni; znalazł on interpretacyę horysfer czyli powierzchni granicznych Łobaczewskiego, ukazując poraz pierwszy oczom geometrów prawdziwą istotę zagadnienia o przestrzeni i przecinając tym sposobem spory i nieporozumienia, które, kto wie jak długo, mogłyby się ciągnąć, grożąc wpadnięciem w metafizykę.

Głęboki pomysł Cayley'a, tak pięknie spożytkowany później przez Kleina w rzutowej interpretacyi geometryi nieeuklidesowej, był ściśle związany z ideą Beltrami'ego, który atoli nie spostrzegł czy też nie wypowiedział całej jej ważności. Uprzedził go w tym względzie Klein, którego prace zamykają, że tak powiemy, ostatecznie to zagadnienie. Nie spostrzegł też Beltrami podziału geometryi Riemannowskiej lub eliptycznej na dwie geometrye, podziału, który potem wskazał Klein, gdy Beltrami rozważał jednę tylko geometryę sferyczną, wykazując, że jest zawarta w geometryi pseudosferycznej o liczbie wymiarów o jeden większej. Mimo to, prace Beltrami'ego są zasadni-

czemi i one jedne wystarczyłyby do zapewnienia sławy jego imieniu.

Można twierdzić, że wielkie znaczenie tych prac Beltrami'ego rosło w miarę lepszego ich pojmowania i wnikania głębiej w tkwiącą w nich ideę. On sam rozpoczął te badania ze skromnym zamiarem i dopiero stopniowo spostrzegał ważność, jaką osiągnąć mogły jego pomysły, rzucając nowe światło na różne nieporozumienia, dotyczące przestrzeni.

Praca druga: „Próba interpretacyi i t. d.", miała z początku cel względnie skromny, mianowicie znalezienie odwzorowania rzeczywistego geometryi nieeuklidesowej w przestrzeni euklidesowej, t. j. wykazanie, że w przestrzeni zwykłej istniały prawie jakby przypadkiem, powierzchnie, które podstawione zamiast płaszczyzny, realizują zasady geometryi nieeuklidesowej. Rezultat ten, bardziej pogłębiony, rozszerzony i związany z ogłoszonemi w tym czasie pomysłami Riemanna o krzywiznie przestrzeni oraz z naszą niemożliwością materyalną rozstrzygnięcia, czy przestrzeń, w której żyjemy, ma krzywiznę zero albo jej nie ma — rezultat ten wyjaśnił prawdziwy powód niemożliwości zbudowania à priori, za pomocą procesów czysto logicznych, geometryi euklidesowej i rozwiązał kwestyę, która od 2000 lat niepokoiła umysły największych geometrów.

Nie chcemy tu pominąć treści innych mniejszych prac Beltrami'ego nad powierzchniami pseudosferycznemi i dla tego przypomnimy, że w r. 1872 ogłosił on pracę: „O powierzchni obrotowej, będącej typem powierzchni pseudosferycznej" (**39**), gdzie bada dość szczegółowo linie, nakreślone na pseudosferze, w celu przygotowania elementów geometrycznych do konstrukcyi materyalnej tej powierzchni, której modelu takiego, jak my go dziś mamy, nie posiadał. Inna krótka praca z tego roku p. t.: „Twierdzenie z geometryi pseudosferycznej" (**40**), jest poświęcona dowodowi osobliwego twierdzenia, mianowicie, że jeżeli z punktów prostej na płaszczyznie euklidesowej poprowadzimy równoległe w znaczeniu geometryi Łobaczewskiego do innej prostej prostopadłej do pierwszej, to obwiednia tych równoległych będzie dokładnie krzywą południkową pseudosfery (traktorya).

Wreszcie w trzeciej pracy z tegoż roku 1872 „O analitycznej teoryi odległości“ (**38**), wykazał, że wzór, wyrażający odległość jako logarytm stosunku anharmonicznego, wynikający z badań Cayley'a i Kleina nad teoryą absolutu, jest przypadkiem szczególnym (dla powierzchni o krzywiznie stałej) wzoru, który on znalazł dawniej (dla jakiejkolwiek powierzchni), w wymienionej wyżej pracy z roku 1869 „O nowym elemencie wprowadzonym przez Christoffela i t. d.“. Ten wynik, powiada Beltrami, wykazuje związek teoryi Cayley'a — Kleina z teoryą Christoffela.

Po wielu latach, w r. 1888, ogłosił przyczynek historyczny do teoryi geometryi nieeuklidesowej: „Poprzednik włoski Legendre'a i Łobaczewskiego“ (**42**), wydobywając z pyłu bibliotecznego zapomnianą książkę włocha Gerolamo Saccheri'ego profesora w Pawii, a potem w Medyolanie w końcu XVII-go i na początku XVIII-go stulecia, a którego pomysłowa próba rozwiązania pytania o postulacie Euklidesa o 30 lat poprzedziła prace Lamberta i więcej niż o pół wieku prace Legendre'a.

III. Analiza czysta.

Pomiędzy pracami z analizy czystej w znaczeniu ściślejszem, za najważniejszą uważać należy pracę klasyczną o parametrach różniczkowych (**47**), (1869).

Wypływa on wprost z prac o parametrach różniczkowych powierzchni, z których tak piękny użytek uczynił w geometryi różniczkowej, i jest ich rozszerzeniem; lecz ponieważ rzecz ta jest tu traktowana ze stanowiska czysto-analitycznego, bez względu na interpretacyę geometryczną, dla tego lepiej pomieścić ją pomiędzy pracami z analizy czystej w znaczeniu ściślejszem.

Nowsze badania Liego nad teoryą grup przekształceń i niezmiennikami różniczkowemi rzuciły nowe światło na teoryę parametrów różniczkowych; sposób zaś, w jaki Beltrami traktował ten przedmiot, jest dalszym ciągiem naturalnym metod klasycznych Gaussa, Lamégo, Jacobi'ego.

Parametry różniczkowe, których typem klasycznym jest krzywizna powierzchni całkowita Gaussa, wprowadził pod tą

nazwą do nauki Lamé, badał następnie Jacobi, lecz tylko dla przypadku trzech zmiennych i dla specyalnej formy różniczkowej kwadratowej, następnie Brioschi dla przypadku n zmiennych, lecz zawsze dla specyalnej formy różniczkowej. Badali je Somow i Codazzi, także w przypadkach specyalnych. Beltrami postawił zagadnienie w całej jego ogólności, a badanie jego można niewątpliwie poczytać za podstawowe dla wszystkich późniejszych licznych badań nad teoryą form różniczkowych kwadratowych, którą pogłębiły potem głównie prace Christoffela, Lipschitza, Ricci'ego, Frobeniusa, Knoblaucha i innych. W rozprawie tej wzory na przekształcenie całek wielokrotnych uogólnia dla przestrzeni o ilukolwiek wymiarach i dla jakiejkolwiek formy elementu liniowego.

Krótką notę p. t.: „O przekształceniu zmiennych“ (**46**), (1867), w której dowodzi się twierdzenia, zawartego implicite w jednej z prac Jacobi'ego o teoryi równań dynamiki, uważamy za należącą właściwie do prac o formach różniczkowych kwadratowych, będących podstawą przekształcenia, o którem mowa.

O szeregach trygonometrycznych, prócz kilku ćwiczeń z pierwszych lat studyów, ogłoszonych w „Nouvelles Annales“, mamy notę (**52**) w „Rendinconti de l'Istituto lombardo“ (1880), w której do rozwinięcia funkcyj na szereg wstaw i dostaw (z argumentami, zależącemi od pierwiastków funkcyi walcowej), stosuje twierdzenie Abela z rachunku całkowego, które udowadnia oraz przedstawia w nowej postaci w nocie poprzedniej (**51**) w tychże „Rendinconti“. Praca ta wiąże się także z teoryą funkcyj walcowych, któremi zajmuje się także w nocie (**53**) z r. 1881 (Atti dell' Acc. di Torino); głównym celem tej ostatniej jest znalezienie przy pomocy funkcyj walcowych wyrażenia na funkcyę potencyalną pierścienia kołowego jednorodnego. W sposób odmienny znalazł wyrażenie to już w pracy (**79**) z roku poprzedniego, ogłoszonej w Akademii dei Lincei, lecz ze stanowiska funkcyj walcowych praca ta nie uwzględniała korzyści badania, jaką osiąga się ze znanego analogicznego wzoru Lipschitza.

O teoryi funkcyj walcowych ogłosił Beltrami pięć not: jednę w roku 1879: „O pewnym wzorze całkowym“ (**54**), drugą w r. 1897: „O funkcyach kulistych jednej zmiennej“ (**55**), dwie

w latach 1890 i 1893 w „Sprawozdaniach Akademii paryskiej“ (**56**, **57**), wreszcie jednę (**58**) w r. 1896 w „Sprawozdaniach“ Instytutu lombardzkiego; jest to ostatnia jego nota matematyczna.

W pierwszej z tych not dowodzi wzoru całkowego Heinego, który służy jako definicya Laplace'a dla funkcyj kulistych jednej zmiennej przy jakiejkolwiek wartości skaźnika, pozostałe noty mają na celu wykazanie ważności, jaką w tej teoryi posiadają dwa związki różniczkowe, którym czyni zadość funkcya liniowa jednorodna o spółczynnikach stałych funkcyj kulistych gatunku pierwszego i drugiego; związki, które w postaci specyalnej napotkał już był F. Neumann, nie spostrzegłszy atoli ważności, jaką posiadają dla tej teoryi. Do tych związków powracał Beltrami wielokrotnie, aż do ostatnich lat swej pracy, już to szukając innych analogij, już to by je wyprowadzić sposobem odmiennym.

Jako krótkie ćwiczenia z teoryi równań, należy uważać dwie prace: „O równaniach algebraicznych“ (**59**), (1863), „O pewnem zagadnieniu Robertsa“ (**60**), (1864). Wreszcie krótka praca p. t.: „O funkcyach dwuliniowych“ (**61**), (1873) ma na celu sprowadzenie do formy kanonicznej jednej lub dwu takich funkcyj za pomocą przekształceń liniowych niezależnych. Wiadomo, że postępy, jakie w tym czasie i później osiągnięto w tej materyi, dzięki pracom Weierstrassa, Kroneckera i innych, były innej zupełnie natury.

O licznych i ważnych pracach o teoryi potencyału, które możnaby także pomieścić w tej trzeciej kategoryi, wolimy mówić osobno ze względu na ścisły ich związek z fizyką matematyczną i zamiar, z jakim były podjęte.

IV. Mechanika cieczy.

W czasie 1871—72 Beltrami poświęcił się ostatecznie badaniom w dziedzinie fizyki matematycznej, które rozpoczął dwiema pracami różnego rodzaju. Jedna z nich (jedyna ogłoszona w „Nuovo Cimento“) p. t.: „O teoryi matematycznej solenoidów elektrodynamicznych“ (**90**), jest niewielkiej objętości lecz pełną

treści; powracał on do niej bardzo często w latach następnych. Druga, bardzo obszerna i mająca pierwotnie tytuł: „O zasadach podstawowych hydrodynamiki rozumowej", była przezeń w kilku częściach drukowana w ciągu lat czterech w pismach Akademii bolońskiej. Omówimy najprzód pierwszą pracę, o drugiej zaś powiemy później.

Cel, jaki sobie postawił z początku Beltrami przy rozpoczynaniu swych badań nad płynami, był — jak mówi sam tytuł — zbudowanie teoryi systematycznej i zupełnej dynamiki płynów. Rozpoczął tedy od traktowania części kinematycznej, którą chciał uczynić podstawą części dynamicznej; lecz ponieważ materyał rósł mu wciąż, przeto ograniczyć się musiał prawie wyłącznie do głębszego zbadania części kinematycznej. Uzupełnienie swej pracy musiał przerwać z powodu częścią już ogłoszonych, częścią zapowiedzianych poszukiwań hydrodynamicznych Kirchhoffa. Tak więc, zapowiedziawszy, że w części czwartej, przedstawionej dnia 12 lutego 1873 r., przejdzie do teoryi dynamicznej i specyalnie do przekształcenia równań zasadniczych w spółrzędnych krzywoliniowych (patrz „Rendinconti" Akademii bolońskiej 1873—74, str. 48), zmienił odrazu swój plan i ograniczył się w części czwartej i ostatniej na rozważaniu innej strony pytań poprzednio traktowanych, odkładając do innego czasu spełnienie swej obietnicy i zmieniając tytuł całości czterech rozpraw.

Rozkładem ruchu elementarnego cząstki płynu na ruch masy i na ruch wewnętrzny czyli cząsteczkowy zajmowali się już Kirchhoff, Stokes, Helmholtz, a w przypadkach szczególnych Dirichlet i Brioschi. Beltrami na nowo podjął to rozważanie, znalazł inne własności ruchu elementarnego, rozpatrzył inny jego rozkład i przeszedł stąd do pojęcia obrotu chwilowego cząstki płynu, utworzonego już innym sposobem przez Thomsona.

W pierwszej części bada własności ruchu elementu nieskończonostkowego masy płynnej, w drugiej zaś (przedstawionej po roku) rozpoczyna badanie własności, ujawniających się w każdej chwili w cząstce skończonej tej masy płynnej; własności te polegają na osobliwych, odkrytych poraz pierwszy przez Helmholtza przed laty 40 analogiach, zachodzących pomiędzy ru-

chem cieczy a działaniami elektromagnetycznemi. Analogie te Beltrami rozpatruje w ich najprostszej postaci kinematycznej. Przechodzi następnie do wyznaczenia składowych prędkości, które otrzymuje, opierając się na twierdzeniu Greena, aby wyłączyć wszelkie postępowanie sztuczne, mające, jak powiada, charakter odgadywania. Otrzymuje tym sposobem, prócz wzorów nowych, też same wzory, które dla przypadku płynów nieściśliwych znaleźli byli Helmholtz i Hankel, a dla płynu jakiegokolwiek Roch i Lipschitz.

W części trzeciej zajmuje się Beltrami specyalnie zagadnieniem, zwanem pospolicie zagadnieniem Dirichleta; pierwsza idea tego zagadnienia tkwi w sławnych badaniach Poissona nad ruchem wahadła w ośrodku je otaczającym. Zagadnienie to polega na wyznaczeniu potencyału ruchu cieczy nieściśliwej, w którem według praw danych porusza się ciało stałe formy danej. Zagadnieniem tem zajmował się już Hoppe; następnie Clebsch podał bardzo piękne rozwiązanie w przypadku, gdy ciało stałe ma postać elipsoidy, Bjerknes zaś rozważał przypadek większej liczby ciał kulistych.

W czwartej wreszcie części rozwija Beltrami teoryę, zapoczątkowaną przez Helmholtza i Boltzmanna t. zw. warstw wirowych, które powstają, gdy poczyni się założenie o nieciągłości składowych prędkości wzdłuż jednej lub kilku powierzchni oddzielających.

Sam Beltrami mówi, że w pracy jego odbija się sposób fragmentaryczny, w jaki powstała; mimo to stanowi ona niewątpliwie bardzo ważny przyczynek do teoryi cieczy i — powiedzmy — bogatą kopalnię wzorów, rezultatów i metod, z których mogą czerpać badacze i któremi posługiwał się sam Beltrami w tylu innych pracach późniejszych, a zwłaszcza w pracach nad teoryą sprężystości i nad wzorami Maxwella.

Dalszym ciągiem tej pracy jest „Rozprawa o ruchu płaskim tarczy eliptycznej w cieczy nieściśliwej“ (**63**), przedstawiona Akademii bolońskiej dnia 16 grudnia 1871 r., lecz nie drukowana.

Beltrami rozważał już zagadnienie Dirichleta w przypadku ruchu o dwóch spółrzędnych, t. j. w przypadku ruchu tarczy eliptycznej lub kołowej w płaskiej warstwie cieczy; po kilku latach

powrócił do analogicznego zagadnienia z dwiema spółrzędnemi i w nocie przedstawionej Instytutowi lombardzkiemu: „O przypadku ruchu o dwóch spółrzędnych“ (**64**) bada przykład warstwy cieczy pokrywającej powierzchnię kuli i zmuszonej do poruszania się na odcinku kulistym sztywnym, ślizgającym się po kuli.

Wreszcie ostatnią pracą z teoryi cieczy są ogłoszone w r. 1889 „Rozważania hydrodynamiczne“ (**65**); bada w nich, specyalnie klasę ruchów (zwanych przez niego helisoidalnemi), w których linie przepływu są w każdym momencie liniami pionowemi.

V. Mechanika w ogólności.

Nie wiele prac pomieścimy w tej kategoryi.

Pierwszą z nich jest rozprawa z r. 1872 „O ruchu geometrycznym ciała stałego, toczącego się po innem“ (**66**). Z okazyi wyjścia w tym czasie niemieckiego przekładu dzieła Thomsona i Taita: „Treatise on natural philosophy“, w którem to zagadnienie kinematyczne traktowane jest sposobem prostym i pięknym, pozostawiającym tylko pewną wątpliwość co do znaku pewnych wyrażeń, Beltrami wykłada tę teoryę, posługując się specyalnie odkrytem przez siebie w r. 1867 twierdzeniem o pewnej kinematycznej własności trójki prostych: stycznej, normalnej, głównej i normalnej drugorzędnej w każdym punkcie krzywej skośnej.

„Uwaga o nocie prof. Chelini'ego“ (**67**), dotyczy przekształcenia pewnych dziewięciu równań na dziewięć innych, otrzymanego w sposób odmienny, niż w tej nocie.

„O dynamice przestrzeni o krzywiznie stałej“ (**68**) Beltrami zapowiedział w r. 1876 w Akademii dei Lincei rozprawę, którą potem wycofał, ograniczając się na ogłoszeniu tylko części kinematycznej w „Bulletin'ie“ Darboux'a. Wyobraziwszy sobie przestrzeń n-wymiarową o krzywiznie stałej, dowodzi, że gdy n jest parzyste, wtedy dla każdego ruchu elementarnego układu sztywnego istnieje zawsze punkt rzeczywisty, mający charakter chwilowego środka obrotu i istnieje zawsze nadpłaszczyzna rzeczywista, która jest płaszczyzną chwilową ślizgania się. Dla n niepa-

rzystego zaś nie istnieje w ogólności ani ten punkt ani ta nadpłaszczyzna; lecz jeżeli dla ruchu specyalnego istnieje jeden lub druga, wtedy istnieje ich nieskończenie wiele, tworzących prostą lub pęk.

Pracę: „O teoryi osi obrotu“ (**70**), (1881) ogłosił Beltrami w dziele zbiorowem, poświęconem pamięci Chelini'ego i obejmującem pisma matematyków włoskich i obcych. Ponieważ Chelini zajmował się wielokrotnie tą teoryą, tak świetnie wyjaśnioną dawniej przez Poinsota, Turazza zaś ogłosił jej wykład systematyczny w książce: „Ruch układów sztywnych“ (Il moto dei sistemi rigidi. Padwa 1868), przeto Beltrami uważał za właściwe podjąć na nowo to pytanie w celu nadania wykładowi większej jednolitości, wzorom zaś większej symetryi, przedstawiając za pomocą własnej metody badania dwóch utalentowanych włochów.

Teoryę równowagi powierzchni giętkich i nierozciągliwych, utworzył pierwszy Lagrange, potem zajmował się nią Poisson w roku 1814 w rozprawie o powierzchniach sprężystych, w roku 1817 zaś Cisa de Gresy. Lagrange rozważał nierozciągliwość jako niezmienność elementu powierzchni, nie zaś elementu liniowego; przy tej ograniczającej hypotezie napięcie powierzchniowe zachodzi zawsze normalnie do elementu liniowego i jest jednakowe we wszystkich kierunkach naokoło tego punktu. Poisson odrzucił tę hypotezę, Mossotti zaś, który w swych lekcyach mechaniki poświęca osobny rozdział temu przedmiotowi, trzyma się pomysłów Lagrange'a, przy pomocy których otrzymuje wzory, dające się stosować tylko w przypadkach specyalnych.

Dokładne równania różniczkowe zagadnienia podał pierwszy Lecornu w r. 1881; Beltrami w r. 1882 z okoliczności tej rozprawy podejmuje ab initio zagadnienie i przyjmując w zasadzie metodę Lagrange'a, skombinowaną z prawdziwą definicyą nierozciągliwości, ustanawia wszystkie równania zasadnicze, otrzymuje teoryę napięć powierzchniowych, którą Lecornu postawił a priori przy pomocy rozważań geometrycznych, rozważa niektóre nowe przypadki równowagi i dochodzi do wzorów, wyrażających odkształcenie nieskończenie małe powierzchni giętkiej i nierozciągliwej.

Ostatnią pracą, należącą do tego działu, jest rozprawa „O równaniach dynamicznych Lagrange'a“ (**72**), (1895). Już innym razem (w nocie o uogólnieniu zasady D'Alemberta w elektrodynamice) Beltrami zwrócił uwagę na ważność tak zwanej zasady Lagrange'a i zauważył, że wielu autorów niesłusznie przyjmowało zamiast niej zasadę Hamiltona za podstawę wielu rozważań mechanicznych. W omawianej pracy wraca do tego przedmiotu, aby wykazać, że zasada, z której Lagrange wywodzi swoje sławne równania dynamiczne, jest prawdziwą osnową całej mechaniki analitycznej, i sposobem nadzwyczaj prostym wyprowadza z niej równania dynamiki, które liczni autorowie wyprowadzali z zasady Hamiltona. Wyobraziwszy sobie zmienne układu podzielone na dwie grupy, oraz że siła żywa nie zależy w swych spółczynnikach od zmiennych grupy drugiej, otrzymuje równania dynamiki w postaci, do której typu należą równania, podane w sposób odmienny przez Thomsona i Taita w drugiem wydaniu ich dzieła, oraz równania, podane przez C. Neumanna.

VI. Potencyał. Atrakcya. Elektryczność. Magnetyzm. Elektromagnetyzm.

Prac o teoryi potencyału razem z pracami z teoryi elektryczności i magnetyzmu jest przeszło trzydzieści; te drugie zaś są tak ściśle związane z pierwszemi, że rozdział stanowczy nie jest tu możliwy. Mimo to, jest tu grupa prac, traktujących specyalnie o teoryi analitycznej funkcyi potencyalnej i o potencyale; tą grupą najprzód się zajmiemy.

Teorya analityczna potencyału, utworzona przez Laplace'a, Legendre'a i Lagrange'a i początkowo oddana prawie całkowicie na użytek mechaniki niebieskiej, stała się później, dzięki zwłaszcza pracom Greena i Gaussa, jednem z najskuteczniejszych narzędzi w badaniach, należących do dziedziny fizyki matematycznej. Beltrami poddał tę teoryę badaniu głębszemu i szczegółowemu; pracował on nad nią wielokrotnie przez długie lata, wracając nieraz do rzeczy dawniejszych, w celu bliższego

ich wyjaśnienia, lepszego wykazania ich ważności lub wreszcie dla wyraźniejszego zaznaczenia niejednego szczegółu, mniej znanego.

Rozprawa: „O niektórych punktach teoryi potencyału“ (**78**), ogłoszona w Bolonii w r. 1878, ma na celu przejście do pewnego gatunku ścisłej krytyki dotychczasowych rezultatów przez dokładne wyjaśnienie i opisanie stosowalności pewnych wzorów zasadniczych, będących jakby osnową teoryi. Beltrami osiąga swój cel, szukając drogi prostszej, samorzutnej i naturalniejszej prowadzącej do systematycznej dedukcyi tych wzorów.

Wielokrotnie zajmował się Beltrami teoryą funkcyj potencyalnych symetrycznych, o których w r. 1878 ogłosił pracę p. t.: „O funkcyach potencyalnych układów symetrycznych około jednej osi“ (**77**). Otrzymuje w niej szereg wzorów analogicznych do wzorów już znanych, a odnoszących się specyalnie do funkcyj zwanych dołączonemi, t. j. do takich funkcyj, które przyrównane do stałej, dają równania linij sił. Podaje twierdzenie, przy pomocy którego, mając funkcye dołączone jakiegokolwiek układu symetrycznego, można przejść do funkcyj analogicznych dla układu (symetrycznego), otrzymanego z poprzedniego za pomocą inwersyi względem punktu na osi symetryi. Źródła tego twierdzenia szukać należy w pracy z roku poprzedniego 1877: „O pewnych kwestyach z elektrostatyki“ (**92**), w której obliczył linie sił dla tarczy kołowej, posługując się wzorem na funkcyę potencyalną tarczy eliptycznej o gęstości, zmieniającej się według pewnego prawa, odkrytego przez Dini'ego.

Twierdzenie to, nazwane przez siebie twierdzeniem o inwersyi, uzupełnia Beltrami dla przypadku układów symetrycznych i dla funkcyj dołączonych. Zasadę inwersyi uzasadnił dawniej Thomson tylko dla funkcyj potencyalnych. Do tego twierdzenia i do teoryi funkcyj dołączonych powrócił Beltrami w pracy z r. 1883: „O funkcyach dołączonych i specyalnie o funkcyach odcinka kulistego“ (**84**), w której, po wyłożeniu systematycznem swojej teoryi, stosuje ją do rozważanego już dawniej przez Greena, Thomsona, Lipschitza, Betti'ego, E. Neumanna przypadku odcinka kulistego. Otrzymuje funkcyę potencyalną rozmieszczenia symetrycznego na odcinku, znaną tylko

w niektórych przypadkach bardzo szczególnych, oraz nieznane dotąd równanie odpowiadających linij sił.

Praca z r. 1881: „O teoryi funkcyj potencyalnych symetrycznych“ (**82**), należy do tejże kategoryi rozważań. W pracy wcześniejszej o zagadnieniu klasycznem „O przyciąganiu elipsoid“ (**81**), otrzymał już był okolicznościowo związek, pozwalający wyznaczyć funkcyę potencyalną tarczy kołowej o gęstości, zmieniającej się w pierścieniach spółśrodkowych, z danych wartości, jakie przybiera ta funkcya na samej tarczy. W tej nowej pracy wychodzi z tego związku i szuka innych nowych związków lub też stara się uzasadnić związki znane, lecz otrzymane sposobami sztucznemi. Znajduje godną uwagi prostą i osobliwą postać funkcyi potencyalnej tarczy kołowej symetrycznej, naelektryzowanej. Badanie drobiazgowe i zupełne tej funkcyi stanowi właśnie jeden z przedmiotów głównych rozprawy z r. 1883 p. t.: „O funkcyach dołączonych i t. d.“ (**84**).

W r. 1880 ogłosił B e l t r a m i rozprawę „O przyciąganiu pierścienia kołowego i eliptycznego“ (**79**), której zadaniem jest zbadanie funkcyi potencyalnej pierścienia eliptycznego jednorodnego i odpowiedniej funkcyi dołączonej, oraz wyłożenie szeregu interesujących rezultatów analitycznych, wypływających z tego badania. Jako dalszy ciąg tej rozprawy, można poczytać pracę, ogłoszoną w r. 1889: „O funkcyj potencyalnej okręgu koła“ (**86**), w której rozważa piękne własności tej funkcyi, będącej odwrotnością średniej arytmetyczno-geometrycznej G a u s s a najmniejszej i największej odległości punktu uważanego od okręgu i która, jako taka, czyni zadość równaniu o pochodnych cząstkowych, znalezionemu dawniej przez B o r c h a r d t a. B e l t r a m i dowodzi, że równanie to jest przekształconem równaniem L a p l a c e'a. W nocie tej podaje też postać, jaką przybiera twierdzenie G r e e n a dla funkcyj potencyalnych symetrycznych względem osi.

W nocie z r. 1878 „O pewnych twierdzeniach C l a u s i u s a w teoryi potencyału“ (**76**), podaje rozmaite twierdzenia i wzory, znalezione przez siebie w rozmaitych poszukiwaniach, a przedstawiające analogię z wzorami w monografii C l a u s i u s a, która wtedy została ogłoszona. W pracy z r. 1880 p. t.: „O pewnych nowych twierdzeniach C. N e u m a n n a o funkcyach potencyal-

nych“ (81), dowodzi twierdzeń o potencyale logarytmowym i newtoniańskim, podanych przez Neumanna bez dowodu w tomie XVI dziennika „Mathematische Annalen“.

Metody rozwiązania zagadnienia klasycznego o przyciąganiu elipsoid dzielą się, według słusznego spostrzeżenia Chelini'ego, na bezpośrednie i pośrednie. Metod bezpośrednich, rozwiązujących zagadnienie za pomocą mniej lub więcej zawiłych całkowań, używali pierwsi Legendre, Laplace, Poisson; metodą bezpośrednią można też nazwać piękną i płodną metodę Dirichleta. Metod pośrednich używali Ivory, Gauss i Chasles, później Chelini, Betti, Dini. Beltrami, wprowadziwszy spółrzędne eliptyczne, daje metodę, którą nazywa możliwie najbardziej pośrednią, gdyż wyłączone z niej zostaje wszelkie działanie faktycznego całkowania. Wyrażeniu ogólnemu Dirichleta na funkcyę potencyalną elipsoidy poświęcił Beltrami krótką pracę dawniejszą z r. 1872: „O pewnem przekształceniu Dirichleta“ (73).

Nota z r. 1893: „O teoryi potencyału“ (83), jest poświęcona uzupełnieniu bardzo prostych wzorów, podanych poraz pierwszy przez Thomsona, na potencyał wzajemny dwóch rozmieszczeń masy; traktuje on o przypadkach, w których oba rozmieszczenia są warstwami podwójnemi albo ogólniej rozmieszczeniami wielorakiemi.

Do drugiej grupy zaliczymy prace o potencyale, które nie dotyczą potencyału newtoniańskiego.

Praca z r. 1873: „O potencyale wzajemnym dwóch układów sztywnych, w szczególności zaś o potencyale elementarnym elektrodynamicznym“ (74), przedstawiona Akademii dei Nuovi Lincei i ogłoszona w „Annali di Matematica“, powstała z powodu pewnego twierdzenia Helmholtza, sprzecznego z innem mylnem twierdzeniem C. Neumanna. Beltrami przyjmuje dwa ciała, działające na siebie na mocy sił obdarzonych potencyałem, i stara się znaleść warunki, jakim potencyał winien czynić zadość, aby siły wzajemne czyniły zadość zasadzie działania i przeciwdziałania. Znajduje on za pomocą bezpośredniego rachunku, że, zgodnie z twierdzeniem Helmholtza, formą najogólniejszą potencyału jest funkcya dowolna sześciu parametrów niezależnych, od których

zależy położenie dwóch ciał. Warunek ten, jak dowodzi Beltrami, jest nietylko konieczny lecz i dostateczny.

Po badaniach C. Neumanna nad nowym potencyałem elementarnym, czyniącym zadość, przy pewnych ograniczeniach, zasadniczym warunkom równowagi elektrycznej, które zdawał się spełniać tylko sam potencyał newtoniański, podjął Beltrami tę samą kwestyę w nocie z r. 1865 p. t.: „Z powodu nowego badania profesora C. Neumanna“ (**89**). Znalazł on tu twierdzenie o nowych funkcyach, schodzące się z twierdzeniem Poissona i łączące się z niem w jedno twierdzenie ogólne. Twierdzenie to wyprowadził Beltrami w inny sposób w pracy o wyrażeniu analitycznem, jakie dał Kirchhoft zasadzie Huygensa (**116**), a które znów jest przypadkiem szczególnym innego wyrażenia, podanego w rozprawie z teoryi ciepła.

Trzy noty zatytułowane: „O funkcyach zespolonych“ (**85, 87, 88**), ogłoszone w Sprawozdaniach Instytutu lombardzkiego w latach 1887—1871—1894, mają na celu przedstawienie funkcyj, które dla płaszczyzny schodzą się ze zwykłemi funkcyami potencyalnemi o trzech spółrzędnych, a które nie są t. zw. funkcyami potencyalnemi logarytmowemi, stosowanemi zwykle, jak wiadomo, za C. Neumannem do ustanowienia tej odpowiedniości. Znalazł on funkcyę, dla której równanie, odpowiadające równaniu Laplace'a, jest rzędu pierwszego a nie drugiego; funkcya ta jest zespoloną dla wszystkich punktów wewnętrznych pola i redukuje się do zwykłych funkcyj zmiennej zespolonej dla punktów zewnętrznych. Łączy ona w sobie w pewnem znaczeniu własności zwykłych funkcyj potencyalnych przestrzeni i powierzchni. Funkcyę tę Beltrami nazwał funkcyą potencyalną zespoloną i obliczył jej wartości w przypadku pola eliptycznego. Przykład ten pozostaje w związku z teoryą klasyczną przyciągania elipsoid.

W pracach poniższych, jakkolwiek ściśle związanych z poprzedniemi, wyraźniejszym i przeważającym jest cel zastosowania fizykalnego rezultatów analitycznych. Dla dogodności i większej jasności przedstawienia, podzielimy te prace na dwie klasy: do pierwszej zaliczymy prace elektrostatyczne

i elektrodynamiczne, do drugiej prace nad magnetyzmem i elektromagnetyzmem.

Okoliczności, dotyczące rozkładu elektryczności w stanie równowagi na powierzchni izolowanego odcinka kulistego oraz rozkładu elektrycznego na odcinku, pod wpływem działania punktu elektrycznego, dowolnie położonego, rozważał już Thomson w r. 1847. Potem bardziej szczegółowo badał je Lipschitz w kilku rozprawach. Przypadkiem szczególnym drugiego z tych zadań jest zagadnienie o tarczy kołowej, znajdującej się pod wpływem działania punktu elektrycznego. Beltrami, pobudzony pewną uwagą Thomsona i niektóremi spostrzeżeniami Felici'ego, podejmuje badanie zupełne przypadku indukcyi wywołanej na tarczy, będącej doskonałym przewodnikiem, przez działania elektryczne symetryczne w około osi, i tą pracą, wyżej już wspomnianą z r. 1877 p. t.: „O niektórych kwestyach z elektrostatyki“ (92) rozpoczyna, można powiedzieć, badania swoje nad potencyałami symetrycznemi oraz nad wyznaczaniem odpowiednich funkcyj dołączonych.

Inne zastosowanie fizykalne twierdzenia o inwersyi, spostrzeżonego tu poraz pierwszy i rozwiniętego następnie zupełniej, jak to już powiedzieliśmy, w pracach nad potencyałami symetrycznemi, podał w pracy z roku 1884 p. t.: „O pewnem zagadnieniu, dotyczącem teoryi prądów umiejscowionych“ (95).

Powiedzieliśmy wyżej, że jedną z pierwszych prac Beltrami'ego w dziedzinie fizyki matematycznej jest ogłoszona w r. 1872 w „Nuovo Cimento“ „Nota o teoryi matematycznej solenoidów elektrodynamicznych“ (90).

Ampère w r. 1823 rozważał solenoidy pojedyńcze, składające się z prądów elementarnych równych i równooddalonych, rozmieszczonych normalnie do pewnej kierownicy; Beltrami zaś, opierając się na pewnych rozważaniach (takich, jak rozważania dawniejsze Thomsona, których wówczas nie znał), rozpatruje układy ciągłe prądów, których prawo rozkładu jest o wiele ogólniejsze. Dowodzi twierdzenia o działaniu elektromagnetycznem tego solenoidu, którego przypadek szczególny podali już Riecke w r. 1870 i inny Lipschitz w r. 1868; te dwa przypadki były znów różnemi uogólnieniami przypadku t. zw. solenoidu walcowego,

który podał F. Neumann w r. 1848 i rozważał szczegółowo Emil Weyr w r. 1871. O temże twierdzeniu traktuje także wymieniona już wyżej rozprawa: „O pewnych punktach teoryi potencyału“ (**78**).

W tejże nocie (**90**) rozpatruje Beltrami i t. zw. solenoidy obojętne, przedstawiające godną uwagi analogię z warstwami poziomemi, a w „Kinematyce cieczy“ (**62**) pokazał mimochodem zastosowanie bardzo proste tych układów do hyperboloid jednopowłokowych. O temże zastosowaniu mówi w pięknej pracy z r. 1883 w „Acta mathematica“ p. t.: „O warstwach poziomych elektromagnetycznych“ (**94**), gdzie otrzymuje piękne twierdzenie o liniach krzywiznowych i liniach asymptotycznych hyperboloidy jednopowłokowej i o ich prostem zastosowaniu elektromagnetycznem.

Praca „O wyznaczeniu doświadczalnem gęstości elektrycznej na powierzchni przewodników“ (**91**) z r. 1877 traktuje o znanej płaszczyźnie próbnej Coulomba, której teoryę usiłował dać Maxwell; szuka w niej Beltrami formy szczególnej takiego narzędzia, która umożliwia dokładne wyznaczenie stosunku pomiędzy elektrycznością przeniesioną a istniejącą pierwotnie.

Ważną pracą, w której wyprowadża pewną analogię pomiędzy teoryami elektryczności a teoryami termodynamiki, jest praca p. t.: „O teoryi układów konduktorów naelektryzowanych“ (**93**) z r. 1882; ustanawia w niej Beltrami wyrażenie najogólniejsze i bardzo proste na pracę mechaniczną zewnętrzną, wykonaną w układzie konduktorów elektrycznych przez siły elektryczne podczas jakiejkolwiek zmiany formy, położenia i stanu elektrycznego konduktorów. Z wzorów, w ten sposób otrzymanych, można wyprowadzić, między innemi, twierdzenie Clausiusa o wzajemności, i przechodząc następnie do rozważania cyklu zamkniętego (wyobrażając sobie cykl zmian, przez które każdy przewodnik wraca do stanu pierwotnego), otrzymujemy rezultat, mający wyraźną analogię z drugą zasadą termodynamiki.

Ostatnią wreszcie pracą, należącą do tej klasy a biorącą początek w próbie dedukcyi bezpośredniej działań elektrodynamicznych z równań ogólnych mechaniki analitycznej, podjętej przez Maxwella, jest rozprawa z r. 1889: „O uogólnieniu zasady

d'Alemberta w elektrodynamice" (**96**). Wykazuje w niej Beltrami, że dla tej dedukcyi lepiej jest, zamiast z równań Hamiltona, z których wyszedł był fizyk angielski, wyjść z wzoru zasadniczego Lagrange'a, ściśle związanego z zasadą d'Alemberta; wzór ten, przy uwzględnieniu prawa Ohma, może odpowiednio być uogólniony i stać się jądrem elektrodynamiki.

Powiemy teraz o pracach specyalnych nad magnetyzmem i elektromagnetyzmem.

Pierwszą z nich w porządku chronologicznym jest rozprawa z r. 1882: „O potencyale magnetycznym" (**97**). Rozbiera z niej Beltrami pojęcie osi i środka ciała magnetycznego, wprowadzone przez Thomsona, i znajduje, że oś zasługuje na tę nazwę, jako niezależna od prawa działania siły magnetycznej, środek zaś nie, gdyż jest zasadniczo podległy hypotezie newtoniańskiej. Dowodzi dalej istnienia na osi innego punktu, którego położenie jest naprawdę niezależne od tej hypotezy, a który zlewa się ze środkiem Thomsona, tylko wtedy, gdy moment bezwładności układu względem osi magnetycznej jest zerem.

Po tej pracy nastąpiła inna w r. 1883 p. t.: „O warstwach magnetycznych" (**98**); celem jej jest zbadanie warstw o magnetyzacyi stycznościowej, o której wzmiankę tylko pobieżną uczynił dawniej Thomson; badanemi były dawnej tylko warstwy o magnetyzacyi poprzecznej, t. j. te, których oś magnetyczna jest w każdym punkcie skierowana normalnie do powierzchni warstwy.

Pierwsza część „Not fizyczno-matematycznych" (**101**), (1889) jest poświęcona potencyałowi ciała magnetycznego względem samego siebie, przedstawiającemu miarę energii magnetycznej tego ciała. Beltrami wykazuje przedewszystkiem, że nie można do tego potencyału stosować wprost wzoru Thomsona, co zdawałoby się właściwem na pierwszy rzut oka, i wykazuje konieczność dodania jeszcze jednego wyrazu określonej postaci. Wykazuje dalej, że nawet przy takiej zmianie wzór odmawia usług w przypadku ciał diamagnetycznych, które miałyby tym sposobem potencyał ujemny. Z tego względu skłania się do uważania za prawdopodobniejszą hypotezy Faraday'a o polaryzo-

waniu się całej przestrzeni ze spółczynnikiem dodatnim dla tej przestrzeni jak i dla każdego ciała w niej pogrążonego; przez taką to hypotezę indukcya diamagnetyczna sprowadza się do czystego pozoru.

„O indukcyi magnetycznej“ (**100**), ogłosił Beltrami pracę w r. 1884, po której nastąpiła w r. 1891 i 1892 inna zupełniejsza: „Rozważania nad teoryą matematyczną magnetyzmu“ (**103, 104**). Wiadomo, że teoryę indukcyi magnetycznej zapoczątkował Coulomb, podał zaś Poisson, który poczynił był wszakże pewne hypotezy szczególne o formie i rozkładzie t. zw. elementów magnetycznych; hypotezy, które prawdopodobnie stały się powodem faktu, że teorya Poissona nie dała się pogodzić w zupełności z doświadczeniem. Beltrami postawił sobie zadanie utworzenia teoryi bez tych hypotez, pozostawiając formę i rozkład elementów magnetycznych bezwzględnie nieoznaczonemi. Pomiędzy innemi, znalazł on, że istnieje w każdym przypadku funkcya, która w zagadnieniu o indukcyi magnetycznej spełnia rolę i charakter funkcyi Greena w elektrostatyce i w przypadku izotropii jest tożsamą z funkcyą charakterystyczną F. Neumanna. Funkcya ta, podobnie jak i funkcya Greena, daje wyrażenie każdej funkcyi potencyalnej w postaci, którą można potem sprowadzić do całki powierzchniowej. W pracy drugiej Beltrami oświadcza, że jego przekonanie o konieczności usunięcia pojęcia elementu magnetycznego Poissona wzmocniło się, i stara się zbudować teoryę na pojęciu biegunowości magnetycznej, wprowadzonego już przez Thomsona i Maxwella.

Zasada, że każdemu rozkładowi magnetycznemu odpowiada rozkład prądów stałych i zamkniętych, obdarzonych równem działaniem zewnętrznem, była przyjęta najprzód jako postulat, będący podstawą sławnego twierdzenia Ampère'a. Lecz później nasunęły się pewne wątpliwości w tym przedmiocie. Beltrami stara się rozwiązać całkowicie to pytanie w pracy z r. 1883 p. t.: „O równoważności rozkładów magnetycznych i galwanicznych“ (**99**) i powraca do niego jeszcze w r. 1892 w swych „Rozważaniach nad teoryą matematyczną elektromagnetyzmu“ (**102**). W pracy tej buduje teoryę zasadniczą elektromagnetyzmu, wychodząc

ze stanowiska, zajętego przez Maxwella, i starając się głównie usunąć wszelkie wątpliwości, wynikające z pozornego pomieszania, jakie sprawia równoczesne ciągłe rozważanie w dziele Maxwella dwóch różnych gatunków sił, co spowodowało było niemałe niepewności.

VII. Sprężystość.

W fizyce matematycznej teorya sprężystości jest dziedziną, w której Beltrami otrzymał najpoważniejsze wyniki; do teoryi tej był szczególnie przygotowany przez swoje dawne badania nad mechaniką cieczy, tak, że bardzo często rozpoczynał od wzorów i postępowań z tej ostatniej.

Aby przedstawić prace Beltrami'ego nad sprężystością w pewnym porządku, podzielimy je na trzy grupy, kładąc w pierwszej prace, dotyczące specyalnie równań ogólnych i potencyał sprężystości, w drugiej trzy rozprawy, odnoszące się do sławnych wzorów Maxwella, w trzeciej zaś prace o wyrażeniu analitycznem zasady Huygensa, podanem przez Kirchhoffa.

Pierwsza praca z teoryi sprężystości z r. 1881 nosi tytuł: „O równaniach ogólnych sprężystości“ (**104**). Wiadomo, że Lamé pierwszy przekształcił równania ogólne sprężystości, wprowadzając spółrzędne krzywoliniowe ortogonalne; później C. Neumann i Borchardt, badając ten przedmiot rozmaitemi metodami, napotkali w przypadku izotropii pewne trudności, z których trudno było zdać sobie sprawę. Beltrami, doszedłszy drogą bezpośrednią do szukanych równań, znalazł rezultat nieoczekiwany, mianowicie, że gdy równania ogólne są niezależne od postulatu euklidesowego, to równania dla ośrodków izotropowych, t. zw. równania izotropii, zależą od tego postulatu. Oto jest prawdziwy powód trudności, które napotkali jego poprzednicy, gdy chcieli wyprowadzać te równania z równań ogólnych, stosując formę elementu liniowego przestrzeni, która z powodu nieoznaczoności swych spółczynników nie obejmowała w sobie a priori hypotezy euklidesowej.

To doprowadziło go naturalnie do utworzenia teoryi izotropii sprężystej w przestrzeni o krzywiznie stałej i do powrotu z punktu

widzenia fizyki matematycznej do dawnych swych badań z przed lat trzydziestu. W przestrzeniach tych znalazł on odkształcenie, pozbawione tak obrotu jak i rozciągnięcia, w którem siła i przemieszczenie mają w każdym punkcie kierunek ten sam (albo przeciwny), a wielkości stale proporcyonalne. Rezultat ten jest dla tego bardzo ważny, że — jak to zaznacza Beltrami — przedstawia osobliwą analogię z pomysłami Maxwella o działaniu ośrodków dielektrycznych.

Praca z r. 1885 p. t.: „O warunkach wytrzymałości ciał sprężystych" (**105**), poświęcona jest wykazaniu ważności, jaką w rozważaniu wielu zagadnień z teoryi sprężystości ma t. zw. potencyał sprężystości. Fizycy matematyczni (i także Clebsch), szukając granicy wytrzymałości ciała sprężystego, przyjmowali ogólnie zasadę, że granicę tę należy wyprowadzać z rozważania tylko samego największego napięcia; metoda Saint-Venanta opiera się znów na rozważaniu największego rozciągnięcia. Beltrami zauważył, że ani jedna ani druga zasada nie jest naturalną, gdyż prawdziwa miara próby, której poddaje się spójność ciała sprężystego, powinna zależeć od ogółu wszystkich rozciągnięć i wszystkich napięć, panujących wokoło każdego punktu ciała; a ponieważ te napięcia i rozciągnięcia zależą znów od jedynej funkcyi kwadratowej określonej, którą nazywamy zwykle potencyałem sprężystości, przeto rozwiązania zagadnienia szukać należy raczej w badaniu tego potencyału. Opierając się na tem, rozważa Beltrami rozmaite przypadki szczególne, badane dawniej przez De Saint-Venanta, a jego rozwiązania tylko częściowo zgadzają się z rozwiązaniami tego autora.

Było już wiadomem, że warunki konieczne każdego możliwego odkształcenia wyrażają się sześcioma równaniami o pochodnych cząstkowych rzędu drugiego, którym winny czynić zadość sześć składowych odkształcenia. Temi równaniami zajmował się Beltrami wielokrotnie i dowiódł o nich twierdzenia zasadniczego, że będąc koniecznemi, są zarazem dostatecznemi, i znalazł rozmaite bardzo proste metody wyprowadzania tych równań. Uczynił to najprzód okolicznościowo w rozprawie z r. 1886: „O interpretacyi mechanicznej wzorów Maxwella" (**114**), o której

mówimy niżej, a następnie w drugiej części swych „Not fizyczno-matematycznych“ (**101**) oraz w liście do Maurycego Lévy, ogłoszonym w Sprawozdaniach Akademii paryskiej.

„O teoryi fal“ (**106, 110**) ogłosił Beltrami dwie prace: jednę w r. 1886, drugą w r. 1891. Zadaniem pierwszej jest wyjaśnienie pomysłów F. Neumanna, który przed dawnym czasem z praw Fresnela wyprowadził był równania zasadnicze sprężystości; zadaniem drugiej jest wykład całej teoryi, z zamiarem uwolnienia jej od hypotezy, pochodzącej z przyjęcia a priori drgań prostoliniowych; ograniczenie to pozostało nawet u Kirchhoffa w jego zastosowaniu teoryi sprężystości do teoryi światła.

Wreszcie w pracy z r. 1891 p. t.: „O ośrodku sprężystym Greena“ (**109**), Beltrami stawia sobie zadanie: zbadać, czy prócz ośrodków izotropowych nie ma innych ośrodków sprężystych, do których stosuje się własność redukcyi trzech równań ruchu drgającego do jednego równania, gdy wszystkim składowym przemieszczenia nadamy postać trzech pochodnych cząstkowych 1-go rzędu jednej i tej samej funkcyi. Dochodzi on do postaci potencyału takiej samej, jaką podał Green dla ogólniejszego ośrodka sprężystego, w którym mogą rozchodzić się fale płaskie podłużne. Bada następnie ten ośrodek sprężysty Greena w jego różnych szczegółach; znajduje, że trójka ciśnień głównych ma zwrot osi pewnego stożka kwadrykowego i dowodzi, że ośrodek Greena jest najogólniejszym ośrodkiem sprężystym, w którym, po ustaleniu jakiejkolwiek prostej jako kierunku rozciągnięcia liniowego pewnego odkształcenia szczególnego, z prostą tą zlewa się zawsze jedno z odpowiednich ciśnień głównych.

Znanem jest genialne badanie Maxwella, mające na celu wykazanie, że siły, wypływające ze zwykłego rozkładu mas można, zastąpić siłami, wynikającemi z pewnego układu ciśnień i napięć, analogicznych z temi, jakie panują wewnątrz ośrodka sprężystego. Ważność tego poglądu polega na tem, że uzasadnia on w wysokim stopniu hypotezę, wypowiedzianą niejednokrotnie przez fizyków, a zwłaszcza przez Faradaya i W. Thomsona o istnieniu ośrodka kosmicznego, będącego vehiculum, po przez który rozchodzą się działania elektryczne i magnetyczne. Poszukiwanie to

niezwykle było pociągającem dla Beltrami'ego. To też zaraz po ogłoszeniu wzorów Maxwella, w r. 1884 wyłożył on prosty i jednolity sposób wywodu tych wzorów w pracy: „O przedstawieniu sił newtonianskich dla ośrodka sprężystego“ (112) i wkrótce potem w innej pracy z r. 1885: „O użytku spółrzędnych krzywoliniowych w teoryi potencyału i sprężystości“ (113), określa stopień ogólności tych wzorów, t. j. ich zależności od natury przestrzeni, i stara się dojść do nich, wychodząc z jakiegokolwiek układu spółrzędnych krzywoliniowych, t. j. pozostawiając naturę przestrzeni nieoznaczoną. W roku następnym znowu powraca do tego przedmiotu w rozprawie: „O interpretacyi mechanicznej wzorów Maxwella“ (114), gdzie dochodzi do wyniku wielkiego znaczenia. Zapytuje w niej Beltrami, czy istnieje interpretacya mechaniczna tych wzorów, t. j. czy przy przyjęciu tego ośrodka sprężystego istnieje w nim w samej rzeczy odkształcenie, zdolne wytworzyć ciśnienie, którego składowe wyrażają się wzorami Maxwella? I dochodzi do wyniku, że w założeniu, iż ten ośrodek jest jednorodny i izotropowy t. j., iż stałe izotropii mogą się zmieniać w rozmaitych obszarach przestrzeni, nie istnieje w nim odkształcenie, którego składowe wyrażają się temi wzorami, chyba że przyjmiemy przypadek bardzo szczególny, w którym funkcya potencyalna jest liniową względem spółrzędnych, czego zresztą przyjąć nie można przy hypotezie o nieskończoności przestrzeni. Aby tedy znaleść interpretacyę mechaniczną wzorów Maxwella, trzeba wyobrazić sobie ośrodek izotropowy sui generis; inaczej bowiem, nawet przy uwzględnieniu podanego już przez Greena podziału potencyału sprężystości na dwie części, którym odpowiadają dwa ośrodki sprężyste istotnie różne, wynikłaby stąd niemożność istnienia drugiego ośrodka, w którymby rozchodziły się jedynie falowania poprzeczne, gdyż w ośrodku tym, pomiędzy innemi, nie spełniałyby się warunki stałości równowagi.

Wynik ten jest, jak widzimy, ujemny; nie zmniejsza on atoli bynajmniej ważności wzorów Maxwella i nabiera wielkiego znaczenia sam przez się, gdyż ostrzega nas, że jesteśmy jeszcze dalecy od celu, i że dla dojścia do tego celu nie wystarczają, zdaje się, dotychczasowe nasze pojęcia.

Tym sposobem Beltrami, który w swych latach młodzieńczych podał był tak ważne przyczynki do pojęć naszych o geometrycznej budowie przestrzeni, podjąwszy znów po tylu latach, jedno z najtrudniejszych zagadnień filozofii przyrody, wzbogacił nie mniej ważnemi pomysłami i teoryę fizycznej budowy przestrzeni.

Ostatnia grupa prac o sprężystości dotyczy, jak już wyżej powiedziano, wyrażenia analitycznego zasady Huygensa.

Kirchhoff, rozszerzając zastosowanie twierdzenia Greena, podane przez Helmholtza, wyprowadził najprzód wzór Poissona, a następnie wzór ogólniejszy, który jako przekład analityczny zasady Huygensa może służyć za podstawę do badania zjawisk optycznych. Ale postępowanie Kirchhoffa podlegało pewnym zarzutom, tak że inni uczeni zamierzali wyprowadzić ten ważny wzór drogą odmienną. Beltrami zaś uważając to postępowanie za najnaturalniejsze w badaniach tego rodzaju, podjął je na nowo i starał się je przedstawić w r. 1889 w pracy: „O zasadzie Huygensa“ (**115**) w sposób wolny od wzmiankowanych wyżej trudności. Zmianę, zaprowadzoną przez Beltrami'ego, przyjęły odrazu traktaty, tak np. „Kurs hydrodynamiki, elektryczności i akustyki“ Duhema.

Tymże przedmiotem zajmował się Beltrami i w trzech pracach następnych (**116**, **117**, **118**), w których wydoskonalił i uprościł dedukcyę, a w ostatniej z nich z r. 1895: „O twierdzeniu Kirchhoffa“ (**118**) wykazał, że twierdzenie to opiera się na prostej tożsamości analitycznej, której czyni zadość każda funkcya trzech spółrzędnych prostokątnych i odległości punktu od innego punktu stałego.

VIII. Teorya ciepła.

O teoryi ciepła ogłosił Beltrami dwie prace; trzecią, przedstawioną w r. 1893 Akademii bolońskiej, wycofał później.

W niektórych prostych zagadnieniach o rozchodzeniu się ciepła, gdy idzie o nadanie większej wytworności rozwiązaniom,

bywa dogodniejszem posługiwanie się nie metodą klasyczną Fouriera, opartą na rozważaniu t. zw. rozwiązań pojedyńczych i ich rozwinięciami na szereg, lecz innemi metodami, z których jedna, podana w r. 1868 przez Bettiego, opiera się na używaniu wyrażeń analogicznych do zwykłych funkcyj potencyalnych.

Na podstawie tej metody Beltrami w rozprawie z roku 1887: „O niektórych zagadnieniach, dotyczących rozchodzenia się ciepła“ (**119**), rozważa przypadek kuli, której temperatura zmienia się warstwami spółśrodkowemi. Zagadnienie o wyznaczeniu temperatury zmiennej wewnątrz kuli z danej temperatury na powierzchni, znanej jako pewna funkcya czasu, sprowadza się do rozwiązania równania funkcyjnego, w którem funkcya niewiadoma występuje albo pod albo po za znakiem całki określonej, a rozwiązanie to otrzymuje Beltrami w postaci nadzwyczaj wytwornej.

W nocie z r. 1895 p. t.: „O potencyałach termodynamicznych“ (**121**), zwróciwszy uwagę na pojęcie tego potencyału, którego pochodne względem zmiennych geometrycznych układu przedstawiają wypływające z tego układu siły mechaniczne, którego potencyał ten przedstawia energię swobodną, oraz przypomniawszy, że potencyał powinien zależeć od jednego parametru u, uważanego za stały, co równoważy się z przyjęciem, że funkcya, określona jako potencyał, odgrywa taką rolę jedynie w procesach termodynamicznych odwracalnych $u =$ stałej, zapytuje, czy każdemu takiemu procesowi $u =$ stałej odpowiada zawsze potencyał. Dowodzi, że procesy termodynamiczne, mające potencyał, są temi i jedynie temi procesami, dla których u można uważać za funkcyę temperatury bezwzględnej i entropii. Rozważa następnie znany przypadek procesów izotermicznych; są to jak wiadomo procesy, dla których twierdzenie to ma miejsce, lecz do których nie stosuje się wprost podane rozwiązanie, gdyż w metodzie użytej do otrzymania tego rozwiązania; zakłada się, że u i temperatura są niezależne, gdy tymczasem w hypotezie izotermicznej u jest funkcyą samej tylko temperatury.

IX. Akustyka.

Beltrami był nietylko matematykiem, ale uprawiał też z powodzeniem i muzykę, w której kształcił się najprzód pod kierunkiem matki, a następnie ćwiczył się z Ponchiellim. Arcydzieła muzyki niemieckiej umiał wykonywać, jak rzadko kto. Lecz, jak w swem ciepłem wspomnieniu o Beltramim opowiada Cremona, ukrywał on swój talent muzykalny z powściągliwą skromnością, jakby obawiał się zagniewać wspaniałą boginę, matematykę, której całkowicie siebie poświęcił. Myślał on — przytoczymy tu własne słowa Beltrami'ego (z minuty listu do Wolffa, ogłoszonej przez Cremonę)—że pomiędzy muzyką a matematyką istnieje większe pokrewieństwo, aniżeli to napozór się wydaje; że rozumowanie matematyczne jest jakby szeregiem akordów, wprawiających w drganie lirę intelektualną, utworzoną z promieni matematycznych myśli ludzkiej, i że odkrycie nowej części matematyki daje się porównać z odkryciem nowej modulacyi harmonicznej.

Jedyną pracą, jaką pozostawił z teoryi matematycznej muzyki, jest rozprawa z r. 1882: „O skali diatonicznej“ (**122**). Oznaczywszy przez 1 ton zasadniczy, przez r, s interwale pomiędzy nią a dwiema nutami doskonałego akordu, przez $\frac{1}{2}$ interwal oktawy, znajduje, że wartości, nadawane doświadczalnie liczbom r, s t. j. $r = \frac{4}{5}$, $s = \frac{2}{3}$, są najprostszemi liczbami wymiernemi, czyniącemi zadość dwóm nierównościom zasadniczym.

Szerokość poglądów przy wnikaniu w najdrobniejsze szczegóły; niezachwiane dążenie do przedstawiania wysokich zagadnień w widoku najbardziej naturalnym i prostym; badanie długie, cierpliwe, niezmordowane w wielokrotnem opracowywaniu tych samych przedmiotów dla dotarcia do celu widniejącego w umyśle; nigdy nienasycone pragnienie doskonałości, ujawniające się między innemi w wycofywaniu nieraz rozpraw napisanych — oto cechy główne pracy naukowej Beltrami'ego.

Natchnienie dawały mu zawsze dzieła wielkich mistrzów, skąd płynęło jego nigdy niezaspokojone pragnienie doskonałości.

W nocie, którą poprzedził swój przekład magistralnego wspomnienia Plückera o Clebschu, zachęcał młodzież do studyów na wielkich wzorach. Na takich wzorach, pisał on, kształcili się znakomici mężowie wszystkich czasów; na tych też wzorach kształcić się winno nowe pokolenie naukowe, jeżeli pragnie być godnem czasu, w którym się narodziło, i losów, do których jest przeznaczone.

Po przedstawieniu prac matematycznych, opiszmy kilkoma słowami przymioty moralne Beltrami'ego, nigdy niezatarte w pamięci naszej.

Przymiotem widocznym każdemu nawet powierzchownemu spostrzegaczowi była wyróżniająca go wyższość charakteru, która budziła—nie wiem co bardziej: szacunek czy podziw. Był on zawsze równym: z umysłem w najwyższym stopniu zrównoważonym, inteligencyą ruchliwą, prędką, rozkazującą, bystrą, nigdy niesłabnącą, zachował do ostatnich lat siłę i męskość, które zdawały się być niespożytemi. Takim się okazuje w wyjątkach z listów, które przytoczył Cremona w swojem wspomnieniu: umysł dojrzały, świadomy siebie, pełen uczuć szlachetnych i wzniosłych, unikający wszystkiego, co miało pozór nizkości i pospolitości, ze wzrokiem, skierowanym zawsze ku najwyższym ideałom ludzkim — takim pozostał on aż do ostatnich dni; takim widzimy go w krótkiem lecz pięknem przemówieniu na wiosnę 1899 roku na cześć lorda Kelvina, najznakomitszego fizyka świata, który w tym czasie bawiąc w Rzymie, był obecny na posiedzeniu Akademii dei Lincei.

Beltrami władał po mistrzowsku formą.

Przyroda użyczyła mu wielu darów, lecz więcej jeszcze zdobył sam ciągłem niezmordowanem staraniem, pracą nad sobą i nad innemi, surowością dla siebie, a tego skarbca przymiotów w każdym swych czynie używał z majestatem, rzec można, królewskim.

I dziś, prześwietni koledzy, uczciwszy to imię błogosławione Eugeniusza Beltrami'ego, wróćmy do prac naszych i niechaj duch jego budzący do dzielnych czynów, unosi się zawsze

w tej auli, w której tylokrotnie dźwięczał głos jego i gdzie jaśniał jego geniusz.

Czciciele prawdy, w krótkiej i trudnej wędrówce na scenie świata, przekazują jeden drugiemu gorejący płomień, podobnie,—że użyję tu świetnego obrazu poety rzymskiego—jak w uroczystościach mistycznych starożytnej Grecyi, gońcy w swym uciążliwym biegu oddawali jeden drugiemu gorejącą pochodnię.

Ten płomień święty pozostawił nam Eugeniusz Beltrami; będzie on zawsze czczony i przy nim pracownicy nauki rozgrzewać będą swe serca ku tym wysokim ideałom, które były ideałami Beltrami'ego.

SPIS PRAC NAUKOWYCH EUGENIUSZA BELTRAMI'EGO, ułożony porządkiem materyj.

I. Geometrya analityczna.

a) *Krzywe wymierne. Powierzchnia Steinera.*

1. Annotazioni sulla teoria delle cubiche gobbe. Dwie Noty. (Rend. Ist. Lomb, serie II, vol. I. 1868).
   Alcune formole per la teoria elementare delle coniche. (Giorn. di Battaglini, vol. IX. 1871).
3. Komunikat listu prof. Cremona. (Giorn. di Batt., vol. X. 1872).
4. Ricerche di geometria analitica. (Mem. Acc. di Bologna, serie III, vol. X. 1879).

b) *Powierzchnie rzędu trzeciego.*

5. Sull'equazione pentaedrale delle superficie di terz'ordine. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XII. 1879).

c) *Twierdzenia Feuerbacha, Simpsona i Steinera. Powierzchnia Cayley'a.*

6. Sulle coniche di nove punti. (Giorn. di Batt, vol. I. 1863).
7. Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti. (Giorn. di Batt, vol. I. 1863).
8. Théorème proposé à démontrer. (Nouv. ann., t. II, pag. 336. 1863).

9. Intorno alle coniche di nove punti e ad alcune questioni che ne dipendono. (Mem dell'Acc. di Bologna, serie II, vol. II. 1863).
10. Intorno ad alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner. (Mem. Acc. di Bologna, serie III, vol. V. 1875).
11. Considerazioni analitiche sopra una proposizione di Steiner. (Mem Acc. di Bologna, serie III, vol. VII. 1877).

d) *Formy dwójkowe sześcienne.*

12. Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche. (Mem. Acc. di Bologna, serie II, vol. IX. 1870).

e) *Różne ćwiczenia.*

13. Soluzione di un problema relativo alle superficie di second'ordine. (Giorn. di Batt., vol. I. 1863).
14. Démonstration d'un théorème de M. Salmon. (Nouv. ann., t. II, pag 181. 1863).
15. Démonstration d'un théorème de M. Mannheim. (Nouv. ann., t. II, pag. 209. 1863).
16. Solution de la question: Soient donnés une surface de second degré, la sphère exceptée, et un point fixe, lieu du spectateur; sous quel angle verra-t-il la surface? (Nouv. ann., t. II, pag. 355. 1863).
17. Démonstration d'un théorème de M. W. Roberts. (Nouv. ann., t. IV), pag. 233. 1865).
18. Di alcune proprietà generali delle curve algebriche. (Giorn. di Batt., vol. IV. 1866).
19. Sulla minima distanza di due rette. (Giorn. di Batt., vol. V. 1867).

II. Geometrya nieskończonostkowa.

a) *Teorya ogólna powierzchni. Krzywizna i odkształcenie powierzchni. Powierzchnie, których promienie krzywizny są połączone pewnym związkiem. Rozwijalność. Parametry różniczkowe powierzchni. Układy potrójne powierzchni ortogonalnych. Linie geodezyjne powierzchni.*

20. Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie. (Ann. di mat., serie I, vol IV. 1862).
21. Ricerche di analisi applicata alla geometria. (Giorn. di Batt., voll II e III. 1864–65).
22. Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione. (Ann. di mat., vol. VI. 1865).
23. Risoluzione d'un problema relativo alle superficie gobbe. (Ann. di mat., vol. VII. 1865).

24. Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque. (Ann. di mat., serie II, vol. I. 1867).
25. Sulla teoria delle linee geodetiche. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. I. 1868).
26. Sulla teoria generale delle superficie. (Ateneo Veneto, serie II, vol. V. 1868).
27. Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal sig. Christoffel nella teoria delle superficie. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. II. 1869).
28. Zur Theorie des Krümmungsmasses. (Math. Annalen. Bd. I. 1869).
29. Di un sistema di formole per lo studio dolle lince e delle superficie ortogonali. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. V. 1872).

b) *Linie asymptotyczne na powierzchniach.*

30. Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface. (Nouv. Ann., t. IX, pag. 258. 1865).
31. Dimostrazione di due formole del sig. Bonnet. (Giorn. di Batt., vol. IV. 1866).

c) *Powierzchnie prostoliniowe i ich zginanie.*

32. Sulla flessione delle superficie rigate. (Ann. di mat., vol. VII. 1865).
33. Intorno alla flessione delle superficie rigate. (Ateneo Veneto, serie II, vol. II. 1865).

d) *Powierzchnie o polu najmniejszem.*

34. Sulle proprietà generali delle superficie di area minima. (Mem. Acc. di Bologna, serie II, vol. VII. 1868).

e) *Powierzchnie o krzywiznie stałej. Geometrya pseudosferyczna. Przestrzenie o krzywiznie stałej i linie geodezyjne w tych przestrzeniach.*

35. Risoluzione del problema: „Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le lince geodetiche vengano rappresentate da linee rette“. (Ann. di mat., vol. VII. 1866).
36. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. (Giorn. di Batt., vol. VI. 1868).
37. Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante. (Ann. di mat., vol. II. 1868).
38. Sulla teoria analitica della distanza. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. V. 1872).
39. Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche. (Giorn. di Batt., vol. X. 1872).
40. Teorema di geometria pseudosferica. (Giorn. di Batt., vol. X. 1872).

41. Osservazione sulla nota del prof. Schlaefli alla memoria del professor Beltrami „Sugli spazi di curvatura costante". (Ann. di mat., vol. V. 1872).
42. Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky. (Rend. Acc. dei Lincei, serie IV, vol. V. 1889).

f) *Geometrya nieskończonostkowa krzywych.*

43. Intorno ad alcuni sistemi di curve piane. (Ann. di mat., serie I, vol. IV. 1862).
44. Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti. (Ann. di mat., serie I, vol. IV. 1862).
45. Di una proprietà delle linee a doppia curvatura. (Giorn. di Batt., vol. V. 1867).

III. Analiza czysta.

a) *Parametry różniczkowe. Formy różniczkowe kwadratowe.*

46. Intorno ad una trasformazione di variabili. (Giorn. di Batt., vol. V. 1867).
47. Sulla teoria generale dei parametri differenziali. (Mem. Acc. di Bologna, serie II, vol. VIII. 1869).

b) *Wzory rachunku całkowego. Szeregi trygonometryczne. Funkcye walcowe.*

48. Extrait d'une lettre au sujet d'une question proposée dans la Revue américaine Mathematical Monthly. (Nouv. Ann. serie II. t. I, pag. 315. 1862).
49. Extrait d'une lettre au sujet d'un théorème de M. Laurent. (Nouv. Ann., serie II, t. I, pag. 449. 1862).
50. Démonstration d'un théorème de M. Valton. (Nouv. Ann., serie II, t. II, pag. 302. 1863).
51. Intorno ad un teorema di Abel e ad alcune sue applicazioni. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XIII. 1880).
52. Intorno ad alcune serie trigonometriche. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XIII. 1880).
53. Sulle funzioni cilindriche. (Atti Acad. di Torino, vol. XVI. 1881).

c) *Funkcye kuliste.*

54. Intorno ad una formola integrale. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XII. 1879).
55. Sulle funzioni sferiche di una variabile. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XX. 1887).

56. Quelques remarques au sujet des fonctions sphériques. (Compt. rend. de l'Acad. de Paris, vol. CX. 1890).
57. Sur la théorie des fonctions sphériques. (Compt. rend. de l'Acad. de Paris, vol. CXVI. 1893).
58. Sulla teoria delle funzioni sferiche. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXIX. 1896).

d) *Teorya równań.*

59. Sulle equazioni algebriche. (Giorn. di Batt., vol. I. 1863).
60. Sur une question de M. Roberts. (Nouv. Ann., t. III, pag. 64. 1864).

e) *Formy dwuliniowe.*

61. Sulle funzioni bilineari. (Giorn. di Batt., vol. XI. 1873).

IV. Mechanika cieczy.

62. Ricerche sulla cinematica dei fluidi. (Mem. Acc. di Bologna, serie III, vol. I, II, III e V, 1871—72—74).
63. Memoria intorno al moto piano di un disco ellittico in un fluido incompressibile. (Rend. Acc. di Bologna, 1875—76) [zapowiedziana lecz nie ogłoszona].
64. Intorno ad un caso di moto a due coordinate. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. X. 1878).
65. Considerazioni idrodinamiche. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXII. 1889).

V. Mechanika w ogólności.

66. Del moto geometrico di un solido che ruzzola sopra un altro solido. (Giorn. di Batt., vol. X. 1872).
67. Osservazione ad una nota del prof. Chelini sopra i sistemi materiali di egual momento d'inerzia. (Giorn. di Batt., vol. XII. 1874).
68. Intorno alla dinamica degli spazi di curvatura costante. (Trans. Acc. dei Lincei, serie II, vol. III. 1876) [zapowiedziana lecz nie ogłoszona].
69. Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante. (Bullet. de Darboux, t. XI. 1876).
70. Sulla teoria degli assi di rotazione. (Collect. mathem. in mem. D. Chelini, Mediolani. 1881).
71. Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. III. 1882).
72. Sulle equazioni dinamiche di Lagrange. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXVIII. 1895).

VI. Potencyał. Atrakcya. Elektryczność. Magnetyzm. Elektromagnetyzm.

a) *Teorya analityczna funkcyi potencyalnej i potencyału. Atrakcya newtonowska.*

73. Intorno ad una trasformazione di Dirichlet. (Giorn. di Batt., vol. X. 1872).
74. Sul potenziale mutuo di due sistemi rigidi ed in particolare sul potenziale elementare elettro-dinamico. (Ann. di mat., vol. VI. 1873).
75. Considerazioni sopra una legge potenziale. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. IX. 1876).
76. Intorno ad alcune proposizioni di Clausius nella teoria del potenziale. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XI. 1878).
77. Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XI. 1878).
78. Intorno ad alcuni punti della teoria del potenziale. (Mem. Acc. di Bologna, serie III, vol. IX. 1878).
79. Sull'attrazione di un anello circolare od ellittico. (Mem. Acc. dei Lincei, serie III, vol. V. 1880).
80. Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. I. 1880).
81. Intorno ad alcuni nuovi teoremi del signor C. Neumann sulle funzioni potenziali. (Ann. di mat., serie II, vol. X. 1880).
82. Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. II. 1881).
83. Sulla teoria del potenziale. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XVI. 1883).
84. Sulle funzioni associate e specialmente su quelle della calotta sferica. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. IV. 1883).
85. Sulle funzioni complesse. (Nota I). (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XX. 1887).
86. Sulla funzione potenziale della circonferenza. (Rend. Circ. mat. di Palermo, vol. III. 1889).
87. Sulle funzioni complesse. (Nota II). (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXIV. 1891).
88. Sulle funzioni complesse. (Nota III). (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXVII. 1894).
89. A proposito d'una nuova ricerca del prof. C. Neumann. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. IV, 2° semestre 1895).

b) *Elektrostatyka. Elektrodynamika.*

90. Nota sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici. (Nuovo Cim., serie II, vol. VII VIII. 1872).

91. Sulla determinazione sperimentale della densità elettrica alla superficie dei corpi conduttori. (Mem. Acc. dei Lincei, serie III, vol. I. 1877).
92. Intorno ad alcune questioni di elettrostatica. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. X. 1877).
93. Sulla teoria dei sistemi di conduttori elettrizzati. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XV. 1882).
94. Sur les couches de niveau électromagnétiques. (Acta Math., vol. III. 1883).
95. Intorno ad un problema relativo alla teoria delle correnti stazionarie. (Rend. Ist. Lomb , serie II, vol. XVII. 1884).
96. Sull'estensione del principio di d'Alembert all'elettrodinamica. (Rend. Acc dei Lincei, serie IV, vol. V. 1889).

c) *Magnetyzm. Elektromagnetyzm.*

97. Sul potenziale magnetico. (Ann. di mat., serie II, vol. X. 1882).
98. Sulla teoria degli strati magnetici. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XVI. 1883).
99. Sull'equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XVI. 1883).
100. Sulla teoria dell'induzione magnetica secondo Poisson. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. V. 1884).
101. Note fisico-matematiche. (Rend. Circ. mat. di Palermo, vol. III. 1889) (p. № 107).
102. Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo. (Mem. Acc di Bologna, serie V, vol. I. 1891).
103. Considerazioni sulla teoria matematica dell'elettromagnetismo. (Mem. Acc. di Bologna, serie V, vol. II. 1892).

VII. Sprężystość.

a) *Równania ogólne. Potencyał sprężystości.*

104. Sulle equazioni generali dell'elasticità. (Ann. di mat., serie II, vol. X. 1881).
105. Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XVIII. 1885).
106. Sulla teoria delle onde. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XIX. 1886).
107. Note fisico-matematiche. (Rend. Circ. mat. di Palermo, vol. III. 1889) (p. № 101).
108. Sur la théorie de la déformation infiniment petite d'un milieu. (Comptes rendus de l'Acad. de Paris, vol. CVIII. 1889).
109. Intorno al mezzo elastico di Green. Due Note. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXIV. 1891).

110. Sulla teoria generale delle onde piane. (Rend. Circ. matem. di Palermo, vol. V. 1891).
111. Osservazioni su di una nota del prof. Morera. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. I. 1892).

b) *Wzory Maxwella.*

112. Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XVII. 1884).
113. Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. VI. 1885).
114. Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. VII. 1886).

c) *Wzór Kirchhoffa.*

115. Sul principio di Huygens. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XXII. 1889).
116. Sull'espressione analitica del principio di Huygens. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V. vol. I. 1892).
117. Sull'espressione data da Kirchhoff al principio di Huygens. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. IV, 2° sem. 1895).
118. Sul teorema di Kirchhoff. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. IV, 2° sem. 1895).

VIII. Ciepło.

119. Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore. (Mem. Acc. di Bologna, serie IV, vol. VIII. 1887).
120. Note sulla teoria della propagazione del calore. (Rend. Acc. di Bologna, 1892—93) [zapowiedziane lecz nie ogłoszone].
121. Sui potenziali termodinamici. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. IV, 1° sem. 1895).

IX. Akustyka.

122. Sulla scala diatonica. (Rend. Ist. Lomb., serie II, vol. XV. 1882).

X. Bibliografie. Sprawozdania. Przekłady.

123. Przekład rozprawy Gaussa z r. 1825 z „Astronomische Abhandlungen" o odwzorowywaniu powierzchni. (Annali di mat., serie I, vol. IV. 1862).
124. O pracy Cheliniego: „Teoria dei sistemi di coordinate semplici et sulla discussione dell'equazione generale di 2° grado in coordinate triangolari e tetraedriche". (Giorn. di Batt., vol. I, str. 314. 1863).

125. O dziele Casorati'ego: „Teorica generale delle funzioni di variabili complesse". (Tamże vol. VII. 1869).
126. O okazie pewnej tablicy logarytmowej (razem z Michezem). (Rend. Acc. di Bologna 1872—73).
127. List Lagrange'a do F. M. Zanotti'ego. (Rend. Acc. di Bologna 1872—73).
128. Przekład wspomnienia Clebscha o Plückerze, z rozpraw Tow. getyngeńskiego XVI. 1872. (Giorn. di Batt., vol. XI).
129. Przekład wspomnienia o Clebschu, napisanego przez Brilla, Gordana, Kleina i t. d. z tomu VII dziennika Math. Annalen. (Ann. di mat., serie II, vol. VI).
130. Referat o rozprawie pułkownika Pietro Conti: „Sulla resistenza alla flessione della pietra serena". (Trans. Acc. di Lincei, serie II, vol. II. 1875).
131. Referat dla Ministeryum rolnictwa i handlu w sprawie nagród za najlepsze prace fizyko-matematyczne i ekonomiczno-etyczne, napisane przez wykładających w Instytutach technicznych. (Transunti Lincei, serie II, vol. III. Część I 1876).
132. Referat dla Ministeryum oświaty, dotyczący nagród za prace matematyczne w r. 1881—82. (Trans. Acc. dei Lincei, serie III, vol. VI. 1882).
133. Takiż referat za rok 1885—1886. (Tamże serie IV, vol. II. 1886).
134. Referat w sprawie konkursu królewskiego za nauki matematyczne 1887 r. (Tamże serie IV, vol. V. 1889).

XI. Wspomnienia. Nekrologi. Biografie. Przemówienia.

135. Wspomnienie o Alfredzie Clebschu. (Giorn. di Batt., vol. X. 1872).
136. Noty biograficzne i bibliograficzne o dawnych profesorach Uniwersytetu w Pawii. (W tomie: Memorie e documenti per la storia dell'Università di Psvia. Część I. Pawia 1878).
137. Przemówienie, poświęcone pamięci D. Chelini'ego. (Rend. Acc. di Bologna 1878—79, str. 15).
138. O życiu i dziełach D. Chelini'ego. (Collect. mathem. in mem. D. Chelini. Medyolan 1881).
139. Enrico Betti. (Rend. Circ. mat. di Palermo, vol. VI. 1892).
140. Ernesto Padova. Nekrolog. (Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. V. 1896).
141. Wspomnienie o F. Brioschim. (Ann. di mat., XXVI. 1897).
142. Wspomnienie o Brioschim (na posiedzeniu uroczystem Akademii dei Lincei dnia 12 czerwca 1898)
143. Przemówienie z powodu śmierci Sophusa Liego (Rend. Lincei, serie V, vol. VIII, 1° półr. 1899).
144. Przemówienie na cześć Kelvina. (Rend. Lincei, serie V, vol. VIII, 1° półr. 1899).