TWIERDZENIE POISSONA O PRAWIE WIELKICH LICZB

podał

B. Danielewicz.

W poprzednim zeszycie „Wiadomości matematycznych" podaliśmy sprawozdanie o dziele p. S. E. Sawicza [1]). Nadmieniliśmy przytem, że w rozdziale I, poświęconym zasadom rachunku prawdopodobieństwa, podał autor dowód twierdzenia Poissona o prawie wielkich liczb, opracowany w sposób elementarny przez prof. A. Markowa, według pomysłu P. Czebyszewa. Interesujące to dowodzenie pozwalamy tu sobie podać w formie możliwie skróconej.

Niech zjawisko E polega na zachodzeniu zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Jedno z tych zdarzeń, podczas każdego doświadczenia, koniecznie zajść musi, skutkiem czego, gdy przez $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ oznaczymy prawdopodobieństwa zajścia zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, musi być oczywiście:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1 .$$

Niech następnie wielkość x może przybierać różne wartości, zależnie od pojawienia się tego lub innego ze zdarzeń A_i, niech mianowicie przybiera:

wartość	x_1,	gdy	zachodzi	zdarzenie	A_1,
„	x_2,	„	„	„	A_2,
„	x_3,	„	„	„	A_3,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
„	x_n,	„	„	„	A_n.

Czyli — co na jedno wychodzi — niech wielkość x przybiera wartości $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Wtedy suma

[1]) „Elementarnaja teorja strachowanja żizni i trudosposobnosti".

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i$$

nazywa się n a d z i e j ą m a t e m a t y c z n ą wielkości x i nie przestaje posiadać tego samego znaczenia nawet wówczas, gdy x przybiera wartości $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ tylko przy zachodzeniu zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ $(k < n)$ — wystarczy bowiem natenczas założyć w (2) $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0$.

Wyobraźmy sobie teraz dwie wielkości x i y, z których pierwsza przybiera wartości $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$, druga zaś wartości $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ z prawdopodobieństwami $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$; przyczem

$$(1') \qquad \sum_{i=1}^{i=m} p_i = 1\,; \sum_{j=1}^{j=n} q_j = 1\,.$$

Dowiedziemy, że n a d z i e j a m a t e m a t y c z n a s u m y d w ó c h w i e l k o ś c i x i y r ó w n a s i ę s u m i e n a d z i e i m a t e m a t y c z n y c h k a ż d e j z n i c h.

Oznaczmy dla krótkości:

$$(3) \quad \text{nadz. mat. } x = \sum_{i=1}^{i=m} x_i p_i = a\,, \quad \text{nadz. mat. } y = \sum_{j=1}^{j=n} y_j q_j = b\,.$$

Ponieważ $x + y$ przybiera wartość $x_i + y_j$ z prawdopodobieństwem $p_i q_j$, przeto

$$\text{nadz. mat. } (x+y) = \sum_{i=1}^{i=m}\sum_{j=1}^{j=n} (x_i + y_j) \,.\, p_i q_j = \sum_{i=1}^{i=m} p_i \sum_{j=1}^{j=n} (x_i + y_j) \,.\, q_j\,.$$

Lecz:

$$p_i \sum_{j=1}^{j=n} (x_i + y_j)\, q_j = p_i x_i \sum_{j=1}^{j=n} q_j + p_i \sum_{j=1}^{j=n} y_j q_j = p_i x_i + p_i b = p_i (x_i + b)$$

i następnie

$$\sum_{i=1}^{i=m} p_i (x_i + b) = \sum_{i=1}^{i=m} x_i p_i + b \sum_{i=1}^{i=m} p_i = a + b\,, \text{ t. j.}$$

$$(4) \qquad \text{nadz. mat. } (x+y) = \text{nadz. mat. } x + \text{nadz. mat. } y\,.$$

Jeżeli zamiast dwóch wielkości x i y weźmiemy ilekolwiek $x, y, z \ldots$, to oczywiście na podstawie wzoru (4):
nadz. mat. $(x+y+z+\ldots) =$ nadz. mat. $x +$ nadz. mat. $(y+z+\ldots)$ $=$ nadz. mat. $x +$ nadz. mat. $y +$ nadz. mat. $(z+\ldots) =$ nadz. mat. x $+$ nadz. mat. $y +$ nadz. mat. $z + \ldots$, czyli **nadzieja matematyczna sumy ilukolwiek wielkości równa się sumie ich nadziei matematycznych.**

Gdyby wielkość x zachowywała stale tę samą wartość s, wówczas według wyrażenia (2):

$$\text{(5)} \qquad \text{nadz. mat. } x = \sum_{i=1}^{i=n} s \,.\, p_i = s \,.\, \sum_{i=1}^{i=n} p_i = s\,,$$

t. j. **nadzieja matematyczna wielkości stałej równa się samej tej wielkości.**

Podobnie, jak dla sumy, dowiedziemy, **że nadzieja matematyczna iloczynu ilukolwiek wielkości równa się iloczynowi ich nadziei matematycznych.**

Weźmy najprzód pod uwagę dwie wielkości x i y, przybierające wartości $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$
$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ " $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$
przy warunkach (1') i oznaczeniach (3).

Oczywiście prawdopodobieństwo wartości $x_i y_j$ równa się $p_i q_j$, skutkiem tego:

$$\text{nadz. mat. } (x \,.\, y) = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} x_i y_j p_i q_j = \sum_{i=1}^{i=m} x_i p_i \sum_{j=1}^{j=n} y_j q_j \,.$$

Lecz $x_i p_i \sum_{j=1}^{j=n} y_j q_j = x_i p_i \,.\, b$, a $\sum_{i=1}^{i=m} x_i p_i \,.\, b = b \sum_{i=1}^{i=m} x_i p_i = a \,.\, b$, t. j.

$$\text{(6)} \qquad \text{nadz. mat. } (xy) = \text{nadz. mat. } x \cdot \text{nadz. mat. } y\,.$$

Przy ilukolwiek wielkościach $x, y, z \ldots$, według (6),
nadz. mat. $(x, y, z\ldots) =$ nadz. mat. $x \cdot$ nadz. mat. $(y, z\ldots) =$ nadz. mat. $x \cdot$ nadz. mat. $y \cdot$ nadz. mat. $(z \ldots) =$ nadz. mat. x . nadz. mat. y . nadz. mat. $z \ldots$

Jeżeli jedna z wielkości jest ilością stałą, np. $x = s$, to nadz. mat. $(s \, . \, y) =$ nadz. mat. $s \cdot$ nadz. mat. $y = s$. nadz. mat. y, czyli: n a d z i e j a m a t e m a t y c z n a i l o c z y n u z w i e l k o ś c i s t a ł e j p r z e z z m i e n n ą r ó w n a s i ę i l o c z y n o w i z t e j i l o ś c i s t a ł e j p r z e z n a d z i e j ę m a t e m a t y c z n ą w i e l k o ś c i z m i e n n e j.

Oznaczmy, jak zwykle, przez $a, b, c, \ldots$ nadzieje matematyczne wielkości $x, y, z, \ldots$, a przez $a_1, b_1, c_1, \ldots$ nadzieje matematyczne kwadratów tych wielkości, t. j. połóżmy:

$$a = \sum_{i=1}^{i=m} x_i p_i \, ; \quad b = \sum_{j=1}^{j=n} y_j q_j \, ; \text{ i t. d.}$$

$$a_1 = \sum_{i=1}^{i=m} x_i^2 p_i \, ; \quad b_1 = \sum_{j=1}^{j=n} y_j^2 q_j \, ; \text{ i t. d.}$$

Można dowieść, że nadzieja matematyczna wielomianu

$u = [x - a + y - b + z - c + \ldots]^2$ równa się $a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots$

Jeżeli z początku ograniczymy się na dwóch wielkościach x i y, to dwumian

$$u = (x - a + y - b)^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + 2\,(x - a) \, . \, (y - b)$$
$$= x^2 + y^2 + 2\,xy - 2\,(a + b) \, . \, (x + y) + a^2 + b^2 + 2\,ab \, ,$$

skutkiem czego:

$$\text{nadz. mat. } u = \text{nadz. mat. } (x^2 + y^2) + \text{nadz. mat. } 2\,xy$$
$$- \text{nadz. mat. } 2\,(a + b) \, . \, (x + y) + \text{nadz. mat. } (a^2 + b^2 + 2\,ab) \, .$$

Lecz:

$$\text{nadz. mat. } (x^2 + y^2) = \text{nadz. mat. } x^2 + \text{nadz. mat. } y^2 = a_1 + b_1 \, ,$$

$$\text{nadz. mat. } 2\,xy = 2 \,\text{nadz. mat. } x \cdot \text{nadz. mat. } y = 2 \, . \, a \, . \, b \, ,$$

$$\text{nadz. mat. } 2\,(a + b)\,(x + y) = 2\,(a + b) \, . \, \text{nadz. mat. } (x + y)$$
$$= 2\,(a + b) \, . \, (\text{nadz. mat. } x + \text{nadz. mat. } y) = 2\,(a + b)^2 \, ,$$

$$\text{nadz. mat. } (a^2 + b^2 + 2\,ab) = a^2 + b^2 + 2\,ab = (a + b)^2 \, .$$

Z podstawienia ostatnich wyrażeń w pierwsze, wypada

$$(\alpha) \quad \begin{aligned} &\text{nadz. mat. } u = \text{nadz. mat. } [x-a+y-b]^2 = a_1+b_1+2ab \\ &-2(a+b)^2+(a+b)^2 = a_1+b_1-a^2-b^2 = a_1-a^2+b_1-b^2 . \end{aligned}$$

Dla trzech wielkości x, y, z wielomianem jest

$$u = [x-a+y-b+z-c]^2 .$$

Gdy oznaczymy $(x-a+y-b) = v$, otrzymujemy:

$$u = [v+z-c]^2$$

oraz

$$(\beta) \quad \begin{aligned} \text{nadz. mat. } u = \text{nadz. mat. } v^2 &+ \text{nadz. mat. } 2v(z-c) \\ &+ \text{nadz. mat. } (z-c)^2 \end{aligned}$$

Według (α):

$$\text{nadz. mat. } v^2 = a_1 - a^2 + b_1 - b^2$$

$$\text{nadz. mat. } 2v(z-c) = 2 \,.\, \text{nadz. mat. } v \cdot \text{nadz. mat. } (z-c) ,$$

a ponieważ

$$\text{nadz. mat. } v = \text{nadz. mat. } (x-a+y-b) = \text{nadz. mat. } x$$
$$- \text{nadz. mat. } a + \text{nadz. mat. } y - \text{nadz. mat. } b = a-a+b-b = 0 ,$$

przeto:

$$\text{nadz. mat. } 2v(z-c) = 0 .$$

Wreszcie

$$\text{nadz. mat. } (z-c)^2 = \text{nadz. mat. } z^2 - 2c \,.\, \text{nadz. mat. } z + \text{nadz. mat. } c^2$$
$$= c_1 - 2c^2 + c^2 = c_1 - c^2 ,$$

czyli z (β)

$$\text{nadz. mat. } u = \text{nadz. mat. } (x-a+y-b+z-c)^2$$
$$= a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 .$$

W podobny sposób można dowieść, że w ogóle:

$$
\text{(7)} \qquad \begin{aligned} &\text{nadz. mat. } [x - a + y - b + z - c + \dots]^2 \\ &= a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \dots \end{aligned}
$$

Załóżmy, że x może przybierać tylko wartości dodatnie, lub równe zeru, t. j.

$$x_i \geqslant 0\,; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n\,.$$

Załóżmy następnie, że nie wszystkie wartości x są sobie równe, czyli x nie jest wielkością stałą. W takim razie jedne wartości wielkości x muszą być mniejsze, a inne większe od jej nadziei matematycznej. Jeżeli bowiem przypuścimy, że wszystkie wartości wielkości x są tylko większe lub (niektóre z nich) równe jej wartości matematycznej $\boldsymbol{a}$, to gdy najmniejszą z nich oznaczymy przez α, jest

$$\alpha \geqslant a\,,$$

z drugiej zaś strony:

$$a = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i > \alpha \sum_{i=1}^{i=n} p_i > \alpha\,,$$

czyli α musiałoby jednocześnie być większe i mniejsze od a, co oczywiście być nie może.

Podobnie, gdyby wszystkie wartości wielkości x były tylko mniejsze lub (niektóre z nich) równe a, wówczas, oznaczywszy przez β największą z pośród rzeczonych wartości, mielibyśmy:

$$\beta \leqslant a$$

i z drugiej strony

$$a = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i < \beta \sum_{i=1}^{i=n} p_i < \beta\,,$$

t. j. β musiałoby jednocześnie być mniejsze i większe od a, co również miejsca mieć nie może.

Wiedząc to, nietrudno dowieść można, że jeżeli przez t oznaczymy jakąkolwiek liczbę, to prawdopodobieństwo, z jakiem wartość wielkości x jest mniejsza od at^2, jest większe od $1 - \frac{1}{t^2}$.

Niech wartościami wielkości x będą

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n,$$

z których $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ są mniejsze od at^2, a pozostałe wartości $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ są naturalnie większe, albo równe at^2. Mamy zatem:

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_k < at^2, \text{ oraz} \\ at^2 \leqslant x_{k+1} \leqslant x_{k+2} \leqslant \ldots \leqslant x_n. \end{cases}$$

Ponieważ, według założenia, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ są dodatnie (lub niektóre z nich, co najmniej równe zeru), zatem

$$a = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i > \sum_{i=k+1}^{i=n} x_i p_i,$$

gdy więc za $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ podstawimy at^2, otrzymamy, na podstawie (γ), tembardziej

$$a > at^2 \sum_{i=k+1}^{i=n} p_i,$$

czyli

$$p_{k+1} + p_{k+2} + \ldots + p_n < \frac{1}{t^2},$$

inaczej:

$$1 - (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k) < \frac{1}{t^2},$$

lub

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k > 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Lecz suma $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k$, większa od $1 - \frac{1}{t^2}$, wyraża prawdopodobieństwo, że wielkość x przybiera jednę z wartości

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, według ($\gamma$), mniejszą od at^2, o dowiedzenie czego właśnie chodziło.

Gdy $x < at^2$, $\sqrt{x}$ zawiera się w granicach $\pm t\sqrt{a}$, t.j. nierówności

$$(8) \qquad -t\sqrt{a} < \sqrt{x} < +t\sqrt{a}$$

zachodzą z prawdopodobieństwem większem od $1 - \frac{1}{t^2}$.

Jeżeli przez $x, y, z, \ldots$ oznaczymy szereg wielkości, mogących przybierać wartości dodatnie, przez $a, b, c, \ldots$ nadzieje matematyczne tych wielkości, przez $a_1, b_1, c_1, \ldots$ nadzieje matematyczne ich kwadratów, wreszcie przez t jakąkolwiek liczbę, to prawdopodobieństwo, że wartość sumy $x+y+z+\ldots$ zawiera się w granicach

$$(9) \qquad a+b+c+\ldots \pm t\sqrt{a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2+\ldots},$$

jest większe od $1-\frac{1}{t^2}$.

Istotnie, według (7):

$$\text{nadz. mat. } u = \text{nadz. mat. } [x - a + y - b + z - c + \ldots]^2$$
$$= a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots = A\,.$$

Wielkość u jako kwadrat, może przybierać tylko wartości dodatnie, skutkiem czego, według (8),

$$-t\sqrt{A} < \sqrt{u} < +t\sqrt{A}$$

z prawdopodobieństwem większem od $1 - \frac{1}{t^2}$.

Jeżeli jednak wartość wielomianu $\sqrt{u} = x-a+y-b+z-c+\ldots$ zawiera się w powyższych granicach, to wartość sumy $x+y+z+\ldots$ zawierać się musi, z tem samem prawdopodobieństwem, w granicach $a+b+c+\ldots \pm t\sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \ldots}$, jak to z góry zapowiedzieliśmy.

Wykonajmy pewien szereg doświadczeń, w których rezultatem pierwszego doświadczenia może być zdarzenie S z prawdopodobieństwem p_1, rezultatem drugiego może być zdarzenie S z prawdopodobieństwem p_2 i t. d.—rezultatem n-go doświadczenia może być zdarzenie

S z prawdopodobieństwem p_n. Po wykonaniu n takich doświadczeń zdarzenie S zaszło m razy. Dowiedziemy, że prawdopodobieństwo, z jakiem ułamek $\frac{m}{n}$, stanowiący stosunek liczby pojawień się zdarzenia S do liczby wszystkich wykonanych doświadczeń, zawiera się w granicach

$$\frac{p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n}{n} \mp \frac{t}{n}\sqrt{(p_1-p_1^2)+(p_2-p_2^2)+\ldots+(p_n-p_n^2)}, \tag{10}$$

jest większe od $1-\frac{1}{t^2}$, gdzie t wyobraża jakąkolwiek liczbę.

Niech będzie n wielkości $x, y, z, \ldots, w$ i niech x otrzymuje wartość $=1$, gdy podczas pierwszego doświadczenia zajdzie zdarzenie S, czego prawdopodobieństwo równa się p_1; wartość $=0$, jeżeli zdarzenie S nie zajdzie, czego znów prawdopodobieństwem jest $1-p_1$. Podobnie $y=1$, gdy podczas drugiego doświadczenia zajdzie zdarzenie S (prawdopodobieństwo $=p_2$); $y=0$, gdy zdarzenie S nie zajdzie (prawdopodobieństwo $=1-p_2$) i t. d. Wreszcie $w=1$, gdy podczas n-go doświadczenia zajdzie zdarzenie S (z prawd. $=p_n$); $w=0$, gdy zdarzenie S nie zajdzie (prawdop. $=1-p_n$).

Przy takich założeniach, po wykonaniu n doświadczeń, wartość sumy $x+y+z+\ldots+w$ okaże się równą m:

$$x+y+z+\ldots+w=m.$$

Z drugiej strony:

nadz. mat. $x=1\,.\,p_1+0\,.\,(1-p_1)=p_1$ oraz nadz. mat. $x^2=1^2.\,p_1+0^2.\,(1-p_1)=p_1$

nadz. mat. $y=1\,.\,p_2+0\,.\,(1-p_2)=p_2$ „ nadz. mat. $y^2=1^2.\,p_2+0^2.\,(1-p_2)=p_2$

nadz. mat. $z=1\,.\,p_3+0\,.\,(1-p_3)=p_3$ „ nadz. mat. $z^2=1^2.\,p_3+0^2.\,(1-p_3)=p_3$

. . . .

nadz. mat. $w=1\,.\,p_n+0\,.\,(1-p_n)=p_n$ „ nadz. mat. $w^2=1^2.\,p_n+0^2.\,(1-p_n)=p_n$

Wielomian, przy obecnych warunkach, przybiera postać

$$u=[x-p_1+y-p_2+z-p_3+\ldots+w-p_n]^2,$$

a jego nadzieja matematyczna równa się

$$A = p_1 - p_1^2 + p_2 - p_2^2 + p_3 - p_3^2 + \ldots + p_n - p_n^2 .$$

Skutkiem tego, na podstawie (9), wartość sumy $x+y+z+\ldots+w=m$ zawiera się w granicach:

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n \mp t\sqrt{p_1-p_1^2+p_2-p_2^2+p_3-p_3^2+\ldots+p_n-p_n^2}$$

z prawdopodobieństwem większem od $1-\frac{1}{t^2}$, t. j.

$$p_1+p_2+\ldots+p_n$$

$$+t\sqrt{p_1-p_1^2+p_2-p_2^2+\ldots+p_n-p_n^2} > m > p_1+p_2+\ldots+p_n$$

$$-t\sqrt{p_1-p_1^2+p_2-p_2^2+\ldots+p_n-p_n^2},$$

a tem samem, czego właśnie chcieliśmy dowieść,

$$\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}$$

$$+\frac{t}{n}\sqrt{p_1-p_1^2+p_2-p_2^2+\ldots+p_n-p_n^2} > \frac{m}{n} > \frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}$$

$$-\frac{t}{n}\sqrt{p_1-p_1^2+p_2-p_2^2+\ldots+p_n-p_n^2}.$$

Drugą część pierwszej i trzeciej strony ostatniej nierówności można napisać w postaci:

$$\frac{t}{n}\sqrt{p_1-p_1^2+p_2-p_2^2+p_3-p_3^2+\ldots+p_n-p_n^2}$$

$$=\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{p_1-p_1^2+p_2-p_2^2+p_3-p_3^2+\ldots+p_n-p_n^2}{n}},$$

ponieważ każda różnica $p_1-p_1^2=p_1(1-p_1)$, $p_2-p_2^2=p_2(1-p_2)$, $p_3-p_3^2=p_3(1-p_3)$, ..., $p_n-p_n^2=p_n(1-p_n)$ jest mniejsza od jedności, zatem ich suma jest mniejsza od n, czyli ułamek pod znakiem pierwiastku jest mniejszy od jedności, t. j.

$$\frac{p_1-p_1^2+p_2-p_2^2+p_3-p_3^2+\ldots+p_n-p_n^2}{n}<1,$$

jeżeli go oznaczymy przez Q_n, mamy:

$$(P)\qquad \frac{p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n}{n}+\frac{t}{\sqrt{n}}.\sqrt{Q_n}$$

$$>\frac{m}{n}>\frac{p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n}{n}-\frac{t}{\sqrt{n}}.\sqrt{Q_n}$$

z prawdopodobieństwem większem od $1-\frac{1}{t^2}$, gdzie $Q_n<1$.

Nadajmy liczbie t tak wielkie znaczenie, aby $\frac{1}{t^2}$ było dowolnie małą ilością, albo — co na jedno wychodzi — aby $1-\frac{1}{t^2}$ było tak blizkie jedności, jak się nam podoba. Wyznaczywszy t, uwzględnijmy tak wielką liczbę doświadczeń n, aby $\frac{t}{\sqrt{n}}$ stało się dowolnie małą ilością. Ponieważ $\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{Q_n}$ jest mniejsze od $\frac{t}{\sqrt{n}}$, przeto z wzoru (P) wynika, że przy dostatecznie wielkiem n, różnica pomiędzy $\frac{m}{n}$ i $\frac{p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n}{n}$, z prawdopodobieństwem dowolnie blizkiem pewności, jest mniejsza od dowolnie małej liczby $\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{Q_n}$. To znaczy:

Gdy pewne zdarzenie S zachodzi podczas pierwszego doświadczenia z prawdopodobieństwem p_1, podczas drugiego doświadczenia z prawdopodobieństwem p_2 i t. d. — podczas n-go doświadczenia z prawdopodobieństwem p_n, to przy wykonaniu dostatecznie wielkiej liczby n doświadczeń, z prawdopodobieństwem tak blizkiem jedności, jak się nam podoba, stosunek liczby powtórzeń się zdarzenia S do liczby wszystkich wykonanych doświadczeń różnić się będzie dowolnie mało od średnio arytmetycznej prawdopodobieństw, z jakiemi zdarzenie S zachodzi podczas każdego doświadczenia. Twierdzenie to stanowi właśnie t. zw. prawo wielkich liczb Poissona.

Jeżeli np. założymy $t=100$, stąd $\frac{1}{t^2}=0{,}0001$; $1-\frac{1}{t^2}=0{,}9999$, to aby $\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{Q_n}$ było mniejsze od 0,01, wystarczy założyć $\sqrt{n}=10000$, i w takim razie można się spodziewać, że z prawdopodobieństwem większem od 0,9999 stosunek $\frac{m}{n}$ będzie się różnił od $\frac{p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n}{n}$ mniej, niż o 0,01.

Jeżeli we wzorze (P) założymy $p_1=p_2=p_3=\ldots=p_n=p$, to

$$\frac{p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n}{n}=p, \quad \text{a} \quad Q_n=\frac{n(p-p^2)}{n}=p(1-p).$$

Wówczas, z prawdopodobieństwem większem od $1-\frac{1}{t^2}$, można się spodziewać, że:

$$\text{(B)} \qquad p+\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}>\frac{m}{n}>p-\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)},$$

stąd, jako szczególny przypadek twierdzenia Poissona, wypływa głośne w nauce twierdzenie Bernoulli'ego.

Można się spodziewać z prawdopodobieństwem tak blizkiem jedności, jak się nam podoba, że przy dostatecznie wielkiej liczbie doświadczeń, stosunek liczby pojawień się danego zdarzenia do liczby wszystkich wykonanych doświadczeń, będzie się dowolnie mało różnił od stałego prawdopodobieństwa, z jakiem to zdarzenie zachodzi.

W grze w orła i reszkę, orła wyrzucamy stale z prawdopodobieństwem $p=\frac{1}{2}$, stąd $1-p=0{,}5$; $\sqrt{p(1-p)}=0{,}5$. Jeżeli założymy

$t = 100$, czyli $\frac{1}{t^2} = 0{,}0001$, to aby $\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}$ było mniejsze od 0,01, wystarczy założyć $\sqrt{n} = 5000$ resp. $n = 25000000$. To znaczy, że stosunek liczby pojawień się orła do liczby wszystkich wykonanych partyj, z prawdopodobieństwem 0,9999, będzie się różnił mniej niż o 0,01 od $\frac{1}{2}$, czyli od stałego prawdopodobieństwa, z jakiem wyrzucamy orła. Albo inaczej, można postawić 1 przeciwko 9999, że podczas 25000000 partyj, orzeł pojawi się nie mniej, jak

$$\frac{25000000}{2} - \frac{25000000}{100} = 12500000 - 250000 = 12250000 \text{ razy},$$

ani więcej, jak $12500000 + 250000 = 12750000$ razy.

Stosując ściślejszą metodę liczenia, przekonamy się, że z prawdopodobieństwem 0,9999 zboczenie nie przejdzie 10000 (zamiast 250000), a stąd pokazuje się, jak bardzo z grubsza tylko przybliżone rezultaty otrzymać można z powyżej przytoczonego rozumowania.

Rozumowanie to dowodzi twierdzenia (przy nieograniczenie wielkiej liczbie zdarzeń), ale nie może być z dobrym skutkiem stosowane, gdy chodzi o wyznaczenie więcej lub mniej prawdopodobnego zboczenia przy ograniczonej liczbie zdarzeń [1]).

---

1) Już po oddaniu do druku niniejszej pracy, doszedł nas Rachunek prawdopodobieństwa samego p. A. A. Markowa (Petersburg 1900), w którym znajduje się to samo, w gruncie rzeczy, dowodzenie, jakie powyżej przytoczyliśmy, a które p. Sawicz zaczerpnął z kursu litografowanego tegoż autora.