Kładąc następnie we wzorze (1) zamiast a_1 sumę $a'_1+a'_2+a'_3+a'_4=52.09$ oraz $n=20$, znajdujemy:

$$a_{20}=52.09\,(1+0.05\times1\times5+0.05\times2\times5)=52.09\times1.75=\text{Rb. }91.16.$$

Uwaga. Rozważone tu zagadnienie rozwiązują niektórzy sposobem prostszym, lecz niedokładnym. Tworzą mianowicie iloczyny, mnożąc wysokość renty dla każdej kategoryi za cały przeciąg uczestnictwa (wyznaczoną ze wzorów (1) lub (2)) przez liczbę lat rzeczywistego uczestnictwa w tej kategoryi, następnie zaś sumę otrzymanych w ten sposób iloczynów dzielą przez liczbę lat całkowitego uczestnictwa, przyjmując iloraz za szukaną wysokość renty. W powyższym przykładzie rachunek ten daje następujący wynik:

$$a_{20}=\frac{24\times1.75\times2+36\times1.75\times3+48\times1.75\times8+60\times1.75\times7}{20}$$

$$=\frac{42\times2+63\times3+84\times8+105\times7}{20}=\frac{1680}{20}=\text{Rb. }84.$$

O METODZIE SKRÓCONEJ
WYCIĄGANIA PIERWIASTKU KWADRATOWEGO

podał

B. Niewęgłowski.

Niechaj N będzie liczbą całkowitą $2\,(p+n)$ albo $2\,(p+n)-1$ cyfrową taką, że jej pierwiastek kwadratowy z przybliżeniem na jedność przez niedomiar ma cyfr $p+n$.

Dajmy, że mamy p pierwszych cyfr tej liczby i niechaj a będzie liczbą, z tych cyfr składającą się; pierwiastkiem szukanym będzie:

$$a \, . \, 10^n + x \, ,$$

gdzie x jest liczbą co najwyżej n cyfrową.

Postępując drogą zwykłą, na jakiej wyznaczamy cyfry kolejne pierwiastku, i znalazłszy pierwszych p cyfr, obliczamy resztę R:

$$R = N - a^2 \, . \, 10^{2n} \, .$$

Podzielmy R przez $2a \, . \, 10^n$ i niechaj q będzie ilorazem, r—resztą dzielenia, zatem:

$$R = 2a \, . \, 10^n \, . \, q + r \quad ; \quad r < 2a \, . \, 10^n \, ;$$

stąd:

(1) $$N = a^2 \, . \, 10^{2n} + 2a \, . \, 10^n \, . \, q + r \, .$$

Powiadamy, że

$$(a \, . \, 10^n + q + 1)^2 > N \, .$$

W samej rzeczy, po podstawieniu zamiast N wartości z równania (1) i uproszczeniu, nierówność ta zamienia się na następującą:

$$2a \, . \, 10^n + (q + 1)^2 > r \, ,$$

a to jest prawdą, gdyż reszta r jest mniejsza od dzielnika $2a \, . \, 10^n$.

Szukajmy teraz warunku, przy którym będzie:

$$(a \, . \, 10^n + q)^2 < N \, .$$

Postępując sposobem takim, jak poprzednio, znajdziemy:

(2) $$q^2 < r \, .$$

A zatem, jeżeli ten warunek jest spełniony, liczba $a \, . \, 10^n + q$ jest pierwiastkiem kwadratowym z liczby N z przybliżeniem na jedność przez niedomiar.

Jeżeli zaś

(3) $$q^2 = r$$

będzie dokładnie:

$$(a \,.\, 10^n + q)^2 = N\,.$$

Zbierając to wszystko, powiadamy, że: bez względu na liczbę już znalezionych cyfr, jeżeli, przy postępowaniu wyżej wskazanem, sprawdza się nierówność (2), albo jeżeli zachodzi równość (3), wtedy $a \,.\, 10^n + q$ jest pierwiastkiem kwadratowym liczby N z przybliżeniem na jedność przez niedomiar albo jest pierwiastkiem dokładnym.

Pozostaje zbadać przypadek, w którym jest:

$$q^2 > r\,. \tag{4}$$

Otóż tylko wtedy należy uczynić założenie co do liczby p cyfr, już znanych. Przyjmijmy, że $p = n + 1$.

Skoro już znaleziono p pierwszych cyfr pierwiastku, reszta R jest co najwyżej równa

$$2\,a \,.\, 10^{2n} + b\,,$$

gdzie b jest liczbą, utworzoną z $2\,n$ ostatnich cyfr liczby N.

Otóż jest:

$$\frac{R}{2\,a \,.\, 10^n} \leqslant 10^n + \frac{b}{2\,a \,.\, 10^n}\,;$$

lecz

$$b < 10^{2n} \quad , \quad a > 10^n\,,$$

a zatem:

$$\frac{b}{2\,a \,.\, 10^n} < \frac{1}{2}\,,$$

więc:

$$q \leqslant 10^n\,,$$

skąd wynika, że liczba $q - 1$ ma tylko n-cyfr.

To mając, powiadamy, że, jeżeli spełnia się nierówność (4), wtedy

$$(a \,.\, 10^n + q)^2 > N\,.$$

W samej rzeczy, nierówność ta po uproszczeniu, przy uwzględnieniu równania (1), sprowadza się dokładnie do nierówności (4).

Wreszcie, powiadamy, że

$$(a \,.\, 10^n + q - 1)^2 < N,$$

a po rozwinięciu i uproszczeniu:

$$2a \,.\, 10^n (q-1) + (q-1)^2 < 2a \,.\, 10^n + q + r.$$

W samej rzeczy, ponieważ $q-1$ ma n cyfr, przeto $(q-1)^2 < 10^{2n}$, lecz $2a$ ma co najmniej $n+1$ cyfr, przeto $2a \,.\, 10^n > 10^{2n}$, a stąd $(q-1)^2 < 2a \,.\, 10^n$. Będzie tedy:

$$2a \,.\, 10^n (q-1) + (q-1)^2 < 2a \,.\, 10^n \,.\, q < 2a \,.\, 10^n \,.\, q + r.$$

Uwaga. Dowodzenie powyższe wymaga tylko, aby $2a$ miało $n+1$ cyfr; dość zatem przyjąć tylko, że $a \geqslant 5 \,.\, 10^{n-1}$.

Oto wyniki, do których doszliśmy:

1-o $q^2 < r$; $a \,.\, 10^n + q$ jest pierwiastkiem kwadratowym liczby N z przybliżeniem na 1 przez niedomiar;

2-o $q^2 = r$; $N = (a \,.\, 10^n + q)^2$;

3-o $q^2 > r$ i $a \geqslant 5 \,.\, 10^{n-1}$; $a \,.\, 10^n + q - 1$ jest pierwiastkiem kwadratowym liczby N z przybliżeniem na 1 przez niedomiar.

Obliczenie reszty. W przypadku pierwszym reszta równa się $N - (a \,.\, 10^n + q + r)^2$ lub $r - q^2$; w drugim jest 0; w trzecim jest $N - (a \,.\, 10^n + q - 1)^2$ lub $2a \,.\, 10^n + r - (q-1)^2$.