

# ZAGADNIENIE

## Z TEORJI UBEZPIECZANIA RENT NA WYPADEK NIEZDOLNOŚCI DO PRACY

podał

Z. Czubałski.

---

Rozważamy tu kasę emerytalną, której uczestnicy dzielą się stosownie do swego uposażenia rocznego na cztery kategorie: 1-o pobierających więcej niż 500 rubli rocznie; 2-o pobierających od 300 do 500 r.; 3-o pobierających od 150 do 300 rubli; 4-o pobierających mniej niż 150 rubli rocznie. Uczestnicy ci, pod warunkiem uiszczania do kasy pewnych premij (składek), dopóki zachowują zdolność do pracy, nabywają po upływie 10-ciu lat uczestnictwa, na wypadek niezdolności do pracy, prawa do renty (emerytury), która wynosi stosownie do kategorii płacy uczestnika  $a_1, a_2, a_3$  lub  $a_4$  rubli rocznie po upływie pierwszych 10-ciu lat uczestnictwa, następnie zaś wzrasta w ciągu pierwszego 5-ciolecia (następującego po 10-ciu latach odroczenia) o 5<sup>0</sup>/<sub>100</sub> corocznie, w ciągu drugiego 5-ciolecia o 10<sup>0</sup>/<sub>100</sub> corocznie, w ciągu trzeciego o 15<sup>0</sup>/<sub>100</sub> i t. d., wreszcie, kiedy uczestnik dojdzie do lat 60-ciu, renta staje się płatną, nawet przy zachowaniu zdolności do pracy (renta na starość).

Oznaczenie wysokości renty wyżej określonej, przypadającej uczestnikowi kasy po upływie  $n$  lat uczestnictwa ( $n \geq 10$ ) bądź to wskutek niezdolności do pracy, bądź wskutek dojścia do 60-ciu lat wieku, nie nastręcza żadnych trudności, jeśli tenże uczestnik przez cały przeciąg swego uczestnictwa w kasie pozostawał był w tej samej kategorii płacy, np. w 1-ej. Szukana wysokość renty  $a_n$  wyznacza się w tych warunkach jak następuje:

$$(1) \quad a_n = a_1(1 + 0.05 \times 1 \times 5 + 0.05 \times 2 \times 5 + \dots + 0.05 \frac{n-10}{5} \times 5)$$

albo

$$(2) \quad a_n = a_1 [1 + 0.05 \times 1 \times 5 + 0.05 \times 2 \times 5 + \dots + 0.05 \times \frac{n-10-r}{5} \times 5 + 0.05 \left( \frac{n-10-r}{5} + 1 \right) r].$$

Wzór (1) odpowiada przypadkowi, kiedy liczba  $n - 10$  jest podzielna przez 5, wzór zaś (2) stosuje się w przypadkach, kiedy z podzielenia liczby  $n - 10$  przez 5 otrzymujemy resztę  $r$ . Wartości  $a_n$  układają się zazwyczaj w tablicę, dołączaną do ustawy kasy.

Zadanie staje się nieco zawilszem, jeśli uczestnik w ciągu swego uczestnictwa w kasie przebywał odpowiednio  $n_4, n_3, n_2$  i  $n_1$  lat w kategoriach IV, III, II i I (odwrócony porządek skaźników głoski  $n$  i kategorii odpowiada zwykłemu przebiegowi służby uczestnika). Tym razem wyznaczmy przedewszystkiem wysokości rent  $a'_1, a'_2, a'_3$  i  $a'_4$ , do których uczestnik nabył prawa, uiszczając podczas przebywania w odnośnych kategoriach premie wraz z innymi rówieśnikami tychże kategorii, poczem wysokość  $a_n$  renty, przypadającej uczestnikowi w tych warunkach po upływie  $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$  lat uczestnictwa, znajdziemy, kładąc we wzorze (1) lub (2) sumę  $a'_1 + a'_2 + a'_3 + a'_4$  zamiast  $a_1$ .

Oznaczmy symbolem  $(x)$  uczestnika, wchodzącego do kasy w wieku  $x$  lat, zaś symbolem  $p_{x,m}$  wysokość premii rocznej (płatnej do czasu zachowania zdolności do pracy), jaką winienby uiszczać tenże uczestnik  $(x)$  po upływie  $m$  lat od chwili wstąpienia do kasy, aby zapewnić sobie rentę, wynoszącą 1 rubla rocznie i płatną w warunkach, wyszczególnionych na początku niniejszego.

Co założywszy, przypuśćmy, iż uczestnik  $(x)$ , należący do kategorii IV płacy, opłacał w tejże kategorii w ciągu  $n_4$  lat premie  $a_4 p_{x,0}$ , wyznaczone na początku uczestnictwa ( $m = 0$ ) na cały czas trwania tegoż, w celu zapewnienia sobie renty  $a_4$ . Po upływie  $n_4$  lat uczestnictwa, podczas kiedy uczestnik  $(x)$ , mający wówczas  $(x + n_4)$  lat wieku, ma opłacać i nadal premię roczną  $a_4 p_{x,0}$ , osoba  $(x + n_4)$ , która w tym czasie przystąpiłaby do uczestnictwa z takimi prawami, jakie wówczas posiadał uczestnik  $(x)$ , (t. j. osoba, której zaliczonoby do uczestnictwa  $n_4$  lat, poprzedzających chwilę jej wejścia do kasy), winnaby uiszczać premie  $a_4 p_{x,n_4}$ , aby zapewnić sobie rentę  $a_4$ . Z powyższego wynika, iż uczestnik  $(x)$ , gdyby i po upływie  $n_4$  lat pozostawał w tejże kategorii IV i uiszczał nadal pierwotne premie  $a_4 p_{x,0}$  do 60-ciu lat wieku, względnie do chwili utraty zdolności do pracy, uzyskałby za te premie, w porównaniu ze wzmiankowaną osobą  $(x + n_4)$ , prawo do renty w wysokości  $a_4 \frac{a_4 p_{x,0}}{a_4 p_{x,n_4}} = a_4 \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4}}$  rubli rocznie; wysokość

zatem renty, do której już nabył prawa za uiszczone w ciągu  $n_4$  lat premie, wynosi rocznie :

$$(3) \quad a'_4 = a_4 - a_4 \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4}} = a_4 \left( 1 - \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4}} \right).$$

Tenże uczestnik ( $x$ ) przechodzi następnie do kategorii III i uiszcza premię roczną  $a_3 p_{x,0}$ , obowiązującą dla tej kategorii, której uczestnicy opłacali już byli tę premię w ciągu ubiegłych  $n_4$  lat, wskutek czego nie nabędzie on prawa do renty  $a_3$ , przysługującej jego rówieśnikom, lecz do mniejszej, wynoszącej  $a_3 \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4}}$ , która odpowiada premiom, uiszczonym przez uczestników III kategorii, po upływie  $n_4$  pierwszych lat uczestnictwa w tej kategorii. Stosując tedy do renty  $a_3 \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4}}$  rozumowanie, przeprowadzone powyżej dla renty  $a_4$ , znajdziemy, iż po upływie następnych  $n_3$  lat uczestnictwa w kategorii III uczestnik ( $x$ ) nabył prawa za uiszczone w tym czasie premie, do renty:

$$(4) \quad a'_3 = a_3 \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4}} - a_3 \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4}} \cdot \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4+n_3}} = a_3 \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4}} \left( 1 - \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4+n_3}} \right).$$

Stosując podobne rozumowanie w pozostałych dwu przypadkach, znajdziemy z łatwością następujące wzory, podające wysokości  $a'_2$  i  $a'_1$  rent, do których uczestnik ( $x$ ) nabył prawa, uczestnicząc w ciągu następnych  $n_2$  lat w kategorii II i w ciągu  $n_1$  lat w kategorii I:

$$(5) \quad a'_2 = a_2 \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4+n_3}} - a_2 \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4+n_3}} \cdot \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4+n_3+n_2}} = a_2 \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4+n_3}} \left( 1 - \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4+n_3+n_2}} \right);$$

$$(6) \quad \begin{aligned} a'_1 &= a_1 \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4+n_3+n_2}} - a_1 \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4+n_3+n_2}} \cdot \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4+n_3+n_2+n_1}} \\ &= a_1 \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4+n_3+n_2}} \left( 1 - \frac{p_{x,0}}{p_{x,n_4+n_3+n_2+n_1}} \right). \end{aligned}$$

Mając ze wzorów (3), (4), (5) i (6) wysokości rent  $a'_4$ ,  $a'_3$ ,  $a'_2$  i  $a'_1$ , podstawiamy sumę ( $a'_1 + a'_2 + a'_3 + a'_4$ ) zamiast  $a_1$  we wzorze (1) lub (2) i znajdujemy, jak wyżej, wysokość  $a_n$  całkowitej renty, przypa-

dającej uczestnikowi ( $x$ ) po upływie  $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$  lat uczestnictwa.

Gdyby przebieg uczestnictwa był mniej urozmaiconym, np. sprowadzał się do przejścia uczestnika z IV do III-ej kategorii i pozostawania w tej ostatniej do chwili otrzymania emerytury, należałoby położyć  $n_1 = n_2 = 0$  oraz  $a'_1 = a'_2 = 0$ , czyli odrzucić wzory (5) i (6), jako zbyteczne.

Powyższe wywody objaśnimy przykładem liczebnym, biorąc  $a_1 = 60$  rubli rocznie,  $a_2 = 48$  rubli,  $a_3 = 36$  rubli,  $a_4 = 24$  ruble, oraz stosując tablicę wartości  $p_{x,m}$ , ułożoną na podstawie danych statystycznych o śmiertelności i niezdolności do pracy pośród górników górnośląskich, należących do tamtejszego Związku górniczego (Knappschaftsverein)<sup>1)</sup>.

**P r z y k ł a d:** Uczestnik, mający 30 lat wieku, przy zaliczeniu go do kasy emerytalnej ( $x = 30$ ), stał się niezdolnym do pracy po upływie  $n = 20$  lat uczestnictwa, z których pozostawał był:  $n_4 = 2$  lata w kategorii IV-ej,  $n_3 = 3$  lata w kategorii III-ej,  $n_2 = 8$  lat w kategorii II-ej, wreszcie  $n_1 = 7$  lat w kategorii I-ej. Znaleść wysokość  $a_{20}$  przypadającej mu renty.

Położywszy  $p_{30,0} = 0.47716$ ;  $p_{30,2} = 0.55113$ ;  $p_{30,5} = 0.69544$ ;  $p_{30,13} = 1.46745$ ;  $p_{30,20} = 3.61529$  oraz, jak wyżej,  $a_4 = 24$ ,  $a_3 = 36$ ,  $a_2 = 48$  i  $a_1 = 60$ , znajdziemy z powyższych wzorów:

$$a'_4 = 24 \left( 1 - \frac{0.47716}{0.55113} \right) = 24 \times 0.13422 = \text{Rb. 3.15}$$

$$a'_3 = 36 \cdot \frac{0.47716}{0.55113} \left( 1 - \frac{0.47716}{0.69544} \right) = 36 \times 0.86578 \times 0.31387 = \text{„ 9.78}$$

$$a'_2 = 48 \cdot \frac{0.47716}{0.69544} \left( 1 - \frac{0.47716}{1.46745} \right) = 48 \times 0.68613 \times 0.67484 = \text{„ 22.23}$$

$$a'_1 = 60 \cdot \frac{0.47716}{1.46745} \left( 1 - \frac{0.47716}{3.61529} \right) = 60 \times 0.32516 \times 0.86801 = \text{„ 16.93}$$

$$a'_4 + a'_3 + a'_2 + a'_1 = \text{Rb. 52.09}$$

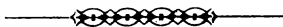
<sup>1)</sup> Tablicę tę oraz inne ułożył autor dla projektowanej kasy emerytalnej robotników górniczych w zagłębiu Dąbrowskiem. Przytoczone w niniejszym artykule wysokości rent wzięto z projektu ustawy tejże kasy.

Kładąc następnie we wzorze (1) zamiast  $a_1$  sumę  $a'_1 + a'_2 + a'_3 + a'_4 = 52.09$  oraz  $n = 20$ , znajdujemy:

$$a_{20} = 52.09 (1 + 0.05 \times 1 \times 5 + 0.05 \times 2 \times 5) = 52.09 \times 1.75 = \text{Rb. } 91.16.$$

*Uwaga.* Rozważone tu zagadnienie rozwiązują niektórzy sposobem prostszym, lecz niedokładnym. Tworzą mianowicie iloczyny, mnożąc wysokość renty dla każdej kategorii za cały przeciąg uczestnictwa (wyznaczoną ze wzorów (1) lub (2)) przez liczbę lat rzeczywistego uczestnictwa w tej kategorii, następnie zaś sumę otrzymanych w ten sposób iloczynów dzielą przez liczbę lat całkowitego uczestnictwa, przyjmując iloraz za szukaną wysokość renty. W powyższym przykładzie rachunek ten daje następujący wynik:

$$\begin{aligned} a_{20} &= \frac{24 \times 1.75 \times 2 + 36 \times 1.75 \times 3 + 48 \times 1.75 \times 8 + 60 \times 1.75 \times 7}{20} \\ &= \frac{42 \times 2 + 63 \times 3 + 84 \times 8 + 105 \times 7}{20} = \frac{1680}{20} = \text{Rb. } 84. \end{aligned}$$



## O METODZIE SKRÓCONEJ WYCIĄGANIA PIERWIASKTU KWADRATOWEGO

podał

**B. Niewęglowski.**

Niechaj  $N$  będzie liczbą całkowitą  $2(p + n)$  albo  $2(p + n) - 1$  cyfrową taką, że jej pierwiastek kwadratowy z przybliżeniem na jedność przez nieomiar ma cyfr  $p + n$ .

Dajmy, że mamy  $p$  pierwszych cyfr tej liczby i niechaj  $a$  będzie liczbą, z tych cyfr składającą się; pierwiastkiem szukanym będzie: