ZAGADNIENIA.

D o w o d y t w i e r d z e ń p o d a n y c h p r z e z p. K a z i m i e r z a C w o j d z i ń s k i e g o w t. IV „Wiadomości matematyczn.“, str. 272—273 [1].

Podajemy tu dowody, podane przez samego autora w redakcyi poprawniejszej, zamieszczonej w „Archiv der Mathematik und Physik“ (3). I. 1—2. 1901.

Niechaj $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ będą osiami podstawowemi układu trymetrycznego.

Niechaj równaniem prostej dowolnej będzie:

$$G \equiv k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 0 . \tag{1}$$

Połóżmy dla krótkości:

$$\left\{\begin{aligned} k_1 - k_2 \cos A_3 - k_3 \cos A_2 &= \alpha_1 , \\ k_2 - k_3 \cos A_1 - k_1 \cos A_3 &= \alpha_2 , \\ k_3 - k_1 \cos A_2 - k_2 \cos A_1 &= \alpha_3 , \end{aligned}\right. \tag{2}$$

gdzie A_i oznacza kąt przeciwległy bokowi $x_i = 0$; wtedy równania prostopadłych, poprowadzonych z wierzchołków trójkąta podstawowego na prostą G, będą następujące:

$$E_1 \equiv \alpha_3 x_2 - \alpha_2 x_3 = 0 ; \; E_2 \equiv \alpha_1 x_3 - \alpha_3 x_1 = 0 ; \; E \equiv \alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 = 0 . \tag{3}$$

Prostopadłe, poprowadzone ze spodków tych trzech prostych na odpowiednie boki, będą wyrażały się równaniami:

$$\left\{\begin{aligned} F_1 &\equiv \begin{vmatrix} G , & E_1 \\ \alpha_1 , & \alpha_2 \cos A_2 - \alpha_3 \cos A_3 \end{vmatrix} = 0 , \\ F_2 &\equiv \begin{vmatrix} G , & E_2 \\ \alpha_2 , & \alpha_3 \cos A_3 - \alpha_1 \cos A_1 \end{vmatrix} = 0 , \\ F_3 &\equiv \begin{vmatrix} G , & E_3 \\ \alpha_3 , & \alpha_1 \cos A_1 - \alpha_2 \cos A_2 \end{vmatrix} = 0 . \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Ponieważ, jak widać łatwo:

$$F_1 + F_3 \equiv F_2$$

przeto: j e ż e l i z w i e r z c h o ł k ó w t r ó j k ą t a p o p r o w a d z i m y p r o s t o p a d ł e d o d a n e j p r o s t e j i z e s p o d k ó w t y c h

[1]) Por. Wiad. mat. t. V, str. 139.

prostopadłych poprowadzimy znów prostopadłe do odpowiednich boków trójkąta, to te drugie prostopadłe przetną się w jednym punkcie. Punkt ten nazwijmy punktem pionów trójkąta względem prostej.

Z dwóch pierwszych równań (4) mamy:

$$(5)\quad (k_1^2+k_2^2+k_3^2)\,H_1-2H_1\,(k_2k_3\cos A_1+k_3k_1\cos A_2+k_1k_2\cos A_3) + L\,(k_1k_2\sin A_3-k_3k_1\sin A_2)=0\,,$$

$$(6)\quad (k_1^2+k_2^2+k_3^2)\,H_2-2H_2\,(k_2k_3\cos A_1+k_3k_1\cos A_2+k_1k_2\cos A_3) + L\,(k_2k_3\sin A_1-k_1k_2\sin A_3)=0\,,$$

gdzie:

$$(7)\quad \begin{cases} L=x_1\sin A_1+x_2\sin A_2+x_3\sin A_3 \\ H_1=x_2\cos A_2-x_3\cos A_3\,;\ H_2=x_3\cos A_3-x_1\cos A_1\,. \end{cases}$$

Jeżeli z równań (5) i (6) wyrugujemy dwa pierwsze wyrazy i położymy $-H_1-H_2=H_3$, znajdziemy:

$$(8)\quad k_2k_3H_1\sin A_1+k_1k_3H_2\sin A_2+k_1k_2H_3\sin A_3=0\,.$$

Pominięty tu czynnik L, po przyrównaniu go do zera, przedstawia prostą w nieskończoności.

Równanie (8) i jedno z równań (5), (6) przedstawiają związki pomiędzy spółrzędnemi prostej danej i spółrzędnemi punktu pionów.

Niechaj $P_i\equiv(x_1, y_2)$ $(i=1,2,3)$ będą spółrzędnemi trzech wierzchołków trójkąta. Odetnijmy na rzędnych odcinki, będące do całych rzędnych w stosunku $\lambda:1$, i z punktów podziału poprowadźmy prostopadłe do odpowiednich boków; równania tych prostopadłych będą:

$$(9)\quad \begin{cases} T_1\equiv y\,(y_2-y_3)-\lambda y_1\,(y_2-y_3)+(x_2-x_3)\,(x-x_1)=0\,, \\ T_2\equiv y\,(y_3-y_1)-\lambda y_2\,(y_3-y_1)+(x_3-x_1)\,(x-x_2)=0\,, \\ T_3\equiv y\,(y_1-y_2)-\lambda y_3\,(y_1-y_2)+(x_1-x_2)\,(x-x_3)=0\,. \end{cases}$$

Jest:

$$T_1+T_3\equiv T_2\,;$$

przeto: jeżeli prostopadłe, wyprowadzone z wierzchołków trójkąta na prostą daną, podzielimy w równym stosunku, to prostopadłe, z punktów podziału do boków trójkąta poprowadzone, przetną się w jednym punkcie.

W przypadku $\lambda=0$ otrzymujemy stąd twierdzenie poprzedzające; w przypadku $\lambda=1$ znane twierdzenie o wysokościach trójkąta.

Niechaj będą cztery punkty $P_i\equiv(x_i, y_i)$, $(i=1,2,3,4)$ i cztery poprowadzone przez nie proste G_{12}, G_{23}, G_{34}, G_{41}, z których prosta G_{ik} przechodzi przez punkty P_i, P_k.

Jeżeli obierzemy prostą np. G_{13} jako prostą odniesienia dla znalezienia punktu pionów, to musimy z punktów F_3 i F_2 poprowadzić do niej prostopadłe, podzielić te prostopadłe w stosunku danym i z punktów podziału poprowadzić prostopadłe do prostych G_{24}, G_{23}; wtedy na ostatniej leżeć będzie szukany punkt pionów. W ten sposób dojdziemy do równania:

$$(10) \qquad x(x_1-x_2+x_3-x_4)+y(y_1-y_2+y_3-y_4)=x_1x_3-x_2x_4+y_1y_3-y_2y_4$$

(identycznego z równaniem (8)). a wyrażającego, że miejscem punktów pionów (w znaczeniu uogólnionem) trójkąta względem prostej jest prosta. Prostą tę nazwać można prostą pionów trójkąta względem prostej.

Czworobok zupełny zawiera cztery trójkąty, z których każdemu odpowiada prosta odniesienia. Szukając czterech prostych punktów pionów, dojdziemy za każdym razem do równania (10), skąd wynika, że cztery trójkąty czworoboku zupełnego mają jedną prostą pionów.

Dowodzenie twierdzeń I i II, podane przez p. Hoborskiego. W dowodzeniu tem autor bierze trójkąt ABC o wierzchołkach $A\,(0,0)$, $B\,(b_1\,0)$, $C\,(c_1\,c_2)$, kreśli prostą L, określoną przez równanie $y=cx+d$; rozważa rodzinę prostopadłych L' do prostej L o równaniu $y=-\frac{1}{c}x+m$. Te proste przecinają się z prostą L w punkcie o spółrzędnych:

$$x=\frac{(cm-d)\,c}{c^2+1}, \quad y=\frac{c^2m+d}{c^2+1}.$$

Z pomiędzy tych prostych bierze trzy, przechodzące przez punkty A, B, C i przecinające prostą L w punktach A', B', C' wypisuje spółrzędne tych punktów; na prostych AA', BB', CC' odcina długości:

$$A'A''=\frac{AA'}{\lambda}, \quad B'B''=\frac{BB'}{\lambda}, \quad C'C''=\frac{CC'}{\lambda},$$

i otrzymuje spółrzędne punktów A'', B'', C''. Następnie rozważa rodziny prostych L_1, L_2, L_3, prostopadłych do boków trójkąta danego o równaniach:

$$x=t_1, \quad y=-\frac{c_1}{c_2}x+t_2, \quad y=-\frac{b_1-c_1}{c_2}x+t_3.$$

Trzy proste (po jednej z każdej rodziny), przechodzą przez jeden punkt wtedy, gdy:

$$b_1t_1+c_2t_2-c_2t_3=0.$$

Związek ten sprawdza się w rozważanym w zagadnieniu przypadku i t. d.

Dowodzenie nadesłane przez inżyniera A. Lewenberga, oparte jest w części na zasadach geometryi rzutowej (powrócimy do niego przy sposobności).