O TEORYI MOMENTÓW

napisał

B. Niewęgłowski.

W artykule niniejszym staramy się oprzeć całą teoryę momentów na jednym wzorze ogólnym, przedstawiającym tę dogodność, że zapobiega pytaniom dotyczącym znaku, albowiem rozstrzyga je raz na zawsze.

1. **Objętość czworościanu w funkcyi spółrzędnych jego wierzchołków.** Niechaj $O . xyz$ będzie trójścianem; λ, μ, ν niechaj oznaczają kąty yOz, zOx, xOy. Połóżmy:

$$\omega^2 = \begin{vmatrix} 1 \;, & \cos\nu \;, & \cos\mu \\ \cos\nu \;, & 1 \;, & \cos\lambda \\ \cos\mu \;, & \cos\lambda \;, & 1 \end{vmatrix} ;$$

wiemy, że $\omega^2 \leqslant 1$; przez ω oznaczmy pierwiastek arytmetyczny liczby ω^2.

Miarą objętości równoległościanu, zbudowanego na trzech krawędziach, mających odpowiednio długości a, b, c, jest, jak wiadomo:

$$a . b . c \sin(a, b, c) \quad \text{lub} \quad a . b . c . \omega ,$$

gdzie ω jest właśnłe wstawą kąta trójściennego, utworzonego przez trzy krawędzie, wychodzące z jednego wierzchołka.

Niechaj teraz A, B, C, D będą czterema punktami, nie znajdującemi się na jednej płaszczyźnie. Rozważmy dwa odcinki, np. AB i CD. Jeżeli spostrzegacz, mający stopy w A i głowę w B, patrzy na odcinek CD, to może mieć C po stronie lewej, D po stronie prawej; wtedy mówimy, że odcinek CD względem odcinka AB jest p r a w o z w r o t n y; w razie przeciwnym, odcinek CD jest l e w o z w r o t n y. Widzimy łatwo, że równocześnie odcinek

AB jest prawozwrotnym albo lewozwrotnym względem odcinka CD.

Oznaczać będziemy przez $ABCD$ miarę objętości czworościanu, zbudowanego na dwóch odcinkach AB i CD, której nadajemy znak $+$, gdy odcinek AB jest prawozwrotny względem odcinka CD, znak zaś — w razie przeciwnym, tak że będzie:

$$ABOD = -ACBD = CABD = \dots$$

Niechaj x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 będą spółrzędne czterech punktów danych; $x_5, y_5, z_5, \dots, x_8, y_8, z_8$ spółrzędne czterech innych punktów; niechaj wreszcie (p, q, r, s) oznacza wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} x_p\,, & y_p\,, & z_p\,, & 1 \\ x_q\,, & y_q\,, & z_q\,, & 1 \\ x_r\,, & y_r\,, & z_r\,, & 1 \\ x_s\,, & y_s\,, & z_s\,, & 1 \end{vmatrix};$$

p, q, r, s są liczby całkowite jakiekolwiek. Zauważmy, że stosunek odległości dwóch punktów $(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$ i (x_μ, y_μ, z_μ) od płaszczyzny, wyznaczonej przez trzy punkty $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, $(x_\beta, y_\beta, z_\beta)$, $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$, równa się:

$$\frac{(\lambda, \alpha, \beta, \gamma)}{(\mu, \alpha; \beta, \gamma)},$$

o ile te odległości są opatrzone jednym znakiem albo znakiem przeciwnym, stosownie do tego, czy uważane punkty (λ) i (μ) są po jednej stronie albo po stronach przeciwnych płaszczyzny (α, β, γ).

Kolejno będzie co do wielkości i znaku:

$$\frac{ABCD}{A'BCD} = \frac{(1, 2, 3, 4)}{(5, 2, 3, 4)}; \quad \frac{A'BCD}{A'B'CD} = \frac{(5, 2, 3, 4)}{(5, 6, 3, 4)}$$

$$\frac{A'B'CD}{A'B'C'D} = \frac{(5, 6, 3, 4)}{(5, 6, 7, 4)}; \quad \frac{A'B'C'D}{A'B'C'D'} = \frac{(5, 6, 7, 4)}{(5, 6, 7, 8)},$$

mnożąc te równości stronami i skracając, otrzymujemy:

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{(1,2,3,4)}{(5,6,7,8)}\,.$$

Zastosujmy ten wzór ogólny, zakładając, że A' znajduje się na Ox, B' na Oy, C' na Oz, D' w punkcie O, i że $OA' = +1$, $OB' = +1$, $OC' = +1$, a zatem $x_5 = +1$, $y_6 = +1$, $z_7 = +1$. Inne spółrzędne punktów A', B', C' i spółrzędne punktu D' są oczywiście zerami; będzie tedy:

$$(5,6,7,8) = +1\,.$$

Z drugiej strony

$$A'B'C'D' = -\frac{\varepsilon}{6}\omega,$$

gdzie ε jest $+1$, gdy osi są rozmieszczone w ten sposób, że spostrzegacz, mający stopy w O, głowę zaś w punkcie półosi dodatniej Ox, widzi Oy po swojej stronie lewej, Oz po prawej; jest zaś $\varepsilon = -1$ w razie przeciwnym. Mamy tedy w sposób zupełnie ogólny:

$$6\,.\,ABCD = -\varepsilon\omega\,(1,2,3,4)\,.$$

W dalszym ciągu przyjmować będziemy najczęściej, że spółrzędne są prostokątne i że $\varepsilon = +1$; będzie tedy w tym przypadku:

$$6\,ABCD = -(1,2,3,4)\,.$$

Tę metodę wytworną zawdzięczamy Edwardowi L u c a s o w i.

2. **Rozwinięcie wyznacznika** $(1,2,3,4)$. Kładąc:

$$x_2 - x_1 = X\ ,\quad y_2 - y_1 = Y\ ,\quad z_2 - z_1 = Z$$
$$x_4 - x_3 = X'\ ,\quad y_4 - y_3 = Y'\ ,\quad z_4 - z_3 = Z',$$

otrzymujemy bezpośrednio:

$$(1,2,3,4) = \begin{vmatrix} x_1\ , & y_1\ , & z_1\ , & 1 \\ X\ , & Y\ , & Z\ , & 0 \\ x_3\ , & y_3\ , & z_3\ , & 1 \\ X'\ , & Y'\ , & Z'\ , & 0 \end{vmatrix},$$

a rozwijając według ostatniej kolumny, znajdujemy:

$$(1,2,3,4) = -\begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ x_3, & y_3, & z_3 \\ X', & Y', & Z' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ X, & Y, & Z \\ X', & Y', & Z' \end{vmatrix}.$$

Dochodzimy tedy zupełnie naturalnie do oznaczeń:

$$L = y_1 Z - z_1 Y \quad , \quad M = z_1 X - x_1 Z \quad , \quad N = x_1 Y - y_1 X$$
$$L' = y_3 Z' - z_3 Y' \quad , \quad M' = z_3 X' - x_3 Z' \quad , \quad N' = x_3 Y' - y_3 X'$$

i otrzymujemy łatwo:

$$(1) \quad 6ABCD = XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ'.$$

W przypadku osi jakichkolwiek otrzymalibyśmy:

$$(2) \quad 6ABCD = \varepsilon\omega.(XL' + YM' + zN' + LX' + MY' + NZ').$$

3. **Moment dwóch odcinków.** Nazywamy momentem dwóch odcinków AB, CD iloczyn $6.ABCD$, tak że moment jest w ten sposób określony co do wielkości i znaku; mamy tedy:

$$\text{Mom.}(AB, CD) = \mathsf{S}XL' + \mathsf{S}LX'$$

jeżeli osi są prostokątne; znak S wskazuje, że należy sumować wielkości analogiczne, odnoszące się do trzech osi.

Jeżeli osi są jakiekolwiek, będzie:

$$\text{Mom.}(AB, CD) = \varepsilon\omega\mathsf{S}XL' + \varepsilon\omega\mathsf{S}Lx'.$$

Wielkości X, Y, Z, L, M, N są spółrzędnemi odcinka AB; X', Y', Z', L', M', N' — spółrzędnemi odcinka CD. Wiemy, że:

$$LX + MY + NZ = 0 \quad , \quad L'X' + M'Y' + N'Z' = 0;$$

postarajmy się znaleść znaczenie tych spółrzędnych.

4. Zauważmy najprzód, że jeżeli odcinek AB przesuwa się po swej prostej, wtedy jego spółrzędne nie zmieniają się. Spraw-

dzić to można bezpośrednio; jeżeli bowiem spółrzędne końca odcinka zastąpimy przez

$$x_1 + \alpha\varrho,\ y_1 + \beta\varrho,\ z_1 + \gamma\varrho \quad \text{i} \quad x_2 + \alpha\varrho,\ y_2 + \beta\varrho,\ z_2 + \gamma\varrho$$

gdzie α, β, γ są parametry kierownicze podkładu, to widać, że X, Y, Z i L, M, N nie ulegają zmianie.

Podobnież, jeżeli CD przesuwa się po swym podkładzie, spółrzędne X', Y', Z' i L', M', N', pozostają bez zmiany. A więc moment dwóch odcinków pozostaje stałym, co zresztą widocznem było geometrycznie.

To mając, przyjmijmy, że CD znajduje się na prostej Ox, tak że $X' = +1$, $Y' = 0$, $Z' = 0$; będzie:

$$L' = 0 \quad , \quad M' = 0 \quad , \quad N' = 0\,;$$

moment $6ABCD$ redukuje się do L, gdy osi są prostokątne, do $\varepsilon\omega L$ zaś w przypadku ogólnym.

5. Nazywamy momentem odcinka AB i osi moment odcinka AB i odcinka $+1$, znajdującego się na tej osi.

Z poprzedzającego wynika, że L, M, N są momentami odcinka AB i osi Ox, Oy, Oz i że podobnie L', M', N' są momentami odcinka CD i tychże osi, o ile osi są prostokątne i $\varepsilon = +1$.

Widzimy nadto, że gdy X, Y, Z oznaczają składowe odcinka AB równoległe do osi, L, M, N zaś momenty odcinka i odpowiednio osi Ox, Oy, Oz i L', M', N' momenty odcinka CD i odpowiednio tychże osi, wtedy można utrzymać wzór (1) we wszystkich przypadkach i dla jakichkolwiek osi, t. j. będzie:

$$\text{Mom.}\,(AB,\ CD) = XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ'\,,$$

lecz w tym przypadku jest:

$$L = \varepsilon\omega\,(y_1 Z - z_1 Y),\ \text{i t. p.}$$

6. Nazywamy zwykle momentem odcinka AB względem pewnej osi, iloczyn najkrótszej odległości osi i odcinka przez rzut odcinka na płaszczyznę prostopadłą do osi ze znakiem $+$, jeżeli rzut jest prawozwrotny względem osi, ze zna-

kiem zaś—w razie przeciwnym. Łatwo sprawdzić tożsamość dwóch podanych definicyj, gdyż, jeżeli ξ, η, ζ są spółrzędnemi bieżącemi (osi prostokątne), równaniem rzutu odcinka AB na płaszczyznę zOy będzie:

$$\xi Y - \eta X = x_1 Y - \eta_1 X\,;$$

odległość początku spółrzędnych od tej prostej, t. j. najkrótsza odległość osi Oz i odcinka AB będzie:

$$p = \pm \frac{L}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

skąd

$$L = \pm p\sqrt{x^2+y^2}$$

i łatwo sprawdzić, że znak wielkości L jest właśnie taki, jaki wziąć należy po stronie drugiej.

7. Niechaj α, β, γ będą dostawy kierunkowe osi OL, przechodzącej przez początek; rozważmy odcinek na tej osi, którego miara wynosi $+1$ (odcinek jednostkowy). Spółrzędnemi tego odcinka są:

$$\alpha, \beta, \gamma, 0, 0, 0\,,$$

przeto:

$$\text{Mom.}\ (AB, OL) = L\alpha + M\beta + N\gamma\,.$$

Momenty L, M, N przedstawiają pole; lecz jeżeli weźmiemy odcinki jednostkowe, to można na osiach Ox, Oy, Oz wziąć wektory, których miarami są L, M, N; niechaj

$$G = \sqrt{L^2+M^2+N^2}$$

będzie ich wypadkową. Z poprzedzającego wynika, że moment odcinka AB i osi OL przedstawia co do znaku i wielkości rzut wektora G na oś OL.

8. Niechaj Δ i Δ' będą dwie osi, na których kierunki dodatnie są określone odpowiednio przez dostawy kierunkowe α, β, γ

i α', β', γ'. Weźmy na tych osiach odcinki AB i $A'B'$, których miarami algebraicznemi są odpowiednio ϱ i ϱ'. Mamy tedy:

$$X = \alpha\varrho \quad , \quad Y = \beta\varrho \quad , \quad Z = \gamma\varrho$$

$$L = (y\gamma - z\beta)\,\varrho \quad , \quad M = (z\alpha - x\gamma)\,\varrho \quad , \quad N = (x\beta - y\alpha)\,\varrho$$

i podobnie:

$$X' = \alpha'\varrho' , \ldots , N' = (x'\beta' - y'\alpha')\,\varrho' ;$$

jeżeli więc położymy

$$\lambda = y\gamma - z\beta \quad , \quad \mu = z\alpha - x\gamma \quad , \quad \nu = x\beta - y\alpha ,$$

$$\lambda' = y'\gamma' - z'\beta' \quad , \quad \mu' = z'\alpha' - x'\gamma' \quad , \quad \nu' = x'\beta' - y'\alpha' ,$$

to $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ będą spółrzędnemi (Plückera) osi Δ; $\alpha', \beta', \gamma', \lambda', \mu', \nu'$ takiemiż spółrzędnemi osi Δ' i będzie:

$$\text{Mom.}\,(AB, A'B') = (\alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' + \alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu)\,\varrho\varrho' .$$

Wyrażenie w nawiasie po stronie drugiej jest momentem dwóch odcinków jednostkowych na osiach Δ, Δ'; nazywamy ją momentami osi; będzie zatem co do wielkości i znaku

$$\text{Mom.}\,(AB, A'B') = \text{Mom.}\,(\Delta, \Delta') \times \varrho\varrho' .$$

9. **Moment odcinka względem punktu.** Równaniem płaszczyzny OAB jest:

$$L\xi + M\eta + N\zeta = 0 ,$$

a dostawami kierunkowemi płaszczyzny są:

$$\varepsilon\frac{L}{G} , \ \varepsilon\frac{M}{G} , \ \varepsilon\frac{N}{G} ,$$

gdzie $G = +\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Jaki znak nadać należy czynnikowi ε, aby zwrot dodatni osi płaszczyzny OAB był prawozwrotny względem odcinka AB? Jeżeli przez D oznaczymy punkt o spółrzędnych α, β, γ, to potrzeba i wystarcza, by moment dwóch odcinków AB, OD był dodatni; lecz

$$\text{Mom.}\,(AB, OD) = L\alpha + M\beta + N\gamma = \varepsilon G ,$$

a zatem $\varepsilon = +1$ i będzie:

$$\alpha = +\frac{L}{G}, \ \beta = +\frac{M}{G}, \ \gamma = +\frac{N}{G},$$

$$\text{Mom.}\,(AB, OD) = G.$$

Nazywamy m o m e n t e m o d c i n k a AB w z g l ę d e m p u n k t u O moment odcinka AB i odcinka jednostkowego OD, obranego tak, aby prosta OD była prostopadła do AB i prawozwrotna względem AB. Z poprzedzającego wynika, że moment odcinka względem punktu jest wypadkową momentów tego odcinka względem trzech osi prostokątnych, przechodzących przez ten punkt.

Uwaga ta pozwala nam obliczyć moment odcinka AB względem punktu O o spółrzędnych x_0, y_0, z_0.

Jeżeli przez punkt O poprowadzimy równoległe do osi, to spółrzędnemi prostokątnemi punktu A względem nowych osi będą: $x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0$, i jako nowe spółrzędne odcinka AB otrzymamy:

$$X' = X, \ Y' = Y, \ Z' = Z,$$

$$L' = L - (y_0 Z - z_0 Y), \ M' = M - (z_0 X - x_0 Z), \ N' = N - (x_0 Y - y_0 X).$$

Z drugiej strony — i to nam posłuży jako sprawdzenie — możemy obliczyć spółrzędne odcinka jednostkowego na nowej osi $O_1 x_1$. Znajdziemy:

$$X_1 = 1, \ Y_1 = 0, \ Z_1 = 0$$

$$L_1 = 0, \ M_1 = z_0, \ N_1 = -y_0$$

$$\text{Mom.}\,(AB, O_1 x_1) = L + Y M_1 + Z N_1 = L + z_0 Y - y_0 Z \text{ i t. d.}$$

Jeżeli, poczynając od punktu O_1, wykreślimy odcinek $O_1 D$ równoległy, tego samego zwrotu i tejże długości, co odcinek BA, to momenty odcinka $O_1 D$ względem osi Ox, Oy, Oz będą miały wartości:

$$z_0 Y - y_0 Z, \ x_0 Z - z_0 X, \ y_0 X - z_0 Y,$$

a stąd moment odcinka AB względem punktu O_1 będzie wypadkową momentu tegoż odcinka względem O i momentu odcinka O_1D względem tegoż samego punktu O.

10. Ponieważ moment odcinka AB względem punktu O równa się G, t. j. wypadkowej wektorów L, M, N, widzimy więc, że L jest rzutem wektora G na oś Ox. Dowiedliśmy tedy, że moment odcinka względem osi przedstawia się co do wielkości i kierunku przez wektor równy rzutowi na tę oś wektoru, przedstawiającego moment odcinka względem jakiegokolwiek punktu osi.

11. **Twierdzenie Varignona.** Niechaj $OD_1, OD_2, \ldots, OD_n$ będą odcinki, mające wspólny początek, który przyjmijmy za początek osi prostokątnych, i niechaj AB będzie jakimkolwiek odcinkiem. Spółrzędnemi odcinka OD_k są:

$$X_k\,,\ Y_k\,,\ Z_k\,,\ 0, 0, 0$$

będące:

$$\Sigma \,\mathrm{Mom.}\,(AB, OD_k) = L\,\Sigma X_k + M\,\Sigma Y_k + N\,\Sigma Y_k\,;$$

jeżeli więc R jest wypadkową odcinków $OD_1, OD_2, \ldots, OD_n$ otrzymamy:

$$\mathrm{Mom.}\,(AB, R) = \Sigma\,\mathrm{Mom.}\,(AB, OD_k)\,.$$

12. Niechaj $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ będą odcinki o wspólnym początku A i niechaj

$$X_k\,,\ Y_k\,,\ Z_k\,,\ L_k\,,\ M_k\,,\ N_k$$

będą spółrzędne odcinka AB_k.

Moment odcinka AB_k względem pierwszego punktu O jest wektorem, którego składowemi są L_k, M_k, N_k; a zatem wypadkowa momentów odcinków AB_k względem tego punktu ma składowe ΣL_k, ΣM_k, ΣN_k. Lecz

$$\Sigma L_k = y\,\Sigma Z_k - z\,\Sigma Y_k = yZ - zY \text{ i t. d.,}$$

gdzie x, y, z są spółrzędne prostokątne punktu A; X, Y, Z rzuty wypadkowej odcinków AB. A zatem: wypadkowa momentów odcinków AB względem punktu równa się momentowi wypadkowej odcinków względem tegoż punktu.