WZORY PRZYBLIŻONE NA $\sqrt{a^2+b^2}$ i $\sqrt{a^2-b^2}$

podał

Wł. Wojtan.

Na obliczenie wartości $\sqrt{a^2+b^2}$ i $\sqrt{a^2-b^2}$ istnieje wiele wzorów przybliżonych.

Najbardziej rozpowszechnione są wzory Ponceleta, przytaczane w wielu podręcznikach inżynierskich i zbiorach formuł matematycznych. Wzory Ponceleta, jakkolwiek dokładne, nie są wygodne w użyciu z powodu wielkiej liczby cyfr spółczynników.

Bardzo proste wzory na $\sqrt{a^2+b^2}$ podał inżynier Puller w „Zeitschrift für Vermessungswesen“ z roku 1899 na stronie 529; są one następujące:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a + 0.2b \quad \text{dla } b \text{ od } 0 \text{ do } 0.5a$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = 0.8a + 0.6b \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \; 0.5a \; \text{"} \quad a\,.$$

Średni błąd wartości otrzymanych z tych wzorów wynosi $\pm 1.3\%\,a$, największy nie przekracza $\pm 2\%\,a$.

Dokładność wzorów przybliżonych można znacznie zwiększyć, przyjąwszy spółczynnik przy a lub b zmienny, zależny od wartości ilorazu $\frac{a}{b}$.

Ogólny wzór na obliczenie $\sqrt{a^2+b^2}$ byłby więc następujący:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a + \varphi \cdot b\,, \tag{1}$$

przyczem załóżmy, że $a < b$.

Z tego równania otrzymamy:

$$\varphi = \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{b} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} - \frac{a}{b}\,.$$

Dla różnych wielkości ilorazu $\frac{a}{b}$, zawartych w granicach 0 i 1, obliczyłem z powyższego równania wartości spółczynnika φ i zestawiłem je w tabliczce I-ej, gdzie φ_0 oznacza wartość przybliżoną spółczynnika φ z dokładnością na 10^{-3}.

Tabliczka I. $\sqrt{a^2+b^2} = a+\varphi \, . \, b.$

$\frac{a}{b}$	φ	φ_0	$\Delta\varphi=\varphi-\varphi_0$	$\Delta\varphi^2$
0	1.0000	1.000	0.0000	0.00000000
0.0001	0.99990..	1.000	—0.0001	0.00000001
0.0005	0.99950..	1.000	—0.0005	0.00000025
0.001	0.99900..	0.999	0.0000	0.00000000
0.005	0.99501..	0.995	0.0000	0.00000000
0.01	0.99004..	0.990	+0.0000	0.00000000
0.02	0.98019..	0.980	+0.0002	0.00000004
0.03	0.97404..	0.970	+0.0004	0.00000016
0.04	0.96079..	0.961	—0.0002	0.00000004
0.05	0.95124..	0.951	+0.0002	0.00000004
0.06	0.94179..	0.942	—0.0002	0.00000004
0.07	0.93244..	0.932	+0.0004	0.00000016
0.08	0.92319..	0.923	+0.0002	0.00000004
0.09	0.91404..	0.914	0.0000	0.00000000
0.1	0.90498..	0.905	0.0000	0.00000000
0.2	0.81980..	0.820	—0.0002	0.00000004
0.3	0.74403..	0.744	0.0000	0.00000000
0.4	0.67703..	0.677	0.0000	0.00000000
0.5	0.61803..	0.618	0.0000	0.00000000
0.6	0.56619..	0.566	+0.0002	0.00000004
0.7	0.52065..	0.521	—0.0004	0.00000016
0.8	0.48062..	0.481	—0.0004	0.00000016
0.9	0.44536..	0.445	+0.0004	0.00000016
1.0	0.41421..	0.414	+0.0002	0.00000004

Błąd średni wynosi tu $\pm$ 0.000239 $b = \pm$ 0.024$^0/_0$ b, największy zaś nie przekracza $\pm$ 0.0005 $b = \pm$ 0.05$^0/_0$ b.

Przyjąwszy ogólną postać wzoru

$$(2) \qquad \sqrt{a^2+b^2} = \psi \, . \, (a+b) \, ,$$

otrzymamy w ten sam sposób, jak wyżej, szereg spółczynników, zestawionych w tabliczce II, gdzie ψ_0 oznacza wartość przybliżoną spółczynnika ψ z dokładnością na 10^{-3}.

Tabliczka II. $\sqrt{a^2+b^2} = \psi . (a+b)$.

$\frac{a}{b}$	ψ	ψ_0	$\Delta\psi = \psi - \psi_0$	$\Delta\psi^2$
0	1.00000	1.000	0.0000	0.00000000
0.0001	0.99990..	1.000	−0.0001	0.00000001
0.0005	0.99950..	1.000	−0.0005	0.00000025
0.001	0.99900..	0.999	0.0000	0,00000000
0.005	0.99503..	0.995	0.0000	0.00000000
0.01	0.99014..	0.990	−0.0001	0.00000001
0.02	0.98058..	0.981	−0.0004	0.00000016
0.03	0.97131..	0.971	+0.0003	0.00000009
0.04	0.96230..	0.962	+0.0003	0.00000009
0.05	0.95357..	0.954	−0.0004	0.00000016
0.06	0.94509..	0.945	+0.0001	0.00000001
0.07	0.93686..	0.937	−0.0001	0.00000001
0.08	0.92888..	0.929	−0.0001	0.00000001
0.09	0.92113..	0.921	+0.0001	0.00000001
0.1	0.91362..	0.914	−0.0004	0.00000016
0.2	0.84983..	0.850	−0.0002	0.00000004
0.3	0.80310..	0.803	+0.0001	0.00000001
0.4	0.76930..	0.769	+0.0003	0.00000009
0.5	0.74535..	0.745	+0.0004	0.00000016
0.6	0.72886..	0.729	−0.0001	0.00000001
0.7	0.71803..	0.718	0.0000	0.00000000
0.8	0.71145..	0.711	+0.0005	0.00000025
0.9	0.70808..	0.708	+0.0001	0.00000001
0.0	0.70710..	0.707	+0.0001	0.00000001

Błąd średni wynosi w tym razie $\pm$ 0.000254 $(a + b)$

$= \pm 0.025\%\ (a+b)$, a największy dochodzi do $\pm 0.0005\ (a+b)$ $= \pm 0.05\%\ (a+b)$.

Celem obliczenia wartości $\sqrt{a^2-b^2}$, przyjąłem następujące wzory:

$$\sqrt{a^2-b^2} = a - \mu b \tag{3}$$

$$\sqrt{a^2-b^2} = \nu\,.\,(a+b)\,. \tag{4}$$

Wartości spółczynników μ i ν zawarte są w tabliczkach III i IV, gdzie μ_0, ν_0 mają znaczenie analogiczne jak wyżej φ_0 i ψ_0.

Tabliczka III. $\sqrt{a^2-b^2} = a - \mu b.$

$\frac{a}{b}$	μ	μ_0	$\Delta\mu=\mu-\mu_0$	$\Delta\mu^2$
1	1.00000	1.000	0.0000	0.00000000
2	0.26794..	0.268	—0.0001	0.00000001
3	0.17157..	0.172	—0.0004	0.00000016
4	0.12701..	0.127	0.0000	0.00000000
5	0.10102..	0.101	0.0000	0.00000000
6	0.08392..	0.084	—0.0001	0.00000001
7	0.07179..	0.072	—0.0002	0.00000004
8	0.06274..	0.063	—0.0003	0.00000009
9	0.05572..	0.056	—0.0003	0.00000009
10	0.05012..	0.050	+0.0001	0.00000001
20	0.02501..	0.025	0.0000	0.00000000
30	0.01667..	0.017	—0.0003	0.00000009
40	0.01250..	0.013	—0.0005	0.00000025
50	0.01000..	0.010	0.0000	0.00000000
100	0.00500..	0.005	0.0000	0.00000000
500	0.00100..	0.001	0.0000	0.00000000
1000	0.00050..	0.0005	0.0000	0.00000000
10000	0.00005..	0.00005	0.0000	0.00000000

Błąd średni wartości, obliczonych z równania (3), wynosi $\pm 0.000204\, b = \pm 0.02\%\, b$, największy zaś $\pm 0.0005 = \pm 0.05\%\, b$.

Tabliczka IV. $\sqrt{a^2-b^2} = \nu\,.\,(a+b)$.

$\frac{a}{b}$	ν	ν_0	$\Delta\nu = \nu - \nu_0$	$\Delta\nu^2$
1	0.00000	0.000	0.0000	0.00000000
2	0.57735..	0.577	+0.0004	0.00000016
3	0.70710..	0.707	+0.0001	0.00000001
4	0.77459..	0.775	−0.0004	0.00000016
5	0.81649..	0.816	+0.0005	0.00000025
6	0.84515..	0.845	+0.0002	0.00000004
7	0.86602..	0.866	0.0000	0.00000000
8	0.88191..	0.882	−0.0001	0.00000001
9	0.89442..	0.894	+0.0004	0.00000016
10	0.90453..	0.905	−0.0005	0.00000025
20	0.95118..	0.951	+0.0002	0.00000004
30	0.96720..	0.967	+0.0002	0.00000004
40	0.97530..	0.975	+0.0003	0.00000009
50	0.98019..	0.980	+0.0002	0.00000004
100	0.99004..	0.990	0.0000	0.00000000
500	0.99800..	0.998	0.0000	0.00000000
1000	0.99900..	0.999	0.0000	0.00000000
10000	0.99990..	1.000	−0.0001	0.00000001

Błąd średni wartości, obliczonych z równania (4), wynosi $\pm 0.000265\,(a+b) = 0.027\%\,(a+b)$, największy $\pm 0.0005\,(a+b) = \pm 0.05\%\,(a+b)$.

P r z y k ł a d y:

1. Obliczmy wartość $\sqrt{(21.75)^2 + (54.23)^2}$,

$$\frac{a}{b} = \frac{21.75}{54\ 23} = 0.4, \text{ z tabliczki I-szej wyjmujemy } \varphi = 0.677, \text{ więc}$$

$$\sqrt{(21.75)^2 + (54.23)^2} = 21.75 + 54.23 \times 0.677 = 58.46.$$

Używając wzoru (2), otrzymalibyśmy 58.43.
Wartość dokładna wynosi 58.4290 . . .

2. Obliczmy wartość $\sqrt{(275.46)^2 + (39.24)^2}$,

$$\frac{a}{b} = \frac{275.46}{39.24} = 7, \text{ z tabliczki III-ciej mamy } \mu = 0.072, \text{ więc}$$

$$\sqrt{(275.46)^2 - (39.24)^2} = 275.46 - 39.24 \times 0.072 = 272.63.$$

Licząc według wzoru (4), otrzymalibyśmy 272.53.
Wartość dokładna wynosi 272.6507 . . .

OBSERWATORYUM ASTRONOMICZNE IM. JANA JĘDRZEJEWICZA
W WARSZAWIE.

Sprawozdanie za rok 1900.

W drugim roku działalności Obserwatoryum [1]) można już było przystąpić do prawidłowych spostrzeżeń, wszystkie bowiem narzędzia zostały wyregulowane i wystudyowane celem wyznaczenia odnośnych stałych.

Ogólny kierunek prac jest z góry wskazany przez typ głównych narzędzi — dwóch refraktorów z przynależnemi mikrometrami; w szczegółach zaś, za wskazówką kierującego, D-ra J. K o w a l c z y k a, wykonywane były następujące prace:

[1]) Porówn. Sprawozdanie za rok 1890 w tomie IV „Wiadomości matematycznych“, str. 90—92.