O WARUNKACH DOSTATECZNYCH
W RACHUNKU WARYACYJNYM

napisał

W. F. Osgood[1]).

W czasie, gdy Weierstrass rozpoczynał swe badania nad Rachunkiem waryacyjnym, główne warunki konieczne były już powszechnie znane. Lagrange podał był równanie różniczkowe, któremu czynić musi zadość rozwiązanie zagadnienia, Jacobi zaś wyznaczył granice obszaru, na który można rozciągnąć całkę. Ale pytanie, czy funkcya, tak wyznaczona i ograniczona, nadaje istotnie całce wartość maximum albo minimum i czy prowadzi do rozwiązania zagadnienia, pytanie to nie było traktowane z równą dokładnością. Do tego to właśnie punktu teoryi Weierstrass skierował swe badania i rozwinął teoryę, ustanawiając warunki dostateczne, których wywód oparł na podstawach ścisłej analizy. Zadaniem tej rozprawy jest właśnie przedstawienie wyników badania Weierstrassa. Rozważymy tylko przypadek najprostszy i nie wprowadzimy przedstawienia zmiennych x i y przy pomocy parametru t. Pozwoli to nam wyłożyć treść zasadniczą pomysłów Weierstrassa z możliwą jasnością. Niedawno profesor Hilbert uprościł dowody warunków dostatecznych, podanych przez Weierstrassa; i te dowody dajemy w tej pracy.

Nie wymagamy od czytelnika żadnych uprzednich wiadomości z Rachunku waryacyjnego i żałujemy, że brak miejsca nie pozwala nam na obszerniejszy wykład zastosowań teoryi do przy-

---

[1]). Przekład z Annals of Mathematics (2) 2 № 3 kwiecień 1901 r., za łaskawem upoważnieniem Autora. S. D.

kładów. Czytelnik zechce sam zastosować wyłożone tu zasady do zagadnień klasycznych w tej gałęzi matematyki [1]).

1. **Pojęcia i definicye wstępne.** Najprostszem zagadnieniem Rachunku waryacyjnego jest następujące:

Wyznaczyć funkcyę y zmiennej niezależnej x taką, aby uczyniła całkę

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

maximum albo minimum.

Funkcya $F(x, y, p)$ wraz ze swemi pochodnemi cząstkowemi rzędu pierwszego i drugiego ma być funkcyą jednowartościową i ciągłą uważanych za niezależne zmiennych x, y, p w obszarze

$$R\colon\ A_1 < x < B_1,\ A_2 < y < B_2,\ A_3 < p < B_3,$$

gdzie $A_1 \leqslant x_0 < x_1 \leqslant B_1$ i gdzie niektóre lub wszystkie ilości $A_1, B_1, \ldots, B_3$ mogą być nieskończone. Granice całki x_0, x_1 niechaj na razie będą stałemi, a więc i wartości funkcyi y_0, y_1 dla tych wartości x także stałemi.

Warunki A. Funkcye $y(x)$, poddane tu rozważaniu, mają czynić zadość następującym warunkom, które nazywać będziemy warunkami A.

---

[1]) Porówn. np. Todhundtera „Integral Calculus“, Chap. 15 albo inne dawniejsze traktaty: Jelletta „Calculus of Variations“; Lindelöf-Moigno „Calcul des variations“; Carll „Calculus of Variations“. Wykład systematyczny Rachunku waryacyjnego z nowego punktu widzenia, objaśniony licznemi zastosowaniami teoryi do zagadnień klasycznych, obejmuje świeżo wydane dzieło Knesera „Lehrbuch der Variationsrechnung“, Brunświk 1900. Jest to dzieło niepospolitej wartości uaukowej, ale pod względem stylu nie wszędzie jest takiem, jakby pragnąć można; mamy nadzieję, że ten artykuł ułatwi czytanie tego ważnego dzieła tym, którzy nie pracowali dotąd nad tą gałęzią matematyki nowoczesnej. Rozdział 3-ci dzieła Knesera zawiera przykłady, które należy przestudyować łącznie z tym artykułem; rozdziały zaś 4 i 5 stanowią jakby bezpośredni ciąg jego dalszy.

1) $y(x)$ jest funkcyą jednowartościową ciągłą zmiennej x w przedziale $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$;
2) $y(x)$ ma pochodną y' w każdym punkcie przedziału $x_0 < x < x_1$, i nadto $\cdot y'(x)$ jest funkcyą skończoną i ciągłą zmiennej x w tym przedziale;
3) $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, gdzie y_0, y_1 są stałemi w zagadnieniu;
4) punkt (x, y, y') znajduje się w obszarze R.

Ograniczymy się do przypadku, w którym całka I ma być minimum. Nie zmniejsza to zasadniczo ogólności, gdyż warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby I było maximum, jest, by $-I$ było minimum.

Definicya waryacyj mocnych i słabych. Niechaj $y(x)$ będzie funkcyą zmiennej x, czyniącą zadość warunkom A. Rozważmy pasmo S przy krzywej y, ograniczone krzywemi $y = y(x) + \varepsilon$, $y = y(x) - \varepsilon$ i prostemi $x = x_0$, $x = x_1$; ε jest stałą dodatnią dowolnie małą. Niech $Y(x)$ będzie inną funkcyą zmiennej x, czyniącą również zadość warunkom A, i niechaj krzywa $y = Y(x)$ leży całkowicie w pasmie S. Połóżmy:

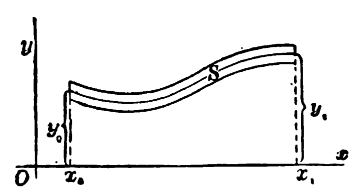

Fig. 1.

$$Y(x) = y(x) + \eta(x).$$

Funkcya $\eta(x)$, tak określona, nazywa się waryacyą (przemiennością) funkcyi y i oznacza się zwykle przez δy; krzywa $y = Y(x)$ jest krzywą, otrzymaną po uskutecznieniu waryacyi (krzywa przemieniona). Funkcya $\eta(x)$ czyni zadość punktom (1) i (2) warunków A i jest: $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Nadto:

$$|\eta(x)| < \varepsilon \quad , \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1 ,$$

gdzie $|\eta(x)|$ jest wartością bezwzględną (liczbową) funkcyi $\eta(x)$. Nie wynika stąd wszakże, że i wartość pochodnej $\eta'(x)$ jest również liczbowo małą we wszystkich punktach przedziału. Specyalną klasę waryacyj, dla których ten właśnie przypadek zachodzi, a mianowicie przypadek, w którym

$$|\eta'(x)| < \varepsilon \quad , \quad x_0 < x < x_1 ,$$

nazywamy w a r y a c y a m i s ł a b e m i (fig. 2); waryacye ogólne (z włączeniem poprzednich) nazywamy w a r y a c y a m i m o c n e m i [1]) (fig. 3).

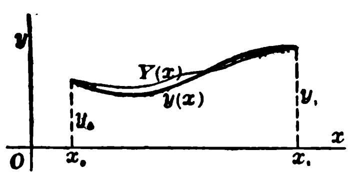

Fig. 2.

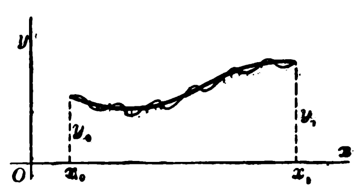

Fig. 3.

Przez s ą s i e d z t w o krzywej $y = y(x)$ rozumiemy wnętrze pasma S wraz z końcami krzywej [2]).

D e f i n i c y a w a r t o ś c i m i n i m u m. Mówimy, że funkcya $y(x)$ zamienia całkę I na minimum, gdy wartość całki, którą otrzymujemy, wstawiając jakąkolwiek krzywę przemienioną $Y(x) = y(x) + \eta(x)$, jest większa od wartości, otrzymanej przy wstawieniu funkcyi $y(x)$. Napisawszy:

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, Y, Y')\, dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx ,$$

widzimy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym dla minimum jest, by było $\Delta I > 0$ dla wszystkich funkcyj $Y(x)$ różnych od y.

---

[1]) Jest to klasa waryacyj inna niż ta, którą K n e s e r nazywa „s t a r k e V a r i a t i o n e n" z pewnego punktu widzenia ogólniejsza niż powyższa; z innego zaś punktu widzenia nie ma to miejsca.

[2]) W przypadku, gdy uważamy tylko waryacye słabe, a ten nie odnosi się do naszej rozprawy—definicyę należy zmienić w ten sposób, że uważamy tylko takie punkty pasma S (blizkie końców), które mogą być objęte różnemi krzywemi przemienionemi, wprowadzonemi do badania.

Minimum to nazywa się mocnem albo słabem, stosownie do tego, czy rozważamy waryacye mocne albo tylko słabe.

Warunki konieczne dla minimum. Równanie Lagrange'a. Pierwszy warunek konieczny dla minimum otrzymujemy w sposób następujący: Niech $y(x)$ będzie funkcyą zmiennej x, czyniącą zadość warunkom A i nadającą całce I wartość minimum, i niechaj $\eta(x)$ będzie waryacyą funkcyi y, nie równą tożsamościowo zeru. Funkcya $a\eta$, gdzie a jest parametrem niezależnym od x i $-1 \leqslant a \leqslant 1$, jest także waryacyą. Rozpatrzmy następującą funkcyę parametru a:

$$\Delta I = f(a) = \int_{x_0}^{x_1} \{F(x, y+a\eta, y'+a\eta') - F(x, y, y')\}\, dx .$$

Jest to funkcya jednowartościowa i ciągła zmiennej a, mająca pochodne we wszystkich punktach przedziału $-1 \leqslant a \leqslant 1$; jest [1]):

$$f'(a) = \int_{x_0}^{x_1} \{\eta F_y(x, y+a\eta, y'+a\eta') + \eta' F_{y'}(x, y+a\eta, y'+a\eta')\}\, dx ,$$

gdzie $F_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ i t. d. Dalej jest: $f(a) > 0$, gdy $a \neq 0$, skoro ΔI jest dodatnie; $f(0)=0$. Stąd: $f(a)$ ma wartość minimum, gdy $a=0$; $f'(0) = 0$. Mamy zatem twierdzenie:

Warunkiem koniecznym dla minimum jest, aby było

$$\int_{x_0}^{x_1} (\eta F_y + \eta' F_{y'})\, dx = 0 \tag{1}$$

dla wszystkich waryacyj η.

---

[1]) Dowód ścisły, że funkcya $f(x)$ ma pochodne i że pochodną jej otrzymujemy, biorąc pochodną funkcyi podcałkowej, znaleść można np. w „Traité d'Analyse" Picarda, t. I, str. 29.

Całka, znajdująca się po stronie lewej równania (1), nazywa się w a r y a c y ą p i e r w s z ą całki I i oznacza się przez δI.

Z tego warunku wynika, że w każdym punkcie krzywej y, w którym:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0,$$

funkcya y ma pochodną drugą [1], oraz że funkcya y czyni zadość r ó w n a n i u L a g r a n g e'a [2]:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_y - \dfrac{dF_{y'}}{dx} = 0 \\ \text{lub} \\ y'' = \dfrac{F_y - F_{xy'} - y' F_{yy'}}{F_{y'y'}}. \end{array} \right.$$

D e f i n i c y a k r z y w e j k r a ń c o w e j (ekstremalnej). Każda funkcya y zmiennej x lub krzywa, taką funkcyę przedstawiająca, która we wszystkich punktach wewnętrznych przedziału (x', x''), w którym ją rozważamy, czyni zadość równaniu (2) L a g r a n g e'a, nazywa się k r a ń c o w ą (ekstremalną) [3]. Układ wartości x, y, y', tu występujących, należeć musi oczywiście do punktów obszaru R. W tej rozprawie ograniczymy się do przypadku, w którym funkcya $F_{y'y'}(x, y, p)$ nie znika w obszarze R. Przypadek ten obejmuje prawie wszystkie zagadnienia, zachodzące w praktyce.

P r z y k ł a d [4]. Teoryę, podaną w tej rozprawie, wyjaśnimy na następującem zagadnieniu.

P o ł ą c z y ć d w a p u n k t y (x_0, y_0) i (x_1, y_1) n a g ó r n e j p ó ł p ł a s z c z y z n i e (t. j. p u n k t y, d l a k t ó r y c h $y_0 > 0$, $y_1 > 0$) k r z y w ą t a k ą, a b y c a ł k a

---

[1] Dowód tych twierdzeń znaleść można w rozprawie p. W h i t t e m o r e'a, Annals of Math. (2) 2 kwiecień 1901.

[2] K n e s e r. Lehrbuch der Variationsrechnung, str. 24.

[3] Równanie to otrzymał pierwszy E u l e r. Porówn. L a g r a n g e Oeuvres. Vol. 10, p. 39.

[4] Dalszy ciąg tego przykładu w §§ 2 i 3.

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\, dx,$$

wzięta wzdłuż tej krzywej, była minimum[1]).

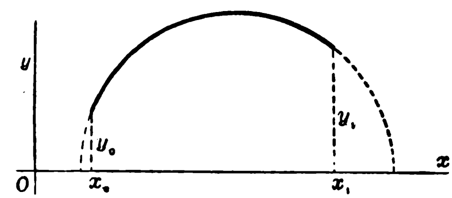

Fig. 4.

Jest tu:

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}, \quad F_{y'} = \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}, \quad F_{y'y'} = \frac{1}{y(\sqrt{1+y'^2})^3}.$$

Ponieważ funkcya F nie zawiera zmiennej x wyraźnie, to całkę pierwszą równania Lagrange'a (2) daje wzór[2]):

---

[1]) Interpretacya fizykalna tej całki jest następująca: Górną połowę płaszczyzny uważajmy za ośrodek, w którym opór, przeciwstawiający się ruchowi punktu materyalnego, mierzy się wielkością $\frac{1}{y}$; wtedy całka przedstawia pracę oporu w ruchu punktu materyalnego od punktu (x_0, y_0) do punktu (x_1, y_1); zagadnienie ma wyznaczyć drogę, wzdłuż której ta praca jest minimum.

Ta całka napotyka się i w geometryi nieeuklidesowej, w której zachowano euklidesowy pomiar kątów, a długość określono za pomocą tej właśnie całki: liniami krańcowemi są w tym przypadku linie proste. Jest to jedna z geometryj nieeuklidesowych, odgrywających rolę w zjednokształceniu funkcyj algebraicznych przy pomocy funkcyj automorficznych metodą elementu liniowego. Porówn. Klein: „Lineare Differentialgleichungen". Getynga 1894, str. 125 i odczyty (nielitografowane) o funkcyach automorficznych (1899, półrocze letnie).

[2]) Widać odrazu prawdziwość tego twierdzenia, gdyż w tym przypadku:

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = y'\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right).$$

$$F - y'F_{y'} = b^{-1} \text{ (stała)}$$

lub:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = b^{-1},$$

$$y\sqrt{1+y'^2} = b, \quad y'^2 = \frac{b^2-y^2}{y^2},$$

$$\pm\frac{ydy}{\sqrt{b^2-y^2}} = dx,$$

$$(x-a)^2 + y^2 = b^2.$$

A więc krzywemi krańcowemi są półokręgi, dające się nakreślić na górnej półpłaszczyźnie ze środków, znajdujących się na osi x. Krańcowemi, które przechodzą przez punkt (x_0, y_0), są te, dla których wielkości a i b łączy związek:

$$(x_0-a_0)^2 + y_0^2 = b_0^2,$$

i są dane przez równanie:

$$y = \sqrt{r_0^2 + 2a_0(x-x_0) - x^2}, \tag{3}$$

gdzie $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ jest kwadratem odległości punktu (x_0, y_0) od początku; y przechodzi przez drugi punkt (x_1, y_1), gdy [1])

$$a_0 = \frac{r_1^2 - r_0^2}{2(x_1-x_0)}.$$

Z m i e n n e g r a n i c e c a ł k o w a n i a. Wyżej zakładaliśmy, że punkty (x_0, y_0), (x_1, y_1) t. j. granice całki są s t a ł e m i. Jeżeli te punkty zmieniają się, to dalsze warunki konieczne dla minimum łatwo już otrzymać można. Przyjmijmy np., że punkty te mają znajdować

[1]) Wyłączamy tu przypadek $x_1 = x_0$. Można tu okazać bezpośrednio, przyjmując y za zmienną niezależną; pozostawiamy to czytelnikowi.

się odpowiednio na dwóch krzywych ciągłych Γ_0, Γ_1 o stycznych, zmieniających się sposobem ciągłym. Niechaj funkcye y, dla których wyznaczamy wartość całki I, czynią zadość warunkom A z tą różnicą, że punkty (x_0, y_0), (x_1, y_1) mają być punktami krzywych Γ_0, Γ_1. Może być dogodnem przyjęcie, że krzywa y przecina krzywe Γ_0, Γ_1 tylko w ich końcach. Pasmo S przy krzywej y możemy określić, według Knesera, jako część płaszczyzny x, y, wyciętą przez małą tarczę kołową o promieniu stałym ϱ, której środek opisuje krzywą y, albo jako część takiego pasma, leżącego pomiędzy krzywemi Γ_0, Γ_1 (fig. 5). Waryacyę $\eta(x)$ funkcyi $y(x)$ określamy w sposób następujący: Rozważmy krzywą przemienioną, t. j. krzywą $Y(x)$, czyniącą zadość warunkom A i leżącą całkowicie w pasmie S. Niechaj jej końcami będą punkty (x'_0, y'_0), (x'_1, y'_1). Przedział $x'_0 \leqslant x' \leqslant x'_1$ przekształcamy jednoznacznie i sposobem ciągłym na przedział $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, najprościej za pomocą przekształcenia liniowego:

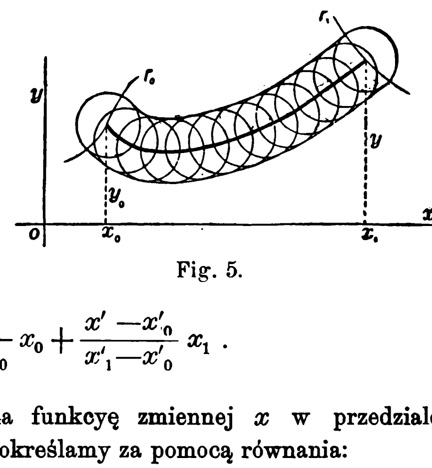

Fig. 5.

$$x = \frac{x'_1 - x'}{x'_1 - x'_0}\, x_0 + \frac{x' - x'_0}{x'_1 - x'_0}\, x_1 \,.$$

Funkcya $Y(x')$ przechodzi na funkcyę zmiennej x w przedziale $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$; waryacyę $\eta(x)$ określamy za pomocą równania:

$$Y(x') = y(x) + \eta(x)\,.$$

Aby otrzymać warunki konieczne w tym przypadku, przyjmijmy, że funkcya y z końcami w punktach (x_0, y_0), (x_1, y_1) zamienia całkę I na minimum i że y przemienia się najprzód na krzywe Y, mające te same końce. Można wtedy okazać, jak poprzednio, że funkcya y czyni zadość równaniu Lagrange'a.

Dajmy, że warunek ten jest spełniony. Rozważmy punkt zmienny (x'_0, y'_0) krzywej Y_0 i oznaczmy długość łuku krzywej Γ_0 od (x_0, y_0) do (x'_0, y'_0) przez a. Niechaj $y = Y(x', a)$ będzie równaniem jednoparametrowej rodziny krzywych przemienionych, łączących punkt

(x'_0, y'_0), z punktem (x_1, y_1), który niech będzie stałym, i niechaj funkcya $Y(x', a)$ czyni zadość warunkom [1]:

1) Funkcya $Y(x', a)$ oraz jej pochodne cząstkowe $Y_{x'} = Y'$, Y_a, $Y_{x'a} = Y'_a$ są funkcyami ciągłemi zmiennych x', a w obszarze $-a_0 \leqslant a \leqslant a_0$, $x'_0 \leqslant x' \leqslant x_1$;
2) $Y(x', 0) = y(x)$.

Utwórzmy funkcyę:

$$\Delta I = f_1(a) = \int\limits_{x'_0}^{x_1} F(x', Y, Y')\,dx' - \int\limits_{x'_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

Funkcya ta ma te same własności, co poprzednio funkcya $f(a)$, mianowicie: jest dodatnia, gdy $a \neq 0$, znika dla $a = 0$ i ma pochodną. Wynika stąd, że $f'_1(0) = 0$. Napiszmy jej pochodną:

$$f'_1(a) = \int\limits_{x'_0}^{x_1} \{F_y Y_a + F_{y'} Y'_a\}\,dx' - F(x', Y, Y')\Big|_{x'=x'_0} \frac{d x'_0}{da}$$

Wzór ten można przekształcić przy pomocy całkowania przez części. Zauważmy, że $Y_a(x_1, a) = 0$ dla wszystkich wartości a:

$$\int\limits_{x'_0}^{x_1} F_{y'} Y'_a\,dx' = F_{y'} Y_a \Big|_{x'_0}^{x_1} - \int\limits_{x'_0}^{x_1} Y_a \frac{d}{dx'} F_{y'}\,dx',$$

$$f'_1(a) = -\left[F_{y'}(x', Y, Y')\,Y_a + F(x', Y, Y')\frac{dx'_0}{da}\right]_{x'=x'_0}$$

$$+\int\limits_{x'_0}^{x_1} \left\{F_y(x', Y, Y') - \frac{d}{dx'} F_{y'}(x', Y, Y')\right\} Y_a\,dx'.$$

---

[1]) Nie trudno okazać czysto-geometrycznie, że te warunki mogą być wszystkie spełnione. Kneser (l. c., str. 31) podaje prosty sposób tworzenia wyrażenia wyraźnego na funkcye $Y(x', a)$, lecz nie uwidocznia, że ta krzywa przecina krzywę Γ_0 w jednym tylko punkcie (x'_0, y'_0).

Gdy $a = 0$, jest $Y = y$ i funkcya podcałkowa w tym wzórze znika tożsamościowo z przyczyny równania (2). Oznaczmy przez ω_0 kąt, jaki styczna do krzywej Γ_0 w punkcie (x_0, y_0) tworzy w kierunku rosnącego łuku a z osią x. Wtedy ponieważ

$$\frac{d\,Y(x'_0, a)}{da} = Y'(x'_0, a)\frac{dx'}{da} + Y_a(x'_0, a)$$

i

$$\left.\frac{dx'_0}{da}\right|_{a=0} = \cos\omega_0\,, \quad \left.\frac{d\,Y(x', a)}{da}\right|_{a=0} = \sin\omega_0\,,$$

będzie:

$$Y_a(x_0, 0) = \sin\omega_0 - y'_0\cos\omega_0\,.$$

Warunek $f'_0(0) = 0$ prowadzi do następującego rezultatu: Dalszym warunkiem koniecznym w przypadku zmiennych granic całkowania jest:

$$\begin{aligned}[F(x_0, y_0, y'_0) - y'_0\, F_{y'}(x_0, y_0, y'_0)]\cos\omega_0 \\ + F_{y'}(x_0, y_0, y'_0)\sin\omega_0 = 0\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Podobny wzór stosuje się do punktu (x_1, y_1) i otrzymuje się, zastępując znaczki 0 znaczkiem 1. Dwa te wzory wystarczają zwykle do wyznaczenia krańcowej.

Gdy krańcowa y jest przecięta przez krzywą Γ_0 pod takim kątem, iż staje się zadość równaniu (4), wtedy y nazywamy krzywą poprzeczną dla krzywej Γ_0 (Kneser).

2. **Pojęcie pola krzywej krańcowej** C. Jeżeli istnieje funkcya y, dla której całka I jest minimum, wtedy musi być możliwem przedewszystkiem połączenie punktów A i B (t. j. punktów (x_0, y_0) i (x_1, y_1)) linią krańcową C. Załóżmy, że warunek ten jest spełniony. Ma to miejsce zawsze, gdy równanie Lagrange'a (2), które jest równaniem rzędu 2-go, posiada w przedziale $x_0 \leqq x \leqq x_1$ rozwiązanie $g(x, a, b)$, zależące w ten sposób od dwóch stałych dowolnych a, b, że równania

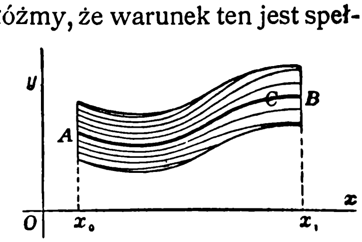

Fig. 6.

$$y_0 = g(x_0, a, b)\,,\quad y_1 = g(x_1, a, b)$$

dają się rozwiązać względem a i b.

Przyjmijmy powtóre, że istnieje rodzina jednoparametrowa krańcowych $y = \varphi(x, \gamma)$ — taka, iż jedna z tych krzywych $y = \varphi(x, \gamma_0)$ zlewa się z krzywą C — rozciągająca się w sąsiedztwie tej krzywej, i nadto, że odległość pomiędzy dwiema sąsiedniemi krańcowemi tej rodziny, mierzona wzdłuż równoległej do osi y, jest nieskończenie małą jednego i tego samego rzędu wzdłuż całego przedziału (x_0, x_1). Dokładniej mówiąc, przyjmujemy [1]):

1) że istnieje funkcya $\varphi(x, \gamma)$, która wraz ze swemi pochodnemi cząstkowemi $\varphi_x = \varphi'$, φ_γ, $\varphi_{x\gamma} = \varphi'_\gamma$ jest funkcyą ciągłą dwóch zmiennych niezależnych x, γ w obszarze

$$T:\quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1\,,\quad \gamma_0 - \varkappa \leqslant \gamma < \gamma_0 + \varkappa\,,$$

gdzie $\varkappa$ jest odpowiednio dobraną stałą dodatnią; dla wartości stałej parametru γ funkcya $\varphi(x, \gamma)$ jest krańcową, która dla specyalnej wartości $\gamma = \gamma_0$ zlewa się z krzywą C;

2) że $\varphi_\gamma(x, \gamma_0) \neq 0$, gdy $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$.

Z założeń (1), (2) wynika, co teraz okażemy, że przez każdy punkt odpowiednio wybranego sąsiedztwa S krzywej C przechodzi jedna i tylko jedna krańcowa $\varphi(x, \gamma)$ i że $\varphi_\gamma(x, \gamma)$ nie znika w żadnym punkcie pasma S. Stąd krańcowe $\varphi(x, \gamma)$ należące do obszaru T, wypełniają, gdy $\varkappa$ jest dostatecznie małe, obszar dwuwymiarowy S', w którym znajduje się krańcowa C. Rysunek przecięcia poprzecznego warstw formacyi geologicznej może tu być poży-

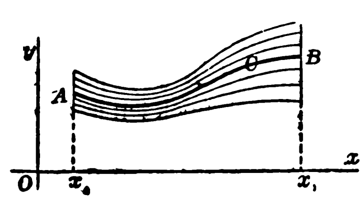

Fig. 7.

---

1) Obszerniejszą definicyę pola podajemy w pracy: „On the existence of a minimum“ (Trans. Amer. Math. Soc. 2. 1901).

teczny jako obraz; w przypadku zaś dwóch zmiennych niezależnych [1]) (I jest całką podwójną, a krańcowe $\varphi(x, y, \gamma)$ stanowią rodzinę powierzchni) pojęcie samych warstw służy do ilustracyi związków, o których mowa.

Dowód. Podamy najprzód dowodzenie nie dla sąsiedztwa S krzywej C, lecz dla sąsiedztwa dowolnego punktu (x', y') krzywej C. Ponieważ $\varphi_\gamma(x, \gamma)$ jest funkcyą ciągłą i nie znika w punkcie (x', γ_0), istnieje zatem pewne sąsiedztwo

$$|x - x'| < h', \quad |\gamma - \gamma_0| < \varkappa'$$

tego punktu, gdzie $\varphi_\gamma(x, \gamma) \neq 0$. Równanie

$$y = \varphi_\gamma(x, \gamma)$$

można rozwiązać względem γ w funkcyi dwóch zmiennych niezależnych x, y w sąsiedztwie $(x - x') < h'$, $(y - y') < h'$ punktu (x', y'). Wynika to z zasadniczego twierdzenia o istnieniu funkcyj uwikłanych [2]), które w przypadku niniejszym może być wyrażone w sposób następujący:

Niechaj $\Phi(x, y, \gamma)$ będzie funkcyą trzech zmiennych niezależnych x, y, γ, ciągłą w sąsiedztwie D punktu (x', y', γ_0). gdzie

$$\Phi(x', y', \gamma_0) = 0;$$

niechaj istnieją pierwsze pochodne cząstkowe funkcyi Φ w każdym punkcie sąsiedztwa D, niechaj one będą ciągłemi i niech:

$$\Phi_\gamma(x', y', \gamma_0) \neq 0;$$

---

[1]) Porówn. Schwarz. „Ueber ein die Flächen kleinsten Inhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung“ 1885. (Werke I, p. 224), gdzie pojęcie pola, będące podstawą, na której Weierstrass buduje swe warunki dostateczne dla minimum, jest wyłożone z zadziwiającą jasnością.

[2]) Twierdzenie to i dowód jego podał pierwszy Dini w swoich wykładach uniwersyteckich w Pizie (Analisi infinitesimale, 2 tomy 1877—78 litografowane, t. I); drukiem ogłoszone w Peano-Genocchi „Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale“. Turyn 1884, § 110, pojawiło się następnie w Jordana „Cours d'Analyse“, wyd. 2-gie t. I. 1893, § 91.

wtedy dla każdego punktu (x, y) sąsiedztwa d punktu (x', y') równanie

$$\Phi(x, y, \gamma) = 0$$

ma jeden i tylko jeden pierwiastek γ, leżący w sąsiedztwie punktu $\gamma = \gamma_0$ i określa γ jako funkcyę jednowartościową zmiennych x, y:

$$\gamma = \psi(x, y).$$

Funkcya $\psi(x,y)$ jest ciągłą w całem sąsiedztwie d i ma w niem pierwsze pochodne ciągłe, dane przez zwykłe wzory na różniczkowanie funkcyj uwikłanych:

$$\Phi_x + \Phi_\gamma \frac{\partial\gamma}{\partial x} = 0, \quad \Phi_y + \Phi_\gamma \frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0.$$

W przypadku obecnym dość położyć:

$$\Phi(x, y, \gamma) = \varphi(x, \gamma) - y.$$

Wtedy $\Phi_\gamma(x, y, \gamma) = \varphi_\gamma(x, \gamma)$; równanie $y = \varphi(x, \gamma)$ ma jedno określone rozwiązanie $\gamma = \psi(x, y)$ i dowód jest zupełny dla sąsiedztwa $|x - x'| < h'$, $y - y'| < h'$, $|\gamma - \gamma_0| < \varkappa'$ punktu (x', y', γ_0).

Wielkości h', $\varkappa'$ są w ogóle różne dla różnych punktów krzywej C; lecz jeżeli wybierzemy je odpowiednio dla każdego punktu (x', y'), wtedy niższa ich granica, gdy (x', y') opisuje krzywą C, jest wielkością dodatnią, jak to można okazać przy pomocy znanych metod rozumowania w Analizie wyższej. Tym sposobem dowód jest zupełny.

Przykład. Rozpatrzymy przykład § 1. Krańcowa C jest półokręgiem o promieniu b_0 ze środkiem na osi x w punkcie $x = a_0$. Pole krzywej C można utworzyć nieskończenie wieloma sposobami. Można przyjąć za rodzinę krańcowych rodzinę półokręgów spółśrodkowych i położyć:

$$\varphi(x, \gamma) = \sqrt{\gamma^2 - (x - a_0)^2}, \quad 0 < \gamma < \infty. \tag{5}$$

Tu $\gamma_0 = b_0$. Niechaj teraz (x'_0, y'_0), będzie punktem dowolnym krańcowej C, rozciągającej w przedziale $x < x_0$, tak że $a_0 \rightarrow b_0 \nearrow x'_0 < x_0$ (fig. 8). Pole tworzy się z półokręgów, przechodzących przez punkt (x'_0, y'_0) ze środkami na osi x, i jest:

$$(6) \quad \varphi(x, \gamma) = \sqrt{r'^2_0 + 2\gamma(x - x') - x^2}, \quad -\infty < \gamma < +\infty,$$

gdzie:

$$r'^2_0 = x'^2_0 + y'^2_0. \quad \text{Tu} \quad \gamma_0 = a_0.$$

3. **Warunki dostateczne Weierstrassa dla minimum; funkcye $\mathcal{E}$.** By stwierdzić istnienie minimum, Weierstrass daje dowód bezpośredni na to, że gdy pole krzywej C istnieje w znaczeniu, podanem w § 2, i spełniają się pewne dalsze warunki, wtedy całka I, wzięta wzdłuż krańcowej C ma wartość J mniejszą od wszelkiej innej wartości $\overline{J}$, jaką przybiera na innej krzywej $\overline{C}$, odpowiadającej funkcyi $Y(x)$ (§ 1), nie identycznej z funkcyą $y(x)$.

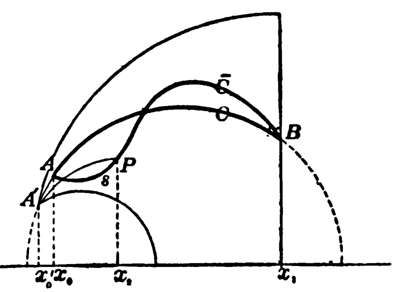

Fig. 8.

Załóżmy, że pole takie istnieje i dla prostoty, że wszystkie krańcowe $\varphi(x, \gamma)$ przechodzą przez punkt $A'(x'_0, y'_0)$, krańcowej C, gdzie $x'_0 < x_0$ leży dowolnie blizko punktu x_0 [1]). Niechaj $P(x_2, y_2)$ będzie punktem krzywej $\overline{C}$, s długością łuku AP na tej krzywej. Oznaczmy całkowitą długość krzywej $\overline{C}$ przez l. Nakreślmy krańcową $y = \varphi(x, \gamma_2)$, łączącą punkty A' i P i rozpatrzmy całki:

---

[1]) Weierstrass rozważał w swych wykładach przypadek pola, w którem krańcowe $\varphi(x, \gamma)$ przechodzą wszystkie przez punkt (x_0, y_0). Pojęcie punktu pomocniczego (x'_0, y'_0) zawdzięczamy Kneserowi (l. c., str. 59), daje to uproszczenie szczegółów dowodu Weierstrassa bez zmiany ich istoty.

$$I_{02} = \int_{x'_0}^{x_2} F(x, y, y')\, dx\,, \quad \text{wziętą wzdłuż } y = \varphi(x, \gamma_2)\,,$$

$$\overline{I}_{21} = \int_{x_2}^{x_1} F(x, Y, Y')\, dx\,, \quad \text{wziętą wzdłuż } \overline{C}.$$

Suma tych całek jest funkcyą wielkości s. Oznaczmy ją przez $f(s)$; będzie:

$$f(s) = I_{02} + \overline{I}_{21}\,.$$

Zauważmy, że $f(l) = I' + J$ jest wartością całki I, wziętej wzdłuż C od (x'_0, y'_0) do (x_1, y_1), $f(0) = I' + \overline{J}$ wartością całki I wzdłuż C od (x'_0, y'_0) do (x_0, y_0) i wzdłuż $\overline{C}$ od (x_0, y_0) do (x_1, y_1), tak, że

$$f(l) - f(0) = -(\overline{J} - J)\,.$$

Twierdzenie pomocnicze. Funkcya $f(s)$ jest funkcyą ciągłą zmiennej s w przedziale $0 \leqslant s \leqslant l$, ma tu pochodną, która nigdzie nie jest dodatnią, a jest ujemną, jeżeli tylko funkcya $F_{y'y'}(x, y, p)$ jest dodatnią w każdym punkcie (x, y) krzywej C, gdzie trzeciemu argumentowi p można nadawać wartość dowolną.

Z tego twierdzenia wynika, że funkcya $f(s)$ jest funkcyą monotoniczną, malejącą wciąż w przedziale $0 \leqslant s \leqslant l$, a stąd:

$$f(l) < f(0)\,, \quad \text{t. j. } J < \overline{J}\,.$$

Warunki poprzedzające są zatem warunkami dostatecznemi istnienia minimum.

Dowód twierdzenia pomocniczego [1]. Najprzód jest jasnem, że:

---

[1]) Weierstrass otrzymuje pochodną $f'(s)$, wyrażając bezpośrednio przyrost nieskończonostkowy funkcyi przez nieskończenie mały przyrost wielkości s i wyznaczając granicę stosunku. Proces analityczny jest dłuższy, gdy parametryczne przedstawienie Weierstrassa zmiennych x, y przez t zastąpiono tu formą niesymetryczną, co zdaje się stanowi istotną dogodność.

$$\frac{d\bar{I}_{21}}{ds} = -F(x_2, y_2, M)\frac{dx_2}{ds} = -\cos\alpha F(x_2, y_2, M),$$

gdzie M wyraża nachylenie krzywej $\bar{C}$ w punkcie P i gdzie $\alpha = \operatorname{arc\,tg} M, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Całkę I_{02} można uważać za funkcyę zmiennych x_2, γ, z których znów każda jest funkcyą wielkości s. Stąd:

$$\frac{dI_{02}}{ds} = \frac{\partial I_{02}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial I_{02}}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{ds},$$

$$\frac{\partial I_{02}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} = \cos\alpha\ F(x_2, y_2, m),$$

gdzie m jest nachyleniem krzywej C w punkcie P.

Pochodną $\frac{\partial I_{02}}{\partial \gamma}$ można otrzymać, różniczkując pod znakiem całki [1]):

$$\frac{\partial I_{03}}{\partial \gamma} = \int_{x'_0}^{x_2} (F_y \varphi_\gamma + F_{y'} \varphi'_\gamma)\, dx;$$

ta całka może być przekształcona przez zastosowanie metody całkowania przez części, podobnie jak w § 1; otrzymujemy w ten sposób:

$$\frac{\partial I_{02}}{\partial \gamma} = F_{y'}(x_2, y_2, m)\,\varphi_\gamma(x_2, \gamma_2) + \int_{x'_0}^{x_2} (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\varphi_\gamma dx.$$

Całka po stronie prawej znika, gdyż funkcya y czyni zadość równaniu Lagrange'a (2).

Obliczając pochodną $\frac{d\gamma}{ds}$, zauważyć należy, że równanie $y = \varphi(x, \gamma)$, rozwiązane względem γ, daje (por. § 1) $\gamma = \psi(x, y)$, stąd pochodne cząstkowe ψ_x, ψ_y wyrażają się wzorami:

---

1) Picard l. c. Różniczkowanie całki I_{02} można wykonać za pomocą wzoru podanego u Picarda na str. 31.

$$\psi_x = -\frac{\varphi'}{\varphi_\gamma}, \quad \psi_y = \frac{1}{\varphi_\gamma}.$$

Jeżeli X, Y są spółrzędnemi punktu zmiennego krzywej $\overline{C}$,

$$\gamma_2 = \psi(X, Y)$$

i

$$\frac{d\gamma_2}{ds} = \psi_x(X, Y)\cos\alpha + \psi_y(X, Y)\sin\alpha$$

$$= \frac{-\varphi'(x_2, \gamma_2)\cos\alpha + \sin\alpha}{\varphi_\gamma(x_2, y_2)} = \cos\alpha\frac{M-m}{\varphi_\gamma(x_2, \gamma_2)}.$$

Zbierając te wyniki, otrzymujemy wzory następujące:

$$\frac{dI_{02}}{ds} = \cos\alpha\,[F(x_2, y_2, m) + (M-m)\,F_{y'}(x_2, y_2, m)]$$

$$f'(s) = -\mathfrak{E},$$

gdzie:

$$\mathfrak{E} = \cos\alpha\,\{F(x_2, y_2, M) - F(x_2, y_2, m) - (M-m)\,F_{y'}(x_2, y_2, m)\}$$

$$(7) \qquad = \frac{1}{2}\cos\alpha\,(M-m)^2\,F_{y'y'}(x_2, y_2, m) + \theta\,(M-m);\ 0 < \theta < 1.$$

Tym sposobem istnienie pochodnej funkcyi $f(s)$ i jej ciągłość są udowodnione dla wszystkich punktów przedziału $0 \leqslant s \leqslant l$.

Z postaci funkcyi $\mathfrak{E}$ widać, że funkcya $f'(s)$ nie może być dodatnią, gdy funkcya $F_{y'y'}(x, y, p)$ czyni zadość warunkom twierdzenia pomocniczego, lecz może znikać, gdy $M - m = 0$, t. j. gdy krańcowa $\varphi(x, \gamma_2)$ jest styczna do krzywej $\overline{C}$ w punkcie P. Ponieważ krzywa $\overline{C}$ jest dowolna, może przeto we wszystkich częściach przedziału zlewać się z krańcową $\varphi(x, \gamma)$, a zatem $M-m$ może znikać. Pozostaje tedy okazać, że $M-m$ nie może znikać w całym przedziale, o ile $\overline{C}$ nie zlewa się z C. Wynika to wprost z równania:

$$\frac{d\gamma_2}{ds} = \cos\alpha\,\frac{M-m}{\varphi_\gamma(x_2, \gamma_2)};$$

jeżeli $M - m = 0$, wtedy γ_2 jest stałe, a ponieważ w pasmie S może być nakreślona jedna tylko krańcowa C, łącząca punkty A i B, przeto $\gamma_2 = \gamma_0$.

Metoda, wyłożona tu dla pola specyalnego, daje się rozciągnąć i na pole ogólne § 2-go (porówn. § 4 i 5), a wynik daje się streścić w sposób następujący:

W a r u n k i d o s t a t e c z n e W e i e r s t r a s s a d l a m i n i m u m. W a r u n k i e m d o s t a t e c z n y m n a t o, a b y f u n k c y a y n a d a w a ł a c a ł c e

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

w a r t o ś ć m i n i m u m j e s t:

1) a b y p u n k t y (x_0, y_0), (x_1, y_1) m o ż n a b y ł o p o ł ą c z y ć k r a ń c o w ą C, c z y n i ą c ą z a d o ś ć w a r u n k o m Δ;

2) a b y i s t n i a ł o p o l e k r z y w e j C w z n a c z e n i u, p o d a n e m w § 2;

3) a b y f u n k c y a $F_{y'y'}(x, y, p)$ b y ł a d o d a t n i ą w e w s z y s t k i c h p u n k t a c h k r z y w e j C, g d z i e p j e s t f u n k c y ą d o w o l n ą w p r z y p a d k u m i n i m u m m o c n e g o, r ó w n ą z a y w p r z y p a d k u m i n i m u m s ł a b e g o.

P r z y k ł a d. Całka w przykładzie § 1 jest minimum. gdy funkcya y jest krańcową. Istotnie, gdy zastosujemy tu pole, określone w końcu § 2, spełniają się warunki W e i e r s t r a s s a.

4. **Uzasadnienie warunków dostatecznych dla pola. Poprzeczna Knesera.** Przyjmijmy, że $A_1 < x_0$ (początek §-u 1) i że pole rozciąga się wzdłuż linii $x = x_0$; obszar T jest rozszerzony na

$$T': \quad x'_0 \leqslant x \leqslant x_1, \; \gamma_0 - \varkappa \leqslant \gamma \leqslant \gamma_0 + \varkappa,$$

gdzie $A_1 < x'_0 < x_0$; x'_0 może być obrane dowolnie w blizkości punktu x_0.

Przez punkt T przechodzi krzywa dowolna G nie styczna do krzywej C ze styczną, zmieniającą się sposobem ciągłym. Niechaj spółrzędnemi punktu zmiennego Q krzywej G będą ξ, η. Wtedy łatwo okazać, że spółrzędne ξ, η są obie funkcyami ciągłemi wielkości γ, mającemi pochodne ciągłe względem γ i że te pochodne nie znikają równocześnie w sąsiedztwie punktu A. Istotnie

$$\frac{d\eta}{d\gamma}=\varphi'(x,\xi)\frac{d\xi}{d\gamma}+\varphi_\gamma(\xi,\gamma)$$

i $\varphi_\gamma(x_0,\gamma_0)\neq 0$.

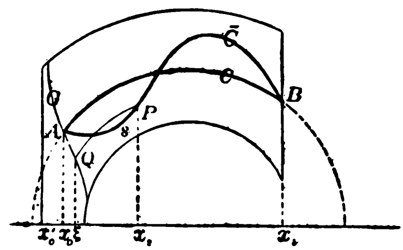

Fig. 9.

Niechaj punkty A i B będą połączone, jak poprzednio, krzywą dowolną $\bar{C}$, czyniącą zadość warunkom A i leżącą w sąsiedztwie krzywej C; zachowajmy definicyę i znakowania § 3 z tym wyjątkiem, że I_{02} ma oznaczać całkę następującą:

$$I_{02}=\int_{\xi}^{x_2}F(x,y,y')\,dx\,,\quad \text{wziętą wzdłuż krańcowej } y=\varphi(x,\gamma)\,.$$

Stąd:

$$f(s)=I_{02}+\bar{I}_{21}\,;\quad f'(s)=\frac{dI_{02}}{ds}+\frac{d\bar{I}_{21}}{ds}\,,$$

$$\frac{d\bar{I}_{21}}{ds}=-F(x_2,y_2,M)\cos a\,,$$

$$\frac{dI_{02}}{ds}=\frac{\partial I_{02}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds}+\frac{\partial I_{02}}{\partial\xi}\frac{d\xi}{ds}+\frac{d\gamma_2}{ds}\int_{\xi}^{x_2}\{F_y\varphi_\gamma+F_{y'}\varphi'_\gamma\}\,dx$$

$$=F(x_2,y_2,m)\cos a-\frac{d\gamma_2}{ds}\Big[F(\xi,\eta,\eta_1)\frac{d\xi}{d\gamma}+F_{y'}(\xi,\eta,\eta_1)\varphi_\gamma(\xi,\gamma)\Big]_{\gamma=\gamma_2}$$

$$+\frac{d\gamma_2}{ds}F(x_2,y_2,m)\,\varphi_\gamma(x_2,\gamma_2)\,,$$

gdzie $\eta_1 = \varphi'(\xi, \gamma)$; całka znika tu podobnie, jak w § 3. Otrzymujemy tedy wzór:

$$f'(s) = -\cos\alpha\,[F(x_2, y_2, M) - F(x_2, y_2, m) - (M-m)\,F_{y'}(x_2, y_2, m)]$$

$$-\frac{dy_2}{ds}\left[F(\xi, \eta, \eta_1)\frac{d\xi}{d\gamma} + F_{y'}(\xi, \eta, \eta_1)\,\varphi_\gamma(\xi, \gamma)\right]_{\gamma=\gamma_2}.$$

Wzór ten różni się od wzoru w § 3: $f'(s) = -\mathfrak{G}$, jedynie dodatkiem drugiego wiersza. Krzywa G jest dowolną i według pomysłu K n e s e r a [1]), można wyznaczyć G tak, aby było:

$$(9)\qquad F(\xi, \eta, \eta_1)\frac{d\xi}{d\gamma} + F_{y'}(\xi, \eta, \eta_1)\,\varphi_\gamma(\xi, \gamma) = 0\,.$$

Jest to możliwe zawsze, o ile tylko $F(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$ [2]). Równanie (9) określa ξ jako funkcyę wielkości γ, jednowartościową i ciągłą, mającą pochodne ciągłe w sąsiedztwie punktu $\gamma = \gamma_0$ [3]) i jest $\eta = \varphi(\xi, \gamma)$. Krzywa jest poprzeczną (patrz § 1) względem krańcowych $\varphi(x, \gamma)$; istotnie z wzorów (8) i (9) wynika, że

---

1) Dalszy przebieg dowodzenia K n e s e r a jest odmienny od podanego w tym artykule i zgodnego w istocie z dowodem W e i e r s t r a s s a. K n e s e r traktuje całe zagadnienie o minimum całki I, jako uogólnienie zagadnienia o linii najkrótszej na powierzchni.

2) Jeżeli $F(x, y_0, y'_0) = 0$, wtedy możemy wziąć funkcyę $\overline{F}(x, y, y') = F(x, y, y') + 1$; stąd:

$$\int_{x_0}^{x_1} \overline{F}(x, y, y')\,dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx + (x_1 - x_0)\,.$$

Funkcye F, $\overline{F}$ mają te same krańcowe i oczywiście funkcya y, które zamienia na minimum jednę całkę, zamienia i drugą. Lecz $\overline{F}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$ i dowodzenie w tekście daje się tu zastosować Widać stąd, że gdy $F(x, y, y') = 0$, y zamienia całkę I na minimum.

3) Co do twierdzenia o istnieniu dla zwykłego równania różniczkowego, z jakiego tu czynimy użytek, patrz np. P i c a r d l. c., t. II, rozdział 11, zwłaszcza § 7.

$$[F(\xi, \eta, \eta_1) - \eta_1 F_{y'}(\xi, \eta, \eta_1)] \frac{d\xi}{d\gamma} + F_{y'}(\xi, \eta, \eta_1) \frac{d\eta}{d\gamma} = 0 .$$

Wprowadzając zmianę, że całka I_{02} jest wzięta poczynając od granicy mniejszej ξ, określonej jako funkcya wielkości γ, zamiast od punktu (x'_0, y'_0) (§ 3), możemy słowo w słowo zastosować powyższe rozumowania i tym sposobem warunki dostateczne Weierstrassa dla pola można uważać za udowodnione.

Dotąd ograniczaliśmy się do przypadku, kiedy granice całkowania są stałe. Metoda Knesera pozwala na wyprowadzenie warunków dostatecznych i dla przypadku granic zmiennych, co wyraża twierdzenie następujące:

Twierdzenie. *Warunkiem dostatecznym w przypadku granic zmiennych całkowania na to, aby krańcowa C zamieniała całkę I na minimum* (w założeniu, że warunki konieczne, by C przecinało Γ_0, Γ_1 poprzecznie są spełnione) *jest, by można było otoczyć krzywą C polem krańcowych w znaczeniu podanem w § 2 i by każda z krańcowych tego pola przecinała krzywą Γ_0* (patrz § 1) *poprzecznie, wreszcie — aby funkcya $F_{y'y'}$ była dodatnia w obszarze R.*

W § 2 pole było ograniczone liniami prostemi $x = x_0$ i $x = x_1$; obecnie zamiast tych prostych mamy krzywe Γ_0 i Γ_1.

5. **Uzasadnienie warunków dostatecznych przy pomocy niezmienników całkowych, podane przez Hilberta.** Zdarza się nieraz, że zagadnienie fizykalne daje się rozwiązać, niezależnie od metod Rachunku różniczkowego, za pomocą metod Rachunku całkowego. Tak np. można wyznaczyć ciśnienie P płynu, pochodzące jedynie od siły ciężkości na zanurzone w nim pole płaskie pionowe, wyznaczając $\frac{dP}{dx}$ jako funkcyę zmiennej x, i rozwiązując odpowiednie równanie różniczkowe; otóż P można wyrazić jako granicę sumy ciśnień cząstkowych ΔP na nieskończenie wąskie paski poziome pola. Warunek statecznego przepływu ciepła w ciele jednorodnem — równanie Laplace'a — można otrzymać, rozważając ilość ciepła, przepływającego w nieskończenie małym elemen-

cie ciała i zmniejszając nieograniczenie do zera wymiary elementu; twierdzenie Greena można stosować do dowolnej części ciała, które nie jest koniecznie nieskończenie małe [1]).

Metoda Weierstrassa uzasadnienia warunków dostatecznych jest metodą Rachunku różniczkowego; metoda Hilberta [2]), którą teraz wyłożymy, jest metodą Rachunku całkowego. Zagadnienie polega na wykazaniu, że wartość J całki I, wziętej wzdłuż krzywej krańcowej C, jest mniejsza od wartości $\bar{J}$ tejże całki, wziętej wzdłuż krzywej dowolnej $\bar{C}$, leżącej w sąsiedztwie krzywej C. Hilbert stawia pytanie takie: Jest możliwem wyznaczenie całki

$$(10) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \Phi(x, Y, Y')\,dx$$

w ten sposób:

(*a*) aby wartość jej była niezmienna na krzywej $\bar{C}$, t. j. dla funkcyi $Y(x)$, dobranej zgodnie z warunkami A i leżącej w sąsiedztwie krzywej C;

(*b*) aby, gdy $\bar{C}$ zlewa się z C, t. j. gdy $Y(x) = \varphi(x, \gamma_0)$ wartość całki sprowadzić się dała do wartości I, wziętej wzdłuż C, t. j. do J.

Dajmy, że otrzymaliśmy jednę taką całkę; jej wartością jest J. Otóż punkt główny metody Hilberta jest następujący. Różnicę $\bar{J} - J$, która dla minimum musi być wielkością dodatnią (warunek konieczny i dostateczny § 3), można napisać w postaci:

---

[1]) Najnowszą ilustracyę tych dwóch metod dają dwa dowody twierdzenia pomocniczego Goursata do twierdzenia Cauchy'ego w Rachunku całkowym; dowód Goursata (por. Transact. of the Amer. Math. Soc. 1. 1900, p. 14) odpowiada metodzie całkowej, dowód Moore'a (tamże, p. 499) metodzie różniczkowej.

[2]) Podana w wykładach w Getyndze (semestr letni 1900); sprawozdanie o niej w „Berichte des Mathem. Vereins“, Getynga Somm. Sem. 1900, p. 10.

$$(11) \qquad \bar{J} - J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, Y, Y') - \Phi(x, Y, Y')\, dx\,,$$

stąd warunkiem dostatecznym dla minimum jest, by funkcya podcałkowa

$$F(x, Y, Y') - \Phi(x, Y, Y')$$

była dodatnią i nigdzie ujemną w częściach przedziału dla wszystkich krzywych $\bar{C}$, nie zlewających się całkowicie z krzywą C. Sprowadza się to do tego, że w przypadku gdy istnieje pole krańcowej C, funkcya Φ może być wybraną tak, by funkcya podcałkowa pomijając czynnik dodatni, była funkcyą Weierstrassa $\mathcal{E}$.

Rozwiniemy szczegóły analizy Hilberta i rozpoczniemy od przytoczenia w tym celu dobrze znanego w Rachunku waryacyjnym twierdzenia pomocniczego.

Twierdzenie pomocnicze[1]. Warunek konieczny i dostateczny na to, aby wartość całki

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x, y, y')\, dx\,,$$

gdzie funkcya Φ poddana jest warunkom dla funkcyi F w § 1, była niezależna od funkcyi y, czyniącej zadość warunkom A, oraz posiadającej pochodne drugie skończone i ciągłe w przedziale $x_0 < x < x_1$ [2]) jest, by funkcya Φ czyniła zadość równaniu funkcyjnemu:

$$(12) \qquad \Phi_y - \frac{d}{dx}\Phi_{y'} = 0$$

---

[1]) Dowód twierdzenia pomocniczego dajemy na końcu paragrafu.

[2]) Żądanie dalsze istnienia drugiej pochodnej, należy w ogóle uczynić jako warunek dostateczny, by równanie (12) miało znaczenie. Lecz Φ jest tu funkcyą liniową ilości y', a więc w przypadku rozważanym przez Hilberta żądanie to jest spełnione.

d l a w s z y s t k i c h f u n k c y i y k l a s y w y ż e j r z e c z o n e j.

Równanie to ma postać identyczną z postacią równania L a g r a n g e'a (2), lecz tam F było dane i y szukane, tu zaś przeciwnie: y obieramy dowolnie, a szukamy funkcyi Φ, czyniącej zadość równaniu.

W przypadku szczególnym twierdzenia, w którym $\Phi = P + y'Q$, gdzie P i Q są funkcyami tylko zmiennych x i y, całka sprowadza się do znanej

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy,$$

równanie zaś (12) przybiera postać:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

H i l b e r t stosuje w następujący sposób powyższe twierdzenie pomocnicze. Jako funkcyę Φ bierze on:

$$\Phi(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p) F_p(x, y, p), \tag{13}$$

gdzie p oznacza funkcyę dowolną zmiennych x i y, mającą pierwsze pochodne cząstkowe p_x, p_y, ciągłe we wszystkich punktach pola, i szuka takiej funkcyi p, aby funkcya Φ czyniła zadość równaniu (12). Jest tu:

$$\Phi_y = F_y + F_p p_y + (y' - p)(F_{yp} + F_{pp} p_y) - F_p p_y,$$

$$\frac{d\Phi_{y'}}{dx} = \frac{dF_p}{dx} = F_{xp} + F_{yp} y' + F_{pp}(p_x + p_y y'),$$

a warunek dla p będzie następujący [1]):

---

[1]) Warunek ten otrzymuje H i l b e r t w postaci (porów. Berichte des Math. Ver. l. c.)

$$\frac{\partial Fp}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(p\, Fp) = 0,$$

gdzie różniczkowanie oznaczone przez ∂ uskutecznia się w założeniu, że x i y są zmiennemi niezależnemi.

(14) $$F_y - F_{xp} - pF_{yp} - F_{pp}(p_x + pp_y) = 0\,.$$

Warunkowi temu, gdy istnieje pole można zawsze zadość uczynić przy obraniu na p funkcyi

(15) $$p = \varphi'(x, \gamma)\,,\quad y = \varphi(x, \gamma)\,.$$

W samej rzeczy, równanie (14) sprowadza się do równania Lagrange'a (2), gdy:

$$p_x = \varphi'' + \varphi'_\gamma \frac{\partial\gamma}{\partial x}\,,\quad p_y = \varphi'_\gamma \frac{\partial\gamma}{\partial y}\,,$$

$$0 = \varphi' + \varphi_\gamma \frac{\partial\gamma}{\partial x}\,,\quad 1 = \varphi_\gamma \frac{\partial\gamma}{\partial y}\,;$$

a więc:

$$p_x + pp_y = \varphi''\,.$$

Jeżeli w wyrażeniu (13) na Φ zamiast y napiszemy Y, zamiast p naszemy $y' = \varphi'(x, \gamma)$, gdzie $Y = \varphi(x, \gamma)$, wtedy z równania (11) otrzymamy następujące (por. równanie (7)):

$$\bar{J} - J = \int_{x_0}^{x_1} \{F(x, Y, Y') - F(x, y') - (Y' - y')\,F_{y'}(x, Y, y')\}\,dx$$

(16) $$= \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{E} \sec a\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{E}\,ds\,;$$

tu ds oznacza element krzywej $\bar{C}$.

D o w ó d t w i e r d z e n i a p o m o c n i c z e g o. (a) Warunek jest konieczny. Niechaj Y, y będą dwiema funkcyami, i $Y = y + \eta$. Utwórzmy funkcyę:

$$f(a) = \int_{x_0}^{x_1} \{\Phi(x, y + a\eta, y' + a\eta') - \Phi(x, y, y')\}\,dx\,.$$

Ponieważ $y + a\eta$, gdy a pozostaje stałem, jest jedną z funkcyj uważanych, $f(a) = 0$, więc

$$f'(a) = \int_{x_0}^{x_1} \{\eta \Phi_y (x, y + a\eta, y' + a\eta') + \eta' \Phi_{y'} (x, y + a\eta, y' + a\eta')\} dx$$

znika. Z równania, otrzymanego stąd przy $a = 0$:

$$\int_{x_0}^{x_1} \{\eta \Phi_y (x, y, y') + \eta' \Phi_{y'} (x, y, y')\} dx = 0 ,$$

można wyprowadzić równanie (12) za pomocą metody, podanej w cytowanej rozprawie p. Whittemore'a. Warunek ten tedy jest konieczny.

(*b*) Odwrotnie, warunek jest dostateczny. W samej rzeczy, niechaj Y, y będą dwiema funkcyami; utwórzmy funkcyę $f(a)$ i jej pochodną $f'(a)$. Całkę, wyrażającą tę drugą funkcyę, można przekształcić za pomocą całkowania przez części jak w § 1, i będzie:

$$f'(a) = \int_{x_0}^{x_1} \eta \{\Phi_y (x, y + a\eta, y' + a\eta') - \frac{d}{dx} \Phi_{y'} (x, y + a\eta, y' + a\eta')\} dx .$$

Stąd $f'(a) = 0$ i równanie (12) jest warunkiem dostatecznym.

6. **Zastosowanie metody Hilberta do całek podwójnych. Funkcya $\mathfrak{E}$.** Metoda, podana w tej rozprawie, daje się bezpośrednio zastosować do całek podwójnych. Niechaj $\mathfrak{T}$ będzie obszarem na płaszczyźnie x, y, ograniczonym krzywą $\mathfrak{C}$, mającą wszędzie styczne, zmieniające się sposobem ciągłym, i niechaj będzie dany układ dowolny wartości $\mathfrak{b}$ wzdłuż krzywej $\mathfrak{C}$; wartości te niechaj tworzą funkcyę ciągłą łuku na tej krzywej, mającą pochodne ciągłe względem tego łuku. Rozpatrzmy całkę

$$(17) \qquad I = \iint_{\mathfrak{T}} F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy , \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

rozciągniętą na obszar $\mathfrak{T}$, gdzie z jest funkcyą ciągłą zmiennych x, y w obszarze $\mathfrak{T}$ i na jego ograniczeniu, mającą na tem ograniczeniu wartości $\mathfrak{b}$. Co do ciągłości funkcyi F i jej pochodnych rzędu pierwszego i drugiego w obszarze $\mathfrak{T}$, czynimy podobne założenia jak w § 1, co do funkcyi z zaś zakładamy, że ma pochodne cząstkowe [1]) rzędu pierwszego i drugiego, ciągłe i skończone w obszarze $\mathfrak{T}$.

Zagadnienie polega na tem, aby wykazać, że pomiędzy funkcyami z istnieją takie, które całce I nadają wartość minimum.

Geometrycznie wyrazić się daje zadanie to w ten sposób: Niechaj elementom powierzchni walcowej, której tworzącą jest krzywa $\mathfrak{C}$ i równoległym do osi z odpowiadają wartości na ograniczeniu. W ten sposób powstaje krzywa skośna $\mathfrak{c}$. Szukamy takiej części powierzchni, rozciągniętej wzdłuż krzywej $\mathfrak{c}$, dla której całka I jest minimum.

Wyprowadźmy najprzód warunki konieczne. Dajmy, że zagadnienie zostało rozwiązane i że z stanowi jego rozwiązanie. Niechaj $Z = z + \zeta$ należy do powierzchni przemienionej; ζ niechaj będzie waryacyą funkcyi z. Wtedy można dowieść, że zachodzić musi związek:

$$\iint\limits_{\mathfrak{T}} \{\zeta F_z + \pi F_p + \varkappa F_q\}\, dx\, dy = 0 \qquad \left(\pi = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \varkappa = \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)$$

bez względu na to, jaką wzięto waryacyę ζ. Założenie o istnieniu drugich pochodnych cząstkowych funkcyi z znajduje zastosowanie w dalszym ciągu dowodzenia, polegającym na przekształceniu całki za pomocą metody całkowania przez części (jak w końcu § 1); otrzymujemy tym sposobem równanie Lagrange'a:

$$(18)\qquad \begin{cases} F_z - \dfrac{\partial F_p}{\partial x} - \dfrac{\partial F_q}{\partial y} = 0 \\ \text{lub: } F_z - F_{xp} - F_{yq} - F_{zp}\dfrac{\partial z}{\partial x} - F_{zq}\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \quad - \left(F_{pp}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2F_{pq}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + F_{qq}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Należy dalej okazać, że w przypadku minimum jest:

---

[1]) Nie stwierdzono dotąd, o ile mi wiadomo, że założenie o istnieniu pochodnych drugich w przypadku całki podwójnej jest zbyteczne.

$$F^2_{pq} - F_{pp}F_{qq} \leqslant 0$$

dla każdego punktu powierzchni z (Warunek Legendre'a). Przyjmijmy, że dla wszystkich punktów obszaru $\mathfrak{R}$ jest:

(19) $$F^2_{pq} - F_{pp}F_{qq} < 0 .$$

Załóżmy, że istnieje funkcya z, spełniająca wyżej podane warunki ciągłości, przyjmująca przepisane wartości na ograniczeniu i czyniąca zadość równaniu Lagrange'a w całym obszarze $\mathfrak{T}$. Funkcya ta jest krańcową C. Czego potrzeba nadto, aby ta funkcya nadawała całce I wartość minimum? Prowadzi to do tego, że warunek dostateczny Weierstrassa (§ 3) może być bezpośrednio rozciągnięty na ten przypadek. Po pierwsze, musimy żądać istnienia pola dla krańcowej C. Przyjmujemy:

(1) że istnieje funkcya $\varphi(x, y, \gamma)$, która wraz z swemi pochodnemi cząstkowemi $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_\gamma, \varphi_{xy}, \varphi_{y\gamma}$ jest funkcyą ciągłą trzech zmiennych niezależnych x, y, γ w obszarze T: (x, y) jest punktem obszaru $\mathfrak{T}$, włączając weń $\mathfrak{C}$; $\gamma_0 - \varkappa \leqslant \gamma \leqslant \gamma_0 + \varkappa$, gdzie $\varkappa$ jest stałą dodatnią; oraz że dla wartości stałej wielkości γ jest $\varphi(x, y, \gamma)$ krańcową, która dla specyalnej wartości $\gamma = \gamma_0$ zlewa się z krańcową C;

(2) że $\varphi_\gamma(x, y, \gamma_0) \neq 0$ gdy (x, y) znajduje się w obszarze $\mathfrak{T}$ albo na krzywej $\mathfrak{C}$.

Aby otrzymać funkcyę Weierstrassa $\mathcal{E}$, zastosujemy metodę Hilberta. Mamy najprzód:

Twierdzenie pomocnicze. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby wartość całki

$$\iint_{\mathfrak{T}} \Phi(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

była niezależna od powierzchni z, jest

(20) $$\Phi_z - \frac{\partial \Phi_p}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_q}{\partial y} = 0 .$$

Tu wszystkie powierzchnie uważamy za rozciągnięte wzdłuż tejże samej krzywej skośnej $\mathfrak{c}$; Φ i z są poddane tym samym warunkom ciągłości, jak wyżej F i z; różniczkowania, wskazane przez okrągłe ∂, są dokonane w założeniu, że x, y są zmiennemi niezależnemi.

Najprzód, funkcya Φ jest obrana zgodnie z równaniem (13):

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z, p, q) = F(x, y, z, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) + (p-\mathfrak{p})\, F_p(x, y, z, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \\ + (q-\mathfrak{q})\, F_q(x, y, z, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})\end{aligned} \tag{21}$$

gdzie $\mathfrak{p}$ i $\mathfrak{q}$ oznaczają funkcye dowolne zmiennych x, y, z, mające pierwsze pochodne ciągłe; można wtedy $\mathfrak{p}$ i $\mathfrak{q}$ wyznaczyć tak, aby funkcya Φ czyniła zadość równaniu (20). Znajdujemy, iż musi spełniać się związek:

$$\begin{aligned}F_z - [F_{xp} + \mathfrak{p}F_{zp} + (\mathfrak{p}_x + \mathfrak{p}\mathfrak{p}_z)\, F_{pp} + (\mathfrak{q}_x + \mathfrak{p}\mathfrak{q}_z)\, F_{pq}] \\ - [F_{yq} + \mathfrak{q}F_{zq} + (\mathfrak{p}_y + \mathfrak{q}\mathfrak{p}_z)\, F_{pq} + (\mathfrak{q}_y + \mathfrak{q}\mathfrak{q}_z)\, F_{qq}] = 0\,.\end{aligned} \tag{22}$$

Temu warunkowi staje się zawsze zadość, gdy istnieje pole, a za funkcye $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ obierzemy następujące:

$$\mathfrak{p} = \varphi_x(x, y, \gamma)\,, \quad \mathfrak{q} = \varphi_y(x, y, \gamma)\,, \quad z = \varphi(x, y, \gamma)\,.$$

W samej rzeczy, równania (22) sprowadzają się wtedy do równania Lagrange'a, w którem uczyniono $z = \varphi$.

Jeżeli teraz w wyrażeniu (21) na Φ zamiast $z, p, q, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ położymy odpowiednio $Z, P, Q, \varphi_x, \varphi_y$ i utworzymy całkę $\bar{J} - J$, w której funkcya podcałkowa jest różnicą

$$F(x, y, Z, P, Q) - \Phi(x, y, Z, P, Q)\,,$$

otrzymamy w tej różnicy funkcyę Weierstrassa $\mathcal{E}$, prócz czynnika dodatniego $a = \cos\alpha$, gdzie α oznacza kąt ostry, jaki normalna do powierzchni C w punkcie x, y, Z czyni z osią z:

$$\begin{aligned}E = a\{F(x, y, z, P, Q) - F(x, y, Z, \varphi_x, \varphi_y) - (P-\varphi_x)\, F_p(x, y, Z, \varphi_x, \varphi_y) \\ - (Q-\varphi_y)\, F_q(x, y, Z, \varphi_x, \varphi_y)\} \\ = \frac{1}{2}a[F_{pp}(\theta)(P-\varphi_x)^2 + 2F_{pq}(\theta)(P-\varphi_x)(Q-\varphi_y) + F_{qq}(\theta)(Q-\varphi_y)]^2.\end{aligned} \tag{23}$$

Tu $\varphi_x(x, y, \gamma)$, $\varphi_y(x, y, \gamma)$ uważamy za funkcye zmiennych x, y, Z; γ wyznacza się ze związku $Z = \varphi(x, y, \gamma)$; wyrażenia $F_{pp}(\theta)$, $F_{pq}(\theta)$, $F_{qq}(\theta)$ utworzone są z funkcyj odpowiednich F_{pp}, F_{pq}, F_{qq} dla argumentów $x, y, Z, \varphi_x + \theta[P - \varphi_x]$, $\varphi_y + \theta[Q - \varphi_y]$; $0 < \theta < 1$.

Skoro związek

$$F^2_{pq} - F_{pp} F_{qq} < 0$$

ma miejsce dla wszystkich punktów obszaru $\mathfrak{R}$, to forma kwadratowa w ostatniem wyrażeniu na $\mathfrak{E}$ jest funkcyą określoną, a stąd, gdy $F_{pp} > 0$ (a zatem i $F_{qq} > 0$), całka

$$\bar{J} - J = \iint_{\mathfrak{T}} \mathfrak{E} \sec a \, dx \, dy = \iint \mathfrak{E} \, dS$$

gdzie dS oznacza element powierzchni C i ma zawsze wartość dodatnią, wyjąwszy, gdy:

$$P - \varphi_x = 0 \,, \quad Q - \varphi_y = 0$$

we wszystkich punktach obszaru $\mathfrak{T}$.

Gdy istnieje pole, można okazać, że w ostatnim przypadku równania spełniają się tylko wtedy, gdy $\bar{C}$ zlewa się wszędzie z C.

Zastosowanie. Powierzchnie minimalne. Zagadnienie jest następujące: Wzdłuż krzywej skośnej zamkniętej Γ rozciągnąć powierzchnię, której pole byłoby mniejsze od pola każdej innej takiej powierzchni.

Załóżmy, że krzywa Γ posiada wszędzie styczną, zmieniającą się sposobem ciągłym, i że niektóre z powierzchni, rozciągniętych wzdłuż Γ, są takie, że gdy obierzemy odpowiednią płaszczyznę M, to dowolna prostopadła do M przecina powierzchnię (włączając jej ograniczenie) najwyżej w jednym punkcie i nie jest styczną do powierzchni w tym punkcie. Obierzemy płaszczyznę M jako płaszczyznę x, y układu prostokątnego x, y, z. Pole powierzchni przedstawia całka

$$\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy \,,$$

i tę całkę należy uczynić minimum. Równanie Lagrange'a jest następujące:

$$(24)\qquad (1+q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2pq\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(1+p^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Tym sposobem, jeżeli na wszystkich powierzchniach, które możemy rozciągnąć wzdłuż Γ, istnieją w punktach wewnętrznych pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego, czyniące zadość warunkom, przepisanym dla funkcyi z na początku tego paragrafu, wtedy istnieje jedna powierzchnia o polu mniejszem od pola każdej innej i czyniąca zadość we wszystkich punktach wewnętrznych równaniu (24). Odwrotnie, warunek ten jest dostateczny. Niechaj bowiem równaniem krańcowej C będzie $z=f(x,y)$. Istnieje wtedy pole wokoło tej krańcowej rozciągające się nieograniczenie w obu kierunkach. Jako funkcyę φ można obrać następującą:

$$\varphi(x,y,\gamma)=f(x,y)+\gamma,\ \gamma_0=0,\ -\infty<\gamma<+\infty.$$

Pole krańcowej C nietylko jest mniejsze od pola innych powierzchni tej klasy, które uważamy za leżące w ograniczonem sąsiedztwie krańcowej C, ale jest mniejsze od pola każdej takiej powierzchni.

Możemy uogólnić ten przykład i powiedzieć: Warunek Lagrange'a (18) w połączeniu z warunkami

$$F_{pp}>0,\ F_{pq}-F_{pp}F_{qq}<0,$$

jest warunkiem dostatecznym dla minimum, o ile funkcya podcałkowa F nie zawiera wyraźnie zmiennej z.