KILKA UWAG
O OKREŚLENIU PRAWDOPODOBIEŃSTWA MATEMATYCZNEGO

podał

S. Dickstein.

1. Definicya klasyczna prawdopodobieństwa matematycznego brzmi [1]).

Prawdopodobieństwem zdarzenia jest stosunek liczby przypadków, sprzyjających temu zdarzeniu, do liczby wszystkich przypadków możliwych, gdy nie ma żadnego powodu do przyjęcia, że jeden z tych przypadków może nastąpić prędzej niż inne, co czyni je dla nas równomożliwemi.

W definicyi tej mieści się założenie podstawowe o przypadkach równomożliwych [2]). Sam Laplace zauważył, że ocena tej równomożliwości stanowi właśnie najdelikatniejszy punkt teoryi prawdopodobieństwa [3]). W samej rzeczy historya rachunku prawdopodobieństwa wykazuje, że nawet tak znakomici uczeni, jak d'Alembert,

---

[1]) Laplace „Théorie analytique des probabilités" (wyd. 3-ie 1820). Livre II. Théorie générale des probabilités p. 181; a także Introduction p. IX, XI.

[2]) To założenie bywa niekiedy pomijanem niewłaściwie w określeniach prawdopodobieństwa.

[3]) U Laplace'a i Strumpfa (Ueber den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Akad. Monach. 1892) ocena równomożliwości polega na zasadzie nieistnienia powodu do przypuszczenia, że jeden z przypadków zajdzie raczej niż inny, gdy tymczasem Kries (Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung) żąda, by ocena ta w przypadkach realnych następowała na podstawie powodu wystarczającego (raison suffisante). Porówn. Czuber „Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie" 1898, str 4

błędnie oceniali niekiedy równomożliwość przypadków w dość prostych zagadnieniach [1]. Z tego powodu wielu teoretyków rachunku prawdopodobieństwa starało się różnemi sposobami usunąć tę trudność, tkwiącą w definicyi prawdopodobieństwa i sprowadzającą nawet niekiedy definicyę tę do prostej tautologii, jeżeli, jak to uczynił Poisson [2], przypadki równomożliwe nazywać będziemy wprost w samem określeniu równoprawdopodobnemi. Wszystkie te jednak sposoby trudności zasadniczej — zdaniem naszem — nie rozwiązują, co prowadzi do wniosku, że w definicyi prawdopodobieństwa matematycznego tkwić musi pewne założenie niezbędne albo hypoteza, nie dająca się żadną miarą usunąć, a występująca w tej lub innej postaci w rozmaitych definicyach [3].

2. Aby znaczenie tej hypotezy uwydatnić, rozpatrzymy najprzód pewien przykład z innej dziedziny pojęć matematycznych, mianowicie z mechaniki. Wiadomo, że mechanika Newtonowska opiera się na trzech aksyomatach, czyli t. zw. „leges motus", z których jeden opiewa, że „każde ciało trwa w stanie spoczynku albo ruchu jednostajnego w kierunku prostoliniowym, o ile siły zewnętrzne nie zmuszają go do zmiany stanu". Jest to aksyomat czyli prawo, zwane (niezupełnie szczęśliwie) prawem bezwładności. Na trudności, tkwiące w sformułowaniu tego prawa (i innych praw mechaniki) zwracano nieraz już uwagę [4], my przypomnimy w tej chwili jednę trudność zasadniczą,

---

[1] Patrz B. Danielewicz „Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych". Warszawa 1896, str. 6.

[2] Definicya Poissona (Recherches sur la probabilité des jugemens etc. 1837) brzmi: „Miarą prawdopodobieństwa niepewnego zdarzenia jest stosunek liczby przypadków, sprzyjających temu zdarzeniu do liczby wszystkich przypadków możliwych, w założeniu, że wszystkie są równomożliwe lub że mają równe prawdopodobieństwa bezwzględne". Por. Czuber l. c.

[3] Do takich należy np. określenie prawdopodobieństwa jako pewnego stopnia lub pewnej części pewności (Bernoulli Ars conjectandi Pars III, wyd. Ostwald's Klassiker № 108, str. 72), albo też jako stosunku „możliwości" do „konieczności" (Gosiewski. Z dziedziny rachunku prawdopodobieństwa. Wiadom. matemat. IV, str. 138; porówn. korespondencyę w tym przedmiocie pp. Feldbluma i Gosiewskiego, tamże str. 269 i 270)

[4] C. Neumann. Ueber die Principien der Galilei-Newtonischen Theorie. 1669; Sir W. Thomson and P. G. Tait „Elements of Natural

polegającą na tem, że mowa w niem o ruchu jednostajnym [1]), którego określenie podane nie jest. Jeżeli nazwiemy, jak zwykle, ruchem jednostajnym ruch, w którym ciało w równych czasach przebiega drogi równej długości, to występuje znowu pytanie, co rozumieć należy przez równość dwóch czasów (przedziałów czasu)? Ponieważ czas mierzymy za pomocą ruchu, a czasami równemi nazywamy czasy, w których ciało ruchem jednostajnym przebiega drogi równe, otrzymujemy więc w rezultacie koło błędne, na pozór bez wyjścia Jedyne wyjście z tego koła znajdziemy, opierając się na hypotezie następującej: „Istnieje [2]) pewien układ (ciało), którego ruch uważamy a priori za jednostajny“. Przyjąwszy tę hypotezę, określamy drogi równej długości, przez punkty tego układu hypotetycznego przebieżone za drogi, odbywające się w czasach równych. A mając równość czasów, w ten sposób określoną, możemy już pojęcie to stosować do wszystkich innych, pozostających w ruchu i badanych przez nas układów. Ten układ hypotetyczny jest układem idealnym i jakby bezwzględnym, a jakkolwiek nie możemy go nigdzie wskazać w świecie fizycznym, jest on jednak mimo to podstawą niezbędną wszystkich naszych dociekań teoretycznych, tkwi w zasadach i twierdzeniach mechaniki i nauk fizycznych. W badaniach astronomicznych i fizykalnych zastępujemy go układem (praktycznym) kuli ziemskiej, obracającej się około osi (albo kuli niebieskiej obracającej się pozornie około osi świata) i będziemy zastępowali tak długo, póki nie znajdziemy dostatecznych powodów na to, by obrotu ziemi za jednostajny nie uważać. Jeżeli kiedykolwiek nastąpi ta doniosła zmiana podstawowego fizycznego układu naszych dociekań, nie zachwieje ona wszakże w niczem teoretycznej prawdziwości dociekań, opartych na koniecznem założeniu układu bezwzględnego badań, idealizu-

---

philosophy“ 1873, p. 65; L. Lange „Ueber die wissenschaftliche Fassung des Galileischen Beharrungsgesetzes“ (Philosophische Studien. II. 1885) i inne. Porówn. też naszą rozprawkę: „Matematyka i rzeczywistość“. Warszawa 1893.

[1]) Pomijamy w tej chwili trudność, polegającą na przyjęciu ruchu prostoliniowego.

[2]) „Istnienie“ należy pojmować tu oczywiście w tem znaczeniu, w jakiem przyjmuje się istnienie linii prostej, kołowej i t. d.

jących wprawdzie rzeczywistość ale niezbędnych do naukowego jej ujęcia [1]).

3. Przejdźmy teraz do właściwego przedmiotu uwag naszych. Otóż w określeniu prawdopodobieństwa zachodzi analogia do tego, co ma miejsce w wysłowieniu prawa bezwładności. W tem ostatniem, pojęciem hypotecznem była równość czasów; w określeniu prawdopodobieństwa pojęciem takiem jest równomożliwość przypadków. Równomożliwości tej, bez popełnienia koła błędnego, określić nie potrafimy; tu, jak i tam, niezbędna jest hypoteza, którą wyrażamy w sposób następujący: „Dla każdej liczby (całkowitej) N istnieje układ zdarzeń lub możliwości wzajemnie się wyłączających, którego wszystkie przypadki uważamy a priori za równomożliwe“ [2]). Jeżeli zgodzimy się na tę hypotezę, to wtedy pojęcie równomożliwości w każdym innym układzie zdarzeń da się teoretycznie (albo formalnie) określić przez odniesienie rozważanego układu do układu hypotetycznego, idealnego. I tu znów układu bezwzględnego nie potrafimy wskazać w świecie fizycznym zdarzeń lub możliwości, ale możemy umówić się, aby zastąpić go np. układem („praktycznym“) zdarzeń, z których każde jest np. wyciągnięciem jednej kuli z urny, zawierającej N takich kul zupełnie równych, z jednakowego materyału wyrobionych, jednakowo gładkich i t. d., albo np. wyrzucenie jednej ze ścianek (jednego numeru) kostki zupełnie prawidłowej i t. d. Ten układ możliwości jest oczywiście tylko obrazem przybliżonym układu idealnego, ale może być wystarczającym do interpretacyi zasad i twierdzeń teoryi prawdopodobieństwa [3]), które jedynie w odniesieniu de układu idealnego zrozumieć się dają. Wprowadziwszy pojęcie układu idealnego, moglibyśmy w ten sposób sformułować definicyę prawdopodobieństwa: „Prawdopodobień-

---

[1]) Wiele analogicznych przykładów idealizacyi, t. j. tworzenia układów bezwzględnych mamy i w innych dziedzinach, np, w teoryi sprężystości, w termodynamice i t d.

[2]) „Istnienie“ należy rozumieć w takiem znaczeniu, jak to objaśniono w przypisku [3]) na str. 46.

[3]) Porówn. uwagi Laplace'a l. c. w ustępie p. t. „Des inégatités inconnues qui peuvent exister entre les chances que l'on suppose égales“. Introduction, p. XLIV.

stwo matematyczne zdarzenia jest to stosunek liczby n przypadków, sprzyjających zdarzeniu, do liczby N wszystkich przypadków możliwych w założeniu, że rozważany układ N zdarzeń pozostaje w odpowiedniości jednoznacznej z układem bezwzględnym N zdarzeń".

4. Ten charakter formalny pojęcia prawdopodobieństwa matematycznego nasuwa myśl, że pojęcie to pozostaje w ścisłym związku z teoryą sądów rozłącznych (disjunctive Urtheile) w logice, na co zwrócił był uwagę F. A. Lange, a głównie Sigwart [1]). Według tego poglądu rachunek prawdopodobieństwa jest rozwiniętą formą matematyczną tworzenia sądów rozłącznych. Wyjaśnimy to na przykładzie.

Niechaj w urnie będzie m kul białych $B_1, B_2 \ldots B_m$ i n kul czarnych $C_1, C_2 \ldots C_n$. Wyciągnięcie każdej pojedyńczej kuli przyjmujemy za zdarzenie tej samej możliwości, co wyciągnięcie każdej innej w układzie, w którym wszystkie kule są jednej barwy (albo liczba kul białych równa się liczbie kul czarnych). W uważanym przypadku wyciągnięcie kuli białej nie jest równowarte wyciągnięciu kuli czarnej, jeżeli $m \lesseqgtr n$. Zdarzenie albo sąd: „wyciągnięta kula jest białą" rozkłada się na m sądów częściowych: kula biała jest albo kulą B_1, albo kulą B_2, ... albo kulą B_m; zdarzenie albo sąd: „wyciągnięta kula jest czarną" rozkłada się na n sądów częściowych: kula czarna jest albo kulą C_1, albo kulą C_2, ... albo kulą C_n. Pierwszy sąd tedy składa się z m wyrazów, drugi z n wyrazów równowartych, pomiędzy sobą i równowartych poprzednim, a liczba wszystkich wyrazów równowartych jest $m+n$. Ten rozkład sądów rozłącznych wyraża się matematycznie w ten sposób: prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli białej jest $\frac{m}{m+n}$, prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli czarnej jest $\frac{n}{m+n}$. „Prawdopodobieństwo nie jest więc wprost sądem rozłącznym, ale wynikiem z takiego sądu w połączeniu z wynikiem z przesłanki, że jesteśmy w zupełnej niewiadomości co do ukazywania się

1) Logik t. II. Tybinga 1878, str. 265 i dalsze.

pojedyńczych wyrazów" [1]). Łatwo pokazać, że wyznaczenie prawdopodobieństwa i w przypadkach bardziej złożonych jest też wyrazem matematycznym rozkładu sądów rozłącznych na sądy częściowe równowarte pomiędzy sobą.

Ze stanowiska logiki formalnej, zdarzenia zastąpić należy sądami, a określenie prawdopodobieństwa matematycznego brzmieć może jak następuje [2]):

„M a t e r y ę s ą d u (U r t h e i l s m a t e r i e) n a z y w a m y $\frac{n}{N}$ — p r a w d o p o d o b n ą, j e ż e l i m o ż e m y j ą r o z w a ż a ć j a k o j e d e n z n w y r a z ó w (p r z y p a d k ó w s p r z y j a j ą c y c h) z p o m i ę d z y N w y r a z ó w (p r z y p a d k ó w m o ż l i w y c h), z k t ó r y c h j e d e n i t y l k o j e d e n j e s t p r a w d z i w y, a l e n i e w i a d o m o k t ó r y".

Zauważmy, że określenie to nie zawiera w sobie wcale wyraźnego wymagania, aby pojęcie prawdopodobieństwa odnosić się miało do zdarzeń przyszłych. Istotnie pojęcie prawdopodobieństwa jest od czasu niezależne i może być zarówno stosowane do sądów i zdarzeń (możliwości) przeszłych, jak i teraźniejszych i przyszłych [3]).

5. Na jednę jeszcze ważną okoliczność pragniemy zwrócić tu uwagę. W określeniu prawdopodobieństwa liczba przypadków N (a zatem i n) jest liczbą skończoną. Jeżeli przyjmiemy, że liczba przypadków jest nieskończoną, to pojęcie prawdopodobieństwa musi być uogólnione, a uogólnienie to opierać się musi na pewnych założeniach. Jeżeli przyjmiemy definicyę [4]), obejmującą w sobie definicyę pierwotną: „P r a w d o p o d o b i e ń s t w o z d a r z e n i a j e s t t o s t o s u n e k z a w a r t o ś c i [5]) r o z m a i t o ś c i p r z y p a d k ó w, s p r z y j a j ą c y c h z d a r z e n i u, d o z a w a r t o ś c i r o z m a i t o ś c i w s z y s t k i c h p r z y p a d k ó w r ó w n o m o ż l i w y c h", to musimy przedewszystkiem rozstrzygnąć pytanie o równomożliwości mnogości nieskończonej zda-

---

[1]) S t r u m p f l. c., str. 49.

[2]) S t r u m p f l. c., str. 48.

[3]) S t r u m p f l. c., str. 43.

[4]) C z u b e r l. c., str. 47.

[5]) **Zawartość rozmaitości odpowiada temu, co w przypadku figur geometrycznych nazywamy polem powierzchni, objętością ciała i t. d.**

rzeń, czemu matematycznie odpowiada ustanowienie odpowiedniości jednoznacznej pomiędzy mnogościami nieskończonemi, albo — inaczej mówiąc—sposób mierzenia „gęstości" elementów zmiennej, którą w zagadnieniu uważamy za niezależną [1]) i przy pomocy której obliczamy powyższe zawartości. Krytyka tych metod jest jeszcze dotąd na porządku dziennym nauki.

6. W notatce niniejszej rozważyliśmy zaledwie najprostsze strony doniosłego pytania: pominęliśmy nietylko stronę psychologiczną i teoretyczno-poznawczą, pozostające poza zakresem naszych rozważań, ale nie dotknęliśmy też krytyki pojęcia prawdopodobieństwa, jakie wysnuwa się z dalszego rozwinięcia i z zastosowań teoryi prawdopodobieństwa: z twierdzenia Jakóba Bernoulli'ego, z prawdopodobieństwa a posteriori, z teoryi błędów spostrzeżeń, ze statystyki, z zastosowań w naukach fizycznych i t. d. Zadaniem naszem był tylko rozbiór pierwotnej definicyi Laplace'a i wskazanie, że przy przyjęciu podanej przez nas hypotezy, definicya ta może być wzięta za pewną podstawę teoryi matematycznej prawdopodobieństwa [2]).

Styczeń 1901 r.

---

[1]) Czuber l. c.

[2]) Porówn. prócz prac wyżej cytowanych, artykuł Poincarégo „Réflexions sur le calcul des probabilités" (Revue générale des sciences, 15 avril 1899).