Zaniedbywana dotąd, a tak ważna mgławica, powinna być stale obserwowaną, obydwiema przytem metodami, wybornie kontrolującemi się wzajemnie, aby w blizkiej przyszłości mieć możność obliczenia elementów drogi. Pomiary zresztą nie są tak niedokładne, jakby przypuszczać należało.

Zjawisko, tu badane, zajmie wybitne miejsce w teoryi budowy wszechświata; Mechanika nieba ważny problemat rozwiązać musi i przypuszczamy, że nie teleskop i spektroskop, ani też fotografia, lecz analiza matematyczna rozstrzygnie, czy krążące masy są natury gazowej, czy też meteorycznej, na podobieństwo pierścieni Saturna, czy też wreszcie są gromadami słońc, jak sławna grupa w Herkulesie lub wiele mgławic, zwanych rozwiązalnemi.

Obserwatoryum astronomiczne im. Jędrzejewicza
dnia 28. II. 1901 r.

R. S. Woodward.

POSTĘPY MATEMATYKI STOSOWANEJ W XIX STULECIU. [1]

Zaszczytny wybór na prezydenta Towarzystwa matematycznego amerykańskiego łączy się z trudnym obowiązkiem przygotowania odczytu, któryby był nietylko interesujący i nauczający dla większości członków, lecz zarazem wskazywał drogi, na jakich oczekiwać możemy postępu w jednej lub w kilku gałęziach naszej ukochanej nauki. Wyrażając wdzięczność za zaszczyt mi uczyniony, mniemam, że najlepiej postąpię, jeżeli wraz z wami rozpatrzę postęp nauk matematycznych w ciągu ubiegłego stulecia. Ale już na samym wstępie odczuwam boleśnie ograniczoność swojej wiedzy i nadzwyczajną rozległość dziedziny, którą mam rozpatrzeć, zwłaszcza, że nie należę do szkoły matematyków, chyba do „sta-

[1]) Mowa prezydenta na zgromadzeniu Towarzystwa matematycznego amerykańskiego, miana 28 grudnia 1899 r., ogłoszona w „Buletynie“ tegoż Towarzystwa i w piśmie „Science“, przełożona za upoważnieniem Autora. *S. D.*

rej szkoły“, nie władającej dostateczną biegłością i wdrożeniem metodycznem. Z powodu tych warunków, przyjąwszy zwykły podział nauki na czystą i stosowaną, ograniczam się w przedstawieniu swem do tej ostatniej. I tu nawet muszę wytknąć sobie pewne granice, gdyż i ta dziedzina jest zbyt rozległa, aby dała się dostatecznie przejrzeć w krótkim przeciągu czasu, jakim rozporządzamy obecnie. Ograniczam się przeto do rozpatrzenia głównych tylko gałęzi matematyki stosowanej, które uznawano już jako takie na początku tego stulecia. Najważniejszemi pomiędzy niemi są: mechanika analityczna, geodezya, astronomia dynamiczna, astronomia sferyczna lub obserwacyjna, teorya sprężystości i hydrodynamika. Ten podział, nieco dowolny, obejmuje niektóre ważne gałęzie, tu niewymienione, ale wyłącza zato niektóre inne równej a nawet większej doniosłości. I tak, teorya przewodnictwa ciepła, którą Fourier rozwinął przy pomocy przedziwnej analizy, jego imię noszącej, może być podciągnięta pod geodezyę fizykalną; teorye dźwięku i światła można uważać za zastosowania teoryi sprężystości i hydromechaniki, gdy znów teorya elektryczności i magnetyzmu i termodynamika, których rozwój właściwy przypada w XIX stuleciu, muszą być prawie zupełnie wykluczone.

Inna trudność dla mówiącego o postępach w tym przedmiocie wynika z technicznych jego właściwości. Piękność i ważność tych badań ujawnia się, gdy występują w swej szacie matematycznej, a ich prawda, gdy stosujemy ich właściwą terminologię. I wyznać należy, że nie nadają się one do celów półpopularnego przedstawienia. By usunąć w części te trudności, używam języka zwykłego, odsyłając do przypisów, gdy idzie o wyjaśnienia matematyczne. Spodziewam się, że w ten sposób uniknę niejasności, wynikających z nieodpowiedniej treściwości oraz z pobieżności wykładu bardziej literackiego.

Koniec XVIII stulecia jest jedną z najważniejszych epok w historyi nauk matematycznych. Na lat jedenaście przed końcem tego stulecia wydane zostało arcydzieło Lagrange'a (1736—1813), jego „Mechanika analityczna“. Dwa pierwsze tomy „Mechaniki niebieskiej“ Laplace'a (1749—1827), bez wątpienia największego z traktatów systematycznych kiedykolwiek ogłoszonych, właśnie były ujrzały światło dzienne. Fourier (1768—

1830), którego teorya matematyczna ciepła miała odegrać tak ważną rolę w matematyce czystej i stosowanej, był wtedy jeszcze wojskowym mężem stanu w Egipcie, gdzie wraz z Napoleonem stał pod piramidami, z których „wieki na nich spoglądały“ [1]. Gauss (1777—1855), którego wraz z Lagrangem i Cauchym (1789—1857) zaliczamy do twórców nowoczesnej matematyki czystej, był wielce obiecującym ale mało jeszcze znanym studentem, któremu „Disquisitiones arithmeticae“ i inne rozprawy miały rychło zapewnić stanowisko dyrektora obserwatoryum getyngeńskiego. Poisson (1781—1840), któremu w znacznej części zawdzięczamy powstanie fizyki matematycznej, rozpoczynał właśnie swoją świetną karyerę studenta i następnie profesora Szkoły politechnicznej. Bessel (1784—1846), którego teorye astronomii obserwacyjnej i geodezyi miały szybko zająć górujące stanowisko w nauce, był jeszcze rachmistrzem domu handlowego w Bremie. Astronomia dynamiczna, ulubiona nauka owego czasu, pozostawała pod wpływem geniuszu Laplace'a, którego przewadze nikt nie mógł się przeciwstawić, gdyż Lagrange i Poisson byli tylko spokojnymi jego spółpracownikami w tej dziedzinie. Mechanikę rozumową, jak ją dziś znamy, mieli uprościć i usystematyzować Poinsot (1777—1859), Poisson, Möbius (1790—1868) i Coriolis (1792—1843), którzy wszyscy wówczas nie mieli jeszcze 25 lat życia. Teoryę undulacyjną światła, w ktorej mieli zasłynąć Young (1773—1829), Fresnel (1788—1827), Arago (1786—1853) i Green (1793—1841), rozpoczęto zaledwie przeciwstawiać teoryi emisyjnej Newtona. Teorya sprężystości albo teorya wysiłów (stress) i odkształceń (strains), miała właśnie być sprowadzona do wzorów określonych w rękach Naviera (1785—1836), Poissona, Cauchy'ego i Lamégo (1795—1870). Astronomia planetarna i gwiazdowa, której poświęcono tyle talentu, czasu i środków, otrzymać miała potężny bodziec w szkole niemieckiej Gaussa, Bessela, Enckego (1791—1865) i Hansena (1795—1874).

[1]) Bombastyczne słowa Napoleona: „Songez que du haut de ces pyramides quarante siècles vous contemplent“; podajemy je tu, gdyż Fourier, Monge i Berthollet byli wówczas obecni.

Postępy mechaniki analitycznej w ubiegłem stuleciu należy mierzyć wysoką miarą, osiągniętą przez Lagrange'a w jego „Mechanice analitycznej". Uczynić pewien postęp ponad to dzieło, uprościć dowody lub opracować szczegóły mogli odważyć się jedynie najbystrzejsi. Lagrange twierdził, że sprowadził mechanikę do matematyki czystej. Rozważania geometryczne i przedstawienia graficzne wygnano z tryumfem z tej nauki i zastąpiono je systematycznemi i nieomylnemi procesami algebry: „Ceux qui aiment l'Analyse — mówi on — verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche et me seront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine". Świat matematyczny nie tylko przyjął ten pogląd Lagrange'a na jego dzieło, lecz poszedł jeszcze dalej, uważając pracę jego za najświetniejszą i najważniejszą w całej nauce matematycznej. Mechanika Lagrange'a, mówi Mach, jest wspaniałem dziełem ze względu na ekonomię myślenia [1].

Mimo to poczyniono istotne udoskonalenia w następstwie. Jak to dziś możemy widzieć bez trudności, Lagrange i jego spółcześni, w gorliwości swej do oparcia mechaniki na zdrowej podstawie analitycznej, zapomnieli o rozwinięciu ważniejszych jeszcze podstaw fizykalnych. Pomiędzy matematykami przeważało przekonanie, że nauka jest już skończoną, skoro daje się wyrazić w równaniach. Poinsot jeden z pierwszych protestował przeciw temu, jakkolwiek dopiero w połowie ubiegłego stulecia uznano wielką ważność podstaw fizykalnych mechaniki. Poinsota ożywiała myśl, że w nauce forma powinna dawać jasny obraz zjawisk i że nie dość kłaść dane i hypotezy do naszego młyna matematycznego, wierząc ślepo w doskonałe umielenie z nich mąki. W rozwinięciu tej myśli, ogłosił dwa najważniejsze traktaty mechaniki XIX stulecia; są niemi: „Eléments de Statique" ogłoszone w roku 1804 i „Théorie nouvelle de la rotation des corps", wydane w roku 1834 [2]. W pierwszem dziele

---

[1] E Mach Die Geschichte der Mechanik, wyd. 3-e Lipsk 1897, str. 458.

[2] Przedstawione Akademii paryskiej w roku 1834. We wstępie do wydania z roku 1852 mówi on: „Voici une question qui m'ont le plus souvent occupé, et si l'on me permet de parler ainsi, une des choses que j'ai le plus désiré de savoir en dynamique"... „Tout le monde se fait une idée claire du

rozwinął on piękną i pełną pożytku teoryę par sił i ich składania oraz warunki równowagi, jak je dzisiaj podają powszechnie dzieła elementarne. W drugiem dziele podejmuje głębsze pytanie, dotyczące jasnego przedstawienia ruchu ciała stałego. Zagadnienie to traktowali już dawniej sławni: Euler, d'Alembert, Lagrange i Laplace, i trzeba było niemało odwagi, aby mieć nadzieję wprowadzenia ulepszeń do tej teoryi. Poinsot miał tę nadzieję, którą uwieńczyło nadzwyczajne powodzenie. Jego mały tomik o stu dwudziestu pięciu stronicach jest dotąd jednym z najpiękniejszych wzorów wykładu matematycznego i mechanicznego, a powtarzane przezeń ostrzeżenie: „gardons nous de croire qu'une science soit faite, quand on l'a réduite à des formules analytiques“ znalazło w jego pracy zupełne usprawiedliwienie. Dał on nam to, co możnaby nazwać geometryą opisującą kinetyki obracającego się ciała stałego: „l'image sensible de cette rotation“; wyjaśnił teoryę momentów bezwładności i osi głównych, podał interpretacyę tego, co dziś nazywamy zachowaniem energii i zachowaniem momentów obrotu układów, w ruch wprawionych, i przeszedł nawet Laplace'a w przedstawieniu teoryi płaszczyzny niezmiennej.

Innem dziełem elementarnem pierwszorzędnego znaczenia dla postępu mechaniki był „Traktat mechaniki“ Poissona. Uczony ten należał do Lagrange'owej szkoły analistów, ale oddawał się z takim zapałem studyom w fizyce matematycznej, że wszystkie swe prace matematyczne podejmował pod wpływem i w kierunku zastosowań praktycznych. Prostota i jasność wykładu uczyniły dzieła jego łatwemi i pociągającemi, a jego „Traktat mechaniki“ jest jeszcze dziś jedną z książek najbardziej pouczających. On to pierwszy zwrócił uwagę na znaczenie zasady jednorodności w mechanice [1]), zasady, która rozwinięta w Fourierowej teoryi wymiarów [2]), wykazała wielką swoją użyteczność w dru-

---

mouvement d'un point... Mais, s'it s'agit du mouvement d'un corps de grandeur sensible et de figure quelconque, il faut convenir qu'on ne s'en fait qu'une idée très obscure“.

[1]) Patrz „Traité de mécanique“ art. 23 Tomu I-go wyd. 2-gie 1833.

[2]) „Théorie analytique de la Chaleur“. Paryż 1822.

giej połowie stulecia. Wpływ prac Poissona w mechanice właściwej, podniesiony przez jego rozprawy we wszystkich działach fizyki matematycznej, ujawnia się prawie na wszystkich stopniach postępu od początku stulecia.

Z innych dzieł, które utorowały drogę dzisiejszemu udoskonalonemu stanowi mechaniki, należy wymienić „Cours de Mécanique“ [1]) Ponceleta (1788—1867), „Traité de Mécanique des corps solides et de l'effet des machines“ [2]) Coriolisa i „Lehrbuch der Statik“ [3]) Möbiusa. Dwóm pierwszym z tych autorów zawdzięczamy utrwalenie pojęć i terminologii mechaniki; interesujący zaś traktat Möbiusa wprowadza nowy typ pomysłów mechanicznych, który rozwinęli następnie Sir W. R. Hamilton (1805—1865), Grassmann (1809—1877) i inni pod nazwą ogólną analizy wektoryalnej. Zaraz po tym rozwoju pojęć elementarnych, który wyżej przedstawiliśmy, przybywa ważne udoskonalenie analizy Lagrange'owej, które zawdzięczamy Hamiltonowi [4]). Te to uzupełnienia Hamiltona, rozszerzone i rozjaśnione przez Jacobi'ego, Poissona i innych [5]), doprowadziły mechanikę analityczną do dzisiejszego stopnia doskonałości pod względem metod matematycznych. Przy pomocy tych metod każde zagadnienie mechaniczne może być wyrażone jednym z trzech charakterystycznych, wzajemnie na siebie przekształcalnych sposobów, a mianowicie: przez równania d'Alemberta, przez równania Lagrange'a i przez równanie Hamiltona. Każdy z tych sposobów przedstawia specyalne korzyści w szczegółowem zastosowaniu i każdy z nich — powiedzieć można — streszcza w kilku wierszach pisma lub druku wyniki usiłowań

---

1) Metz 1826.

2) Paryż 1829.

3) Lipsk 1837.

4) „On a general method in dynamics“ Philosophical Transactions 1834—1835.

5) Zarys historyczny tych uzupełnień i zupełną listę bibliograficzną rozpraw, dotyczących tego przedmiotu (aż do r 1857), znaleść można w pięknym referacie Cayley'a: „Recent progres in dynamics“ ogłoszonym w „Report of the British Association for the advancement of science for 1857“.

więcej niż dwudziestu wieków nad sformułowaniem zjawisk materyi i ruchu.

Taki był stan mechaniki, gdy uczyniono największe odkrycie fizykalne stulecia, t. j. odkrycie prawa zachowania energii. Aby dać odpowiednie wyrażenie temu prawu, dość było zwrócić się do „Mechaniki analitycznej“, w której Lagrange przygotował całkowicie niezbędny do tego aparat. W istocie, idee i metody Lagrange'a tak były do tego celu przystosowane, że nie tylko dostarczyły punktów wyjścia do najważniejszych odkryć [1]) drugiej połowy stulecia, lecz dały zarazem kryterya, przy pomocy których zjawiska mechaniczne w ogólności dają się najłatwiej określać i interpretować.

Ze specyalnych gałęzi mechaniki analitycznej, które rozpoczęły swój rozwój w tem stuleciu, najważniejszą jest nauka, znana pod nazwą teoryi funkcyi potencyalnej. Funkcya ta występuje poraz pierwszy w analizie matematycznej w rozprawie Lagrange'a [2]) z roku 1777, jako wyrażenie funkcyi perturbacyjnej lub funkcyi sił; następnie ukazuje się w rozprawie Laplace'a [3]) z roku 1782. W tej to rozprawie mamy poraz pierwszy t. zw. równanie Laplace'owe [4]) w spółrzędnych biegunowych. W roku 1787 toż samo równanie widzimy już w zwykłej postaci [5]), wyrażone przez spółrzędne prostokątne.

Dziwnem wydawać się może, zwłaszcza w świetle końca stulecia, że upłynęło prawie lat trzydzieści, zanim uogólniono równanie Laplace'owe. Laplace znalazł tylko połowę prawdy, mianowicie, że równanie to stosuje się do punktów zewnętrznych

---

[1]) Zwłaszcza w teoryi elektryczności i magnetyzmu i w termodynamice.

[2]) Nouveaux Mémoires de l'Académie des sciences et belles lettres de Berlin, patrz uwagi Heinego w „Handbuch der Kugelfunctionen“ t. II, str. 342.

[3]) Mémoires de Paris z r. 1782, ogłoszone w 1785 roku.

[4]) $\Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$; $\Delta^2 V$ nazywa się laplasyanem funkcyi V.

[5]) Mémoires de Paris z r. 1787, ogłoszone w 1789 roku.

względem mas przyciągających [1]. Poisson znalazł [2]) drugą połowę w r. 1813. To też zaszczyt, przywiązany do odkrycia tego ważnego twierdzenia, dzielą pomiędzy siebie obaj ci uczeni, i mówimy teraz o równaniu Laplace'a oraz o równaniu Poissona, jakkolwiek to drugie obejmuje w sobie pierwsze.

Następują teraz świetne przyczynki Georges'a Greena pod skromnym tytułem: „An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism" [3]. W tej rozprawie poraz pierwszy spotykamy termin: funkcya potencyalna. Tu też podano znakomite twierdzenie matematyki czystej, powszechnie odtąd znane pod nazwą twierdzenie Greena, a będące prawdopodobnie najważniejszem narzędziem badania w całej dziedzinie fizyki matematycznej.

Możemy dziś wszyscy, przynajmniej ogólnie, zrozumieć znaczenie pracy Greena i postęp dalszy od chwili jej ukazania się w r. 1828. Lecz aby należycie ocenić tę pracę i rozwój nauki, jak jej zawdzięczamy, musimy wiedzieć, jak przedstawiały się Greenowi nauki matematyczno-fizyczne w tym czasie i z jakiem subtelnem ich poczuciem ogłaszał swoje odkrycia. „Należy poczytać — mówi on w przedmowie — za pocieszającą dla analistów okoliczność, że w czasie, gdy astronomia w tym stanie doskonałości, jaki osiągnęła, mało pozostawia miejsca na dalsze zastosowania jej sztuki, pozostałe nauki fizyczne codziennie coraz bardziej jej się poddają"... „Jeżeliby ta praca mogła ułatwić zastosowanie analizy do jednej z najbardziej interesujących gałęzi nauk fizycznych, autor byłby szczodrze wynagrodzony za trudy, w nią włożone; ma on nadzieję, że ze względu trudność przedmiotu matematycy czytać ją będą z pobłażliwością, jeżeli zwłaszcza uwzględnią, że pracę tę wykonał człowiek młody, który skromne wiadomości swoje zdobywał w przerwach pracy zawodowej, mało sprzyja-

[1]) Równanie Laplace'a jest $\Delta^2 V = 0$, równanie Poissona $\Delta^2 V + 4\pi k\rho = 0$; V jest potencyałem, ρ gęstością w punkcie (x, y, z); k stałą grawitacyjną.

[2]) Nouveau Bulletin... Société Philomatique, Paryż, grudzień 1813.

[3]) Nottingham, 1828.

jącej rozwojowi umysłowemu". Gdzież w historyi nauki znajdziemy piękniejszy przykład skromności, połączonej z taką wiedzą?

Wykończenie teoryi potencyalnej, o ile ona zależy od Newtonowskiego prawa odwrotnych kwadratów, zawdzięczamy G a u s s o w i, jakkolwiek po nim cały zastęp autorów poczynił wiele ważnych uzupełnień w szczegółach. W samem zaraniu stulecia rozpoczął G a u s s pracę nad zaprzątającym wówczas umysły problematem przyciągań i odpychań. Panowało wówczas, zdaje się, wśród fizyków matematycznych przeświadczenie, że wszystkie zjawiska mechaniczne należy przypisać przyciąganiom i odpychaniom pomiędzy cząsteczkami materyi a cząsteczkami „płynów" (fluidów), złączonych z materyą. Trudności, tkwiące w pojęciu działania z odległości, na szczęście nie niepokoiły wtedy umysłów; kto wie, czy prace ówczesnych uczonych byłyby płodniejszemi, gdyby starali się oni byli te trudności usunąć. Pierwsza rozprawa G a u s s a w tym przedmiocie dotyczy przyciągań i odpychań mas elipsoidalnych [1]) jednorodnych i nosi datę r 1813. W tej to rozprawie podał on pewną liczbę pięknych twierdzeń [2]), które znajdujemy obecnie w książkach elementarnych o funkcyi potencyalnej. W roku 1829 ogłosił G a u s s teoryę postaci cieczy w stanie równowagi [3]), a w roku 1832 jednę z najważniejszych rozpraw stulecia o natężeniu siły magnetycznej ziemskiej, wyrażonej w tem,

[1]) „Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum" 1813, patrz G a u s s, Werke V. Getynga 1877.

[2]) Zwłaszcza twierdzenie, dające wartości całki powierzchniowej

$$\int \frac{\cos(s, n)}{s^2}\, dS$$

gdzie dS jest elementem powierzchni zamkniętej, s odległością elementu dS od punktu stałego, n oznacza normalną do powierzchni w dS prowadzi ono do ważnego twierdzenia o całce powierzchniowej przyspieszenia normalnego, mianowicie:

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, dS.$$

[3]) Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii 1829. Werke V.

co dziś nazywamy jednostkami bezwzględnemi [1]). W sześć lat potem ogłosił przedziwną teoryę magnetyzmu ziemskiego [2]) i zastosował ją do wszystkich istniejących danych obserwacyjnych. Jego teorya jest świetnem zastosowaniem teoryi potencyalnej, a całe badanie jednym z najpiękniejszych i najbardziej użytecznych przyczynków do fizyki matematycznej stulecia. To też on był najbardziej powołany do uzupełnienia teoryi potencyału Newtonowskiego w zbiorze twierdzeń, ogłoszonych w rozprawie z roku 1840 [3]). Jest to zawsze jeszcze praca podstawowa w tym przedmiocie i musi być uważana za najdoskonalszy wzór wykładu matematycznego. Co do jasności i wytworności, prace Gaussa były niezrównane. W jego ręku, powiada Todhunter [4]), łacina i niemczyzna współzawodniczyły z francuzczyzną pod względem jasności i precyzyi. „Alles gestaltet sich neu unter seinen Händen"—takie świadectwo uznania złożył mu Bessel [5]), a przez dwie generacye rósł podziw dla tego geniuszu i tej pracowitości, przez które Gauss stał się jedną z najznakomitszych postaci XIX stulecia.

Znaczenie teoryi funkcyi potencyalnej z punktu widzenia historycznego polega nie tyle na bogatem żniwie rezultatów, jakie przyniosła dziedzinie nauki o ciążeniu, ile na bezpośredniem pobudzeniu rozwoju innych gałęzi fizyki matematycznej. Albowiem punkty widzenia i metody analityczne funkcyi Newtona dały się przystosować ze świetnem powodzeniem do interpretacyi prawie wszystkich gatunków zjawisk mechanicznych. I tak zajmujemy się dziś wieloma gatunkami potencyałów: potencyałem logarytmowym, prędkości, przemieszczenia, elektrycznym, magnetycznym,

---

[1]) „Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata". Werke V.

[2]) „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus". Werke V.

[3]) Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs—und Abstossungskräfte. Werke Bd. V.

[4]) „History of the Theories of Attraction and Figure of the Earth". Vol. II, str. 235.

[5]) W liście do Olbersa 1818.

termodynamicznym i t. p., a każdy z nich pozostaje w mniej lub więcej ścisłej analogii z funkcyą Newtonowską.

W ostatnim paragrafie swego dzieła: „Exposition du Système du monde", Laplace mówi o niezmiernych postępach, jakie uczyniła astronomia od chwili, gdy teoryę geocentryczną zastąpiono teoryą heliocentrycznego układu słonecznego. Ten postęp jest zwłaszcza godnym zastanowienia, jeżeli zważymy, że zależał on od tak upokarzającego dla człowieka odkrycia drobnych rozmiarów i niepozornej roli naszej planety. Lecz zgadzamy się z Laplacem, gdy mówi: „Les resultats sublimes auxquels cette découverte l'a conduit son bien propres à le consoler du rang qu'elle assigne à la Terre, en lui montrant sa propre grandeur dans l'extrême petitesse de la base qui lui a servi pour mesurer les cieux". Cała astronomia jest ugruntowana na poznaniu wielkości, postaci i własności mechanicznych ziemi i dla tego nie dziwi nas wcale, że większa część badań matematycznych stulecia należy do dziedziny geodezyi. Powstała w połowie XVIII stuleciu, dzięki Clairautowi [1]) i spółczesnym uczonym, wzbogacona przez Laplace'a i Legendre'a [2]) (1752—1833) w ostatniej części tego stulecia, usystematyzowana i rozwinięta do wysokiego stopnia przez geodetów niemieckich, a zwłaszcza przez nieporównanego Bessela [3]), nauka ta zajmuje jakby przodownicze stanowisko pod względem doskonałości metod i ścisłości wyników. Wzrost tej nauki w ciągu stulecia był tak wielki, że niektórzy nowsi autorowie uważali za pożądane podzielenie jej na dwie części: na geodezyę matematyczną i fizykalną, jakkolwiek obie części jedynie matematycznemi być mogą [4]).

[1]) Dzieło Clairauta: „Théorie de la figure de la Terre" było pracą pionierską w geodezyi fizykalnej.

[2]) Imię Legendre'a jest sławnem w geodezyi ze względu na piękne jego twierdzenie, przy pomocy którego rozwiązanie trójkąta geodezyjnego jest tak łatwem jak trójkąta płaskiego.

[3]) Rozprawy Bessela w astronomii i geodezyi są zebrane w dziele: „Abhandlungen von F. W. Bessel", herausgegeben von Rudolf Engelmann. Trzy tomy, Wilhelm Engelmann 1875.

[4]) Patrz jako przykład: „Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodaesie" von D-r F. R. Helmert. Lipsk. Teubner. Theil V. 1880. Theil II. 1884.

W jednym z dawniejszych wykładów rozważyłem dość szczegółowo najwybitniejsze zagadnienia matematyczne, występujące przy badaniu ziemi [1]), i dlatego w obecnym przeglądzie mogę ograniczyć się na szybkiem streszczeniu zagadnień mniej uderzających ale może bardziej ukrytych, i na krótkiej wzmiance o zagadnieniach poprzednio już rozważanych.

Przyjmując dogodną nomenklaturę geologów, możemy uważać ziemię za złożoną z czterech części: atmosfery, hydrosfery lub oceanów, litosfery czyli skorupy, oraz jądra. Zaczynając od pierwszej, spostrzegamy odrazu, że w ciągu stulecia uczyniono w badaniu zjawisk kinetycznych atmosfery postęp większy, niż w tem, co możnaby nazwać jej zagadnieniami statycznemi. Widocznem jest wprawdzie, że zjawiska meteorologiczne są zasadniczo kinetyczne; ale możnaby mniemać, że pytania, dotyczące ciśnienia, temperatury i rozkładu mas w atmosferze, można rozwiązać dość przybliżenie przy pomocy rozważań czysto statycznych. Zdaje się, że takim był pogląd L a p l a c e'a, który pierwszy pytania te badać był począł z należytym aparatem naukowym. Badał atmosferę ziemską, jakby się badało powłokę gazową nieświecącej planety [2]), i doszedł do wniosku, że atmosfera jest ograniczona powierzchnią obrotową soczewkowatą, której średnice biegunowa i równikowa są równe 4,4 i 6,6 razy wziętej średnicy ziemskiej, a której objętość jest 155 razy większa od objętości ziemi [3]). Jeżeli ten wniosek jest prawdziwy, to atmosfera powinna by sięgać do wysokości 26000 mil angielskich na równiku i 17000 mil na bie-

---

[1]) „On the Mathematical Theories of the Earth" (O teoryach matematycznych ziemi), mowa wice-prezydenta, odczytana w Sekcyi astronomii i matematyki Amerykańskiego Stowarzyszenia postępu nauk 1889. Proceedings of A. A. A. S. za rok 1889,

[2]) Mécanique Céleste. Livre III. Chap. VII i Livre X. Chap. I - IV.

[3]) Równanie przecięcia południkowego tej powłoki, podane przez L a p l a c e'a jest:

$$x^{-1} - x_0^{-1} + \frac{1}{2} \alpha x^2 \cos^2 \varphi = 0,$$

gdzie $x = \frac{r}{a}$, r jest promieniem wodzącym, mierzonym od środka ziemi, a jest średnim promieniem ziemskim; α jest stosunkiem przyśpieszenia odśrodkowego do przyśpieszenia grawitacyjnego na równiku; φ jest szerokością geogunach. Zdaje się wszakże, że Laplace nie próbował wyznaczyć rozkładu ciśnienia i gęstości całej masy atmosfery wewnątrz tej powłoki, i nie wiem, czy kto z późniejszych badaczy podał zadawalające rozwiązanie tego pozornie prostego zagadnienia [1]).

---

centryczną; x_0 wartością ilości x dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Problemat o własnościach statycznych atmosfery można wyrazić przy pomocy trzech równań, mianowicie:

$$\Delta^2 V + 4\pi k\rho - 2\omega^2 = 0 \quad , \quad dp = \rho d V \quad . \quad p = f(\rho, \tau) \, .$$

Tu V jest potencyałem punktu atmosfery: p, ρ, τ oznaczają odpowiednio ciśnienie, gęstość i temperaturę w tym samym punkcie, k jest stałą grawitacyjną, ω prędkością kątową ziemi. W poprzedniem równaniu Laplace'a zaniedbano masę atmosfery w porównaniu z masą ziemi Zasadnicza trudność zagadnienia tkwi w nieznajomości postaci funkcyi $f(\rho, \tau)$.

[1]) Szukałem rozwiązania tego zagadnienia, głównie mając na celu wyznaczenie masy atmosfery. Klasa rozwiązań, czyniących zadość warunkom mechanicznym z następujących u założeń, otrzymuje się tak: Przyjmijmy $p = c\rho^m$, co obejmuje w sobie i związek adiabatyczny $p = c\rho^{1,41}$ i sławny związek Laplace'a $\frac{\partial p}{\partial \rho} = 2c\rho$; przyjmijmy prawo Charles'a i Gay-Lussaca $p = C\rho\tau$; będzie:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^{\frac{m}{m-1}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{Q}{Q_0},$$

gdzie, jak wyżej: $Q = x^{-1} - x_0^{-1} + \frac{1}{2} a x^2 \cos^2 \psi$; Q_0 jest wartość wielkości Q dla $x = 1, \varphi = \frac{\pi}{2}$; p_0, ρ_0, τ_0 są wartości ilości p, ρ, τ w tymże punkcie $\left(x = 1, \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$. Przy stosowaniu prawa adiabatycznego poprzedni wzór na daje masę atmosfery równą $\frac{1}{1200}$ całej masy ziemi. Lecz ponieważ prawo adiabatyczne daje za niżkie ciśnienie, gęstość i gradyent temperatury, przeto może być to tylko uważane jako granica wyższa masy atmosfery. Granica niższa równa $\frac{1}{1000000}$ masy ziemi wynika z przyjęcia, że masa atmosfery równa się masie wody albo rtęci, dającym równoważne ciśnienie na powierzchni ziemi. [Porówn. M. Smoluchowski O atmosferze ziemi i planet. Lwów 1900. Sprawozdanie o tej rozprawie znajduje się w niniejszym zeszycie „Wiadomościach matematycznych", t. V, str. 80. *S. D.*].

Z drugiej strony charakter ogólny krążenia atmosferycznego i jego konsekwencye meteorologiczne poddano badaniom matematycznym, jakkolwiek nie dały się one dotąd całkowicie sprowadzić do ścisłych wyznaczeń ilościowych. Pionierem w tej pracy był nasz rodak William Ferrel (1817—1891) [1]), który—podobnie jak Green — łatwo mógł być stracony dla nauki z powodu ciemnoty swego pierwotnego otoczenia. Jest to fakt ciekawy, jakkolwiek pożałowania godny i wyjaśniający zarazem szczególną lękliwość Ferrela oraz przysłowiową obojętność publiczną dla odkryć, nie dających się opatentować, że mąż, który poznał gruntownie „Principia“ i „Mechanikę niebieską“, który pierwszy założył podstawy teoryi krążenia atmosferycznego, nie znalazł lepszego organu do ogłoszenia swych badań nad łamy półpopularnego dziennika, poświęconego medycynie i chirurgii. W takim to bowiem dzienniku ukazała się praca Ferrela: „Essay on the Winds and Currents of the Ocean“ [2]) w roku 1856. Od tego czasu nauka uczyniła znakomity postęp, dzięki Ferrelowi, Helmholtzowi (1821—1894), Oberbeckowi, Bezoldowi i innym [3]), tak że możemy mieć nadzieję, iż pozornie nieprawidłowe zjawiska pogody dadzą się ująć w wyrażenia matematyczne, podobnie jak zjawiska przypływów i odpływów oceanicznych, jak zjawiska magnetyzmu ziemskiego, które poddały się potędze analizy harmonicznej.

Jeżeli przejdziemy od atmosfery do hydrosfery, to przedewszystkiem zwracają na siebie uwagę naszą pewne pytania, dotyczące istoty i właściwości wspólnej obydwóm powierzchni, zwanej pospolicie powierzchnią morza. Najważniejszemi z nich są te,

---

[1]) Biografię, szkic autobiograficzny i listę prac Ferrela znaleść można w „Biblographical Memoirs of the National Academy of Sciences III, p. 265 - 309. Waszyngton 1895.

[2]) W „Nashville Journal of Medecine and Surgery“ październik i listopad 1856.

[3]) Najważniejsze rozprawy o tym przedmiocie, zebrane i przełożone przez prof. Clevelanda Abbe, ogłosiła „Smithsonian Institution“ pod tytułem: „The Mechanics of the Atmosphere“. Smithsonians Miscellaneous Collections № 843. Waszyngton 1891.

które możemy wyróżnić jako zjawiska statyczne i kinetyczne powierzchni morza. Ponieważ wahania odpływów i przypływów morza należą właściwie do hydrokinetyki, więc zajmiemy się tu zjawiskami statycznemi.

Po wprowadzonej przez Laplace'a płaszczyznie stałej, za najważniejszy przyczynek do teoryi geodezyi fizykalnej uważać musimy znakomitą rozprawę Sir George'a Gabriela Stokesa: „On the variation of gravity at the surface of the Earth“ [1]). Przyjąwszy hypotezę pierwotnego stanu płynnego albo ogólniejszą hypotezę rozkładu symetrycznego warstw ziemi z rosnącą ku środkowi gęstością, pokazał był Laplace, że przyśpieszenie ciężkości w przejściu od równika ku biegunowi rośnie w stosunku kwadratów wstaw szerokości [2]). Ten wniosek zgadzał się dobrze z faktami obserwacyi i Laplace zadowolił się przeświadczeniem, że hypoteza jego została stwierdzona. Lecz Stokes okazał, że prawo zmienności przyśpieszenia ciężkości na powierzchni morza jest całkowicie określone przez tę powierzchnię, bez względu na sposób rozmieszczenia masy ziemi. Jest to, jak dziś widzimy, bezpośredni wynik teoryi funkcyi potencyalnej, albowiem powierzchnia morza jest powierzchnią równego potencyału; a skoro poznano, że jest prawie sferoidalną, to wzór Laplace'a wynika już z tego, zupełnie niezależnie od wszelkiej hypotezy, a tylko z samego prawa ciążenia. Lecz gdy wzór Laplace'a i argumenty, na których go oparł, nie rzucały wcale światła na rozmieszczenie masy ziemi, to łatwe rozwinięcie tych metod prowadzi do wzoru wskazującego, że każda znaczniejsza różnica w równikowych momentach bezwładności wytworzyłaby zmianę przyśpieszenia grawitacyjnego, zależną od długości miejsca obserwacyi [3]).

---

[1]) Ogłoszone w kwietniu 1849 r.; p. „Mathematical and Physical papers“ by G. G. Stokes. Cambridge University Press. 1883. Vol. II.

[2]) Wzór Laplace'a jest: $g = \alpha + \beta \sin^2 \varphi$, gdzie α jest wielkością przyśpieszenia na równiku, β jest ilością stałą, φ jest szerokością geograficzną miejsca.

[3]) Patrz Helmert. Geodäsie. II, p. 74. Wyrażenie przyśpieszenia jest:

$$g = \alpha + \beta \sin^2 \varphi + \gamma \cos^2 \varphi \cos 2\lambda ,$$

gdzie α, β, γ są stałe, φ—szerokość, λ—długość geograficzna miejsca, w stałej γ mieści się, jako czynnik, różnica momentów bezwładności na równiku.

Otóż za pomocą samych obserwacyj wahadła można dojść do wniosku, że masa ziemi jest rozmieszczona prawie symetrycznie względem równika oraz względem osi obrotu.

Interesującem wielce pytaniem, ściśle związanem z przyśpieszeniem ciężkości na morzu, jest pytanie, dotyczące masy ziemi, jako całości. Przed dwoma laty ogłosiłem niewielką rozprawę, w której podałem iloczyn średniej gęstości ziemi przez stałą grawitacyjną, wyrażony przez spółczynniki wzoru Laplace'a i wymiary ziemi [1]). Okazało się, że iloczyn ten można z danych istniejących obliczyć łatwo do pięciu cyfr dziesiętnych, z niepewnością na jednę lub dwie jedności ostatniego znaku; tym sposobem z równą dokładnością możnaby wyznaczyć i masę ziemi, gdyby zarówno dobrze obliczona była stała grawitacyjna. W późniejszej rozprawie, przedstawionej temu Towarzystwu, wyjaśniono, że w mowie będący iloczyn równa się liczbie 3π, podzielonej przez kwadrat czasu obrotu nieskończenie małego satelity, krążącego naokoło ziemi tuż przy równiku, o ile by nie było atmosfery, stawiającej przeszkodę jego biegowi. Czas peryodyczny takiego ciała wyniósłby 1 godzinę, 24 minuty i 20,9 sekundy. Zwracamy uwagę na ten przedmiot w nadziei, że może jakiś matematyk zajmie się zbadaniem, czy pomiędzy stałą grawitacyjną a gęstością

[1]) Patrz „The Astronomical Journal" № 424. Iloczyn ten wyraża się wzorem:

$$k\rho = \frac{2\pi}{T^2} + \frac{3(\alpha s_1 + \beta s_2)}{4\pi a\sqrt{1-e^2}},$$

gdzie k jest stałą grawitacyjną, ρ—średnią gęstością ziemi, T liczbą sekund średnich słonecznych w dniu gwiazdowym, α i β są dwie pierwsze stałe we wzorze $g = \alpha + \beta \sin^2\varphi + \gamma \cos^2\varphi \cos 2\lambda$ na przyśpieszenie siły ciężkości w miejscu na powierzchni morza, którego szerokością jest φ, długością λ; a jest połową osi większej, e mimośrodem sferoidy ziemskiej,

$$s_1 = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1-e^2}{2e}\log\frac{1+e}{1-e}\right\};\quad s_2 = \frac{1-e^2}{4e^2}\left\{\frac{2e}{1-e^2} + \log\frac{1-e}{1+e}\right\}.$$

Z wzoru tego otrzymujemy wartość liczebną:

$$k\rho = 36797 \cdot \frac{10^{11}}{(\text{sek})^2}.$$

średnią ziemi nie jest możliwy inny związek, dający się stwierdzić obserwacyą; albo też że jakiś fizyk zbada, czy stała grawitacyjna daje się wyznaczyć z dokładnością pięciu znaków dziesiętnych.

Litosfera jest dziedziną specyalną geologa i dlatego możemy przejść do jądra, stanowiącego część główną masy ziemskiej. Wiele czasu i uwagi poświęcono badaniu ważnych ale powikłanych zagadnień, które geometrowie pierwszej części stulecia przekazali swoim następcom. Lubo usunięto niejasności i nieokreśloność poglądów naszych poprzedników, wyznać wszakże należy, że udoskonalony nasz aparat matematyczny nie zaprowadził nas zbyt daleko poza stanowisko Laplace'a i Fouriera w zagadnieniu, dotyczącem budowy i własności jądra [1]). Co się tyczy prawa rozkładu gęstości w jądrze, to można powiedzieć, że jakkolwiek prawo Laplace'a jest prawdopodobnie nieścisłem, jednak jest przybliżenie dokładnem, jak to wykazują obserwacye [2]).

Innem pytaniem, bardzo ogólnem i mającem szczególny interes matematyczny, jest zagadnienie, podjęte przez Fouriera o rozmieszczeniu ciepła wewnątrz ziemi i wynikających stąd skutkach. Najbardziej interesującą fazą tego pytania jest ta, która dotyczy czasu, jaki upłynął do chwili, kiedy skorupa ziemska ustaliła się i oziębiła dostatecznie, by na niej utrzymać się mogło życie zwierzęce. Przed laty przeszło czterdziestu lord Kelvin [3])

---

[1]) Rozkład ciśnienia, gęstości i potencyału w ziemi określają według Laplace'a (przy pominięciu skutków obrotu) następujące trzy równania:

$$\Delta^2 V + 4\pi k\rho = 0 \quad , \quad dp = \rho dV \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = c\rho \, ,$$

gdzie p, ρ, V oznaczają odpowiednio: ciśnienie, gęstość i potencyał w punkcie masy, k jest stałą grawitacyjną, c jest pewnym spółczynnikiem stałym.

[2]) Co się tyczy teoryi w tym przypadku, patrz pouczającą rozprawę D-ra G. Johnstone'a Stoneya: „The kinetic theory of gas regarded as illustrating nature" Proceedings Royal Dublin Society Vol. VIII (N. S.). Port IV. № 45.

[3]) W rozprawie: „On the secular cooling of the Earth". Trans. Royal Society of Edinburgh 1862, przedrukowanej w Thomsona (Kelvina) i Tai a „Treatise on Natural philosophy" Appendix D. Ostatnią pracą Kelvina o tym przedmiocie jest: „The age of the earth as an abode fitted for live" (Philosophical Magazine, styczeń 1899 i Science, 12 maja 1899).

poruszył geologów, wskazując im, że teorya Fouriera przewodnictwa ciepła nie godzi się z takiemi długiemi okresami czasu, jakie udzielane bywają całości zjawisk paleontologicznych. Przy różnych sposobnościach Kelvin powtarzał odtąd swoje argumenty z takim naciskiem, że uspokoił wreszcie wielu geologów, jakkolwiek nie przekonał wielu matematyków. W najnowszym wszakże czasie zaczęto pytaniem tem zajmować się mniej jednostronnie, od chwili, gdy geologowie i paleontologowie zaczęli bronić swoich pozycyj [1]), Kelvin zaś został zaatakowany ze strony matematycznej [2]). We wspomnianym już wykładzie przed laty dziesięcioma, przedstawiłem dość szczegółowo swoje własne poglądy na ten przedmiot, tak że nie mając potrzeby ponownego mówienia o tej rzeczy, stwierdzę tu tylko ponownie przekonanie, iż argumenty geologów były bardzo poważne. Piękną bezwątpienia jest analiza Fouriera, zastosowanie jej do zagadnienia o kuli stygnącej [3]) jest wielce interesującem, ale zdaje mi się, że analiza ta

---

[1]) Patrz rozprawę prof. T. C. Chamberlaina: „Lord Kelvin's address on the age of the earth as an abode fitted for live" Science, 3 czerwca 1899 r., a także wykład prezydyalny Sir Aribalda Geikiego w sekcyi geologicznej Stowarzyszenia brytańskiego postępu nauk. Dover meeting 1899.

[2]) Zwłaszcza przez prof. Johna Perry'ego. Patrz Nature, 5 stycznia i 18 kwietnia 1895.

[3]) Rozpatrywałem to zadanie Fouriera w dwóch rozprawach, ogłoszonych w „Annals of Mathematics" Vol III, str. 75—88 i 129—144. Rozwiązanie w nich podane jest wszakże, o ile rozumiem, dalekie od tego, aby pozwalało na rachunek dla wszystkich wartości czasu w historyi oziębiania. Z punktu widzenia matematycznego jest interesującem, że rozwiązanie polega na równoważności dwóch następujących szeregów:

$$ru = \frac{2r_0u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-1}{n}\right)^{n+1} e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{r_0}\right)^2 t}\sin n\pi\frac{r}{r_0}$$

$$= ru_0 - \frac{2r_0u_0}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\int_{(2n+1)m_0-m}^{(2n+1)m_0+m} e^{-s^2}\,dz\,.$$

Tu u oznacza temperaturę w odległości r od środka kuli i w czasie t; u_0 jest początkową jednostajną temperaturą kuli; r_0 jest promieniem powierzchni kuli;

nie może dać tak dokładnej miary wieku ziemi, jak ją dają widzialne procesy i skutki warstwowania, na które powołują się geologowie. Krótko mówiąc, jedynemi—zdaje mi się—ściśle określonemi rezultatami, które analiza Fouriera przyniosła wiedzy o oziębianiu się planety naszej, są dwa następujące: pierwszy, że proces stygnięcia odbywa się tak powolnie, iż przeciąg czasu, niekrótszy od miliona lat, jest dopiero jednostką odpowiednią do mierzenia następstwa historycznego procesów; drugi — że proces stygnięcia postępuje w istocie rzeczy tak, jak gdyby ziemia nie posiadała ani oceanów ani atmosfery.

Mógł Laplace na początku stulecia słusznie wyrzec z dumą, że astronomia jest najdoskonalszą z nauk [1]), doświadczone zaś zdanie spółczesnego mu Greena głosiło, że dzieło „Mécanique céleste“ pozostawia mało już do zrobienia na przyszłość. W rzeczy samej, pełnością i świetnością swego rozwoju dynamika nieba w pierwszej połowie stulecia aż do roku 1825 (t. j. w okresie działalności Laplace'a) zdawała się przewyższać wszystkie inne nauki, a nawet opóźniała w pewnej mierze pochód samej astronomii. Zadziwiające dzieło Laplace'a było wszakże przeważnie teoretycznem. Zadawalając się w największej liczbie przypadków danemi obserwacyjnemi, zgadzającemi się z teoryą w wyrazach przybliżenia pierwszego rzędu, nie był Laplace prawdopodobnie tak głęboko, jak uczeni końca stulecia, przejęty konieczną stwierdzania teoryi możliwie najściślejszemi środkami obserwacyjnemi. Istotnie, uczniowie jego, opracowując te metody i stosując je do ciał układu słonecznego, starali się przedewszystkiem o rozwinięcie należytej biegłości i pilności, godnych mistrza. Ale warunki postępu w mechanice niebieskiej polegały nie tyle na bezpośredniem sto-

---

a^2 rozszerzalnością, uważaną za stałą; $m=\frac{r}{2\sqrt{t}}$, $m_0=\frac{r_0}{2a\sqrt{t}}$. Zauważmy, że gdy pierwszy szereg (t. j. szereg Fouriera) jest zbieżny powolnie, drugi obiega się szybko, i odwrotnie. Pokazałem też, że te szeregi nie dają, jak to być powinno, wartości temperatury, odpowiadających ujemnym wartościom czasu.

[1]) „L'Astronomie par le dignité de son objet et par la perfection de ses théories est le plus beau monument de l'esprit humain, le titre le plus noble de son intelligence“. (Système du Monde, wyd. 1884, str. 486).

sowaniu kierunków badania, wskazanych przez Laplace'a, ile na doskonaleniu jego metod i mnożeniu danych astronomii obserwacyjnej.

Rozwój tej gałęzi wiedzy wraz z związanym z nią rozwojem geodezyi jest dziełem dziewiętnastego stulecia, a głównie szkoły niemieckiej, pozostającej pod przewodnictwem Gaussa i Bessela. Tym znakomitym myślicielom, znanym zarówno w matematyce czystej jak i stosowanej, zawdzięczamy teorye i najdogodniejsze metody używania narzędzi pomocniczych, oraz subtelne sposoby rachunków liczbowych, pozwalających na wyciąganie najlepszych rezultatów z danych obserwacyjnych. Jeżeli zważymy, że niektórzy nowsi matematycy lekceważą rachunki liczbowe, to można będzie poczytać za okoliczność nader szczęśliwą, iż Gauss i Bessel rozpoczęli swoją karyerę naukową na długo przed nieuniknionem powstaniem teoryi funkcyj i teoryi grup.

Historya szczęśliwego odkrycia planety Ceres, jak ją opowiada Gauss w przedmowie do swego dzieła: „Theoria motus corporum coelestium" jest powszechnie znana; lecz mniej wiadomo, że zasługa tej wspaniałej pracy tkwi raczej w modelowych grupach wzorów, służących do dokładnego liczbowego rozwiązywania zawikłanych zagadnień, aniżeli w łatwości wyznaczania miejsc małych ciał układu słonecznego. W samej rzeczy, prace Gaussa i Bessela cechuje wszędzie jasna świadomość ważnej różnicy, zachodzącej pomiędzy rozwiązaniami zagadnień, nadającemi się do rachunku liczbowego, a takiemi rozwiązaniami, które do podobnych nie są przydatne obliczeń. Pokazali oni astronomom sposób systematyzowania, przygotowywania i sprawdzania rachunków arytmetycznych, jedynie skuteczny w opracowywaniu rozległych poszukiwań, jakie odtąd podejmowano w geodezyi matematycznej i w astronomii gwiazdowej.

Pomiędzy najważniejszemi przyczynkami tych autorów do geodezyi i astronomii, a zwłaszcza do udoskonalenia nauk obserwacyjnych w ogólności, znajduje się gałąź teoryi prawdopodobieństwa, nazwana „metodą najmniejszych kwadratów" [1]. Żaden

[1]) Zasadnicza rozprawa Gaussa w tym przedmiocie jest: „Theoria combinationis observationum erroribus minimus obnoxiae 1821. Werke IV.

inny środek pomocniczy nie zdziałał tyle, co ta metoda dla sprawy doskonalenia planów obserwacyjnych, systematyzowania schematów redukcyjnych i nadawania określonej pewności otrzymywanym wynikom. Skutek powszechnego przyjęcia tej metody można chyba porównać z powszechnem przyjęciem układu metrycznego w nauce; dostarczyła ona bowiem wspólnych sposobów postępowania, wspólnych miar dokładności oraz wspólnej terminologii i powiększyła niezmiernie stosowalność cennych skarbów, przechowywanych w rocznikach astronomii i geodezyi stulecia.

Jeżeli teraz z dziedziny astronomii obserwacyjnej przejdziemy do bardziej ograniczonej ale i bardziej powikłanej dziedziny astronomii dynamicznej, to okaże się, że Laplace i spółcześni mu uczeni niedoceniali wielkości zadania, które przekazywali swym następcom. Laplace, sam jeden prawie bez pomocy, dokonał niezrównanego czynu, podając zupełny zarys „systemu świata", ale praca nad wypełnieniem szczegółów tego zarysu i doprowadzeniem każdego ciała układu słonecznego do harmonii z prostem prawem ciążenia i nieodwołalnemi faktami obserwacyjnemi jest jeszcze większem dziełem, które podjęli, złączywszy swe usiłowania, najbystrzejsi analiści i najbieglejsi rachmistrze poprzedzającego i obecnego pokolenia.

Niepodobna w granicach półpopularnego wykładu podać więcej ponad pobieżną wzmiankę o nadzwyczajnych przyczynkach do astronomii dynamicznej w ciągu drugiej połowy stulecia, przyczynkach, potężnych tak swym ogromem jak i złożonością szczegółów matematycznych. Sprawozdanie o teoryi funkcyi perturbacyjnej albo o teoryi księżyca naprzykład zajęłoby prawie tom [1]). Wymieniając tylko najsławniejsze nazwiska, mamy najprzód prace podstawowe i wzorowe sławnego Gaussa i niezrównanego Bessela; dalej sławne pisma świetnego Leverriera (1811—1877) i niemniej świetnego Adamsa (1819—

Liczne przyczynki Bessela znajdują się w cytowanych wyżej jego „Abhandlungen".

[1]) Dobry zarys rozwoju astronomii dynamicznej od 1842—1867 roku znajdujemy w Delaunay'a: „Rapport sur les progrès de l'Astronomie". Paryż 1867.

1892) [1]), uczonych, powszechnie znanych z powodu odkrycia, które nazwać można odkryciem matematycznem Neptuna. Ukazały się następnie monumentalne „Tablice księżycowe“ [2]), wygotowane w pracowni arytmetycznej niezmordowanego Hansena, a po tej zadziwiającej produkcyi pojawiła się rychło (1860) równie ważna, a matematycznie donioślejsza praca: „Théorie du mouvement de la lune“ [3]) pióra zdumiewająco płodnego i pracowitego Delaunay'a. Wreszcie mamy badania jeszcze więcej wypracowane, sprowadzające wielki problemat układu słonecznego prawie do zupełnego rozwiązania, badania, których przedstawienie za ogólną zgodą powierzono dwóm poprzednim prezydentom Amerykańskiego Towarzystwa matematycznego [4]). Prawdopodobnie żadne badania matematyczno-fizyczne stulecia nie dorzuciły tylu ostatecznych rezultatów ilościowych do trwałej skarbnicy wiedzy naszej, co badania w dziedzinie astronomii dynamicznej.

Ale pomimo zdumiewającej doskonałości, do której doprowadzono naukę, istnieją jeszcze pewne sprzeczności, wskazujące, że dotąd dalecy jesteśmy od końca poszukiwań. Księżyc, który sprawiał astronomom daleko więcej trudności, niż każde inne ciało układu słonecznego, uchyla się jeszcze na kilka sekund w ciągu stulecia. Podejrzewamy, że i ziemia, jako wskazówka czasu, jest nieregularną w drobnym ale ujawniającym się ułamku [5]); w ostatnich zaś czasach przy pomocy subtelnych obserwacyj nowoczesnych wy-

---

[1]) Rozprawy Adamsa w wydaniu prof. W. G. Adamsa i z rozprawą biograficzną J. W. L. Glaishera ogłoszone zostały pod tytułem: „Scientific Papers of John Couch. Adams“. Cambridge at the University Press. Vol. I. 1896.

[2]) Ogłoszone przez rząd brytański w roku 1857.

[3]) Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France. Tomes XXVIII, XXIX.

[4]) Sprawozdanie o nowych dziełach Gyldéna i Poincarégo znajdzie czytelnik w mowie prezydyalnej D-r G. W. Hilla: „Remarks on the progress of celestial mechanics since the middle of the century“. Bulletin American Mathematical Society (2) Vol. II. № 5, str. 125.

[5]) Wpływ tarcia przypływów i odpływów morskich na prędkość obrotu ziemi, zdaje się, pierwszy wyjaśnił Ferrel w nocie: „On the influence of the tides in causing an apparent acceleration of the moon's mean position“. Rozprawa ta była ogłoszona w Amerykańskiej „Academy of Arts und Sciences“.

kazano, że oś obrotu ziemi na drodze skomplikowanej opisuje małe ale zakłócające prostotę kąty około swego położenia średniego i powoduje tym sposobem zmiany szerokości astronomicznej miejsca [1]).

Pytaniem wielkiej wagi dla astronomów pierwszej połowy stulecia było pytanie o stałości układu słonecznego. Lagrange, Laplace i Poisson mniemali, że dowiedli, iż bez względu na to, jakim był początek układu, istniejący porządek zjawisk trwać będzie nieograniczenie. Wniosek ten zadawalał, zdaje się, w równym stopniu tak uczonych, jak i ludzi nienaukowych. Ale w miarę postępu nauki o energii i rozwoju termodynamiki wydawało się wysoce prawdopodobnem, że układ słoneczny doznawał długiego szeregu zmian nietylko w przeszłości, lecz że podobnie przebiegać będzie długi szereg przemian w przyszłości. Innemi słowy, gdy nasi przodkowie przed wiekiem uważali „układ świata" za stały, współcześni nam raczej za niestały go uważają [2]).

grudzień 1864, o parę tygodni wcześniej, zanim Delaunay przedstawił pracę podobnej treści Akademii paryskiej. Patrz wyżej cytowaną autobiografię Ferrela; patrz także sprawozdanie Delaunay'a w jego „Rapport sur le progrès de l'Astronomie". Paryż 1867.

[1]) Przyczyna tych zmian polega na względnej ruchomości części ziemi, zwłaszcza na ruchomości oceanów i atmosfery. Mamy tu trzy typy zmian: 1-o pochodzące z nagłych zmian położenia względnego części masy ziemskiej, 2-o pochodzące ze zmian wiekowych w położeniu tych części, 3-o pochodzące z odmian peryodycznych. Z tych typów najważniejszym zdaje się być typ peryodyczny. Uderzającą i niezupełnie jeszcze wyjaśnioną niezgodnością, rzucającą światło na odkrycie zmian szerokości, jest ta, że chwilowo oś obrotu ziemi wykonywa obrót całkowity około osi figury w ciągu dni 405 zamiast w ciągu dni 305, którą to liczbę dni przyjmowano od czasów Eulera aż do ostatniego dziesięciolecia. Wykrycie tej niezgodności zawdzięczamy D-rowi S. C. Chandlerowi (Astronom. Journal № 248, listopad 1891). Co do teoryi matematycznej tego przedmiotu i tytułów ważniejszych prac, odnoszących się do tej teoryi patrz rozprawę autora: „Mechanical interpretation of variations of latitudes". Astronom. Journal № 345, maj 1895 oraz S. S. Hough „The rotation of an elastic spheroid". Philosophical Transactions № 187. 1896. [Jedna z najnowszych rozpraw teoretycznych jest: V. Volterra „Sur la théorie de la variation des latitudes". Acta mathematica XXII, o której podano sprawozdanie w „Wiadomościach matematycznych" T. IV, str. 105—109. *S. D.*].

[2]) Patrz co do tego artykuł M. H Poincarégo: „Sur la stabilité du système solaire" w „Annaire du Bureau des longitudes" 1898. [Przekład M. Horwitza we „Wszechświecie". Rok 1898, str. 70—75. *S. D.*].

Ale jakkolwiek interesującą jest ta kwestya stałości, nie mamy na szczęście konieczności przepowiadania dalszych losów naszej planety. Istnieje pytanie bliższe i zasługujące—zdaniem naszem—na bezpośrednie i poważne badanie. Mianowicie, czy przepięknie proste prawo Newtona, prawo przyciągania, jest ściśle dokładnem, czy tylko przybliżonem. Nikt, obeznany z mechaniką niebieską lub ze stwierdzeniami tego prawa, danemi przez Laplace'a w jego „Système du monde", nie może nie uznać powodów głębokiego, długo żywionego przez astronomów przekonania o dokładności prawa Newtona. Ale z drugiej strony, nikt, obeznany z uporczywemi własnościami materyi, nie może zadowolić się dziś tem prawem, póki nie będzie ono stwierdzone z wyższym niż dotąd stopniem przybliżenia [1]). Albowiem, mimo przepysznych badań doświadczalnych, zwłaszcza z ostatniej ćwierci stulecia, podjętych przez Cornu i Baille'a [2]), Poyntinga [3]), Boysa [4]), Richarza i Krigar-Menzela [5]) i Brauna [6]), możemy powiedzieć, że stała grawitacyjna jest niepewna na kilka jedności czwartej cyfry dziesiętnej, i—być może—nawet na kilka jedności cyfry trzeciej [7]); tę wadę dzieli ona z paralaksą roczną

---

[1]) Co do stopnia dokładności, z jaką ustalono prawo Newtona za pomocą danych astronomicznych, patrz prof. Newcomba: „Elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy". Supplement do „American Ephemeris and Nautical Almanac for 1897". Waszyngton 1895.

[2]) Comptes rendus LXXVI. 1873.

[3]) J. H. Poynting „The mean density of the Earth". Chas. Griffin & Co Londyn 1894.

[4]) Philosophical Transactions № 186, 195.

[5]) „Sitzungsberichte der k. Akad. d. W." zu Berlin II. 1896.

[6]) Wiener Denkschriften Mat naturw. Classe, t. LXIV. 1897.

[7]) Wyniki badań wymienionych uczonych nad stałą grawitacyjną wyrażają się w jednostkach *C. G. S.* w ten sposób (pierwszy wynik został obliczony według danych zawartych w cytowanej pracy pp. Cornu i Baille):

Cornu i Baille (1873)	6668.10^{-11}
Poynting (1894)	6698.10^{-11}
Boys (1894)	6657.10^{-11}
Richarz i Krigar-Menzel (1896)	6685.10^{-11}
Braun (1897)	6658.10^{-11}

słońca, z aberacyą gwiazd, z masą księżyca i innemi stałemi układu słonecznego. Mamy tu zatem płodne pole poszukiwań. Pomiar bezpośredni stałej grawitacyjnej w wyższym stopniu dokładności przedstawia, zdaje się, nieprzezwyciężone przeszkody; ale czy nie możnaby dojść do tego wyniku na drodze pośredniej, czy nie możnaby zmusić układu słonecznego, aby przerwał swoje wiekowe na podobieństwo Sfinksa milczenie i ujawnił sam swój mechanizm grawitacyjny?

Jak teorye astronomii i geodezyi miały swój początek w potrzebach miernika i żeglarza, tak teorya sprężystości wyrosła z potrzeb budowniczego i inżyniera. Z pytań tak prozaicznych, jakiemi są pytania, dotyczące tęgości i wytrzymalości belek, rozwinęła się jedna z najszerzej stosowanych i najsubtelniej powikłanych nauk matematyczno-fizycznych. Jakkolwiek zapoczątkowana przez Galileusza, Hooke'a i Mariotte'a w wieku XVIII i uprawiana w wieku XVIII przez Bernoullich i Eulera, jest ona wszakże właściwie produktem wieku XIX-go [1]). Można powiedzieć, że stanowi przyczynek inżynierów do dziedziny fizyki matematycznej, albowiem wielu ze znakomitszych pracowników tej nauki, jak Navier, Lamé, Rankine (1820 — 1872) i Saint-Venant (1797—1886), było wybitnymi inżynierami;

Jeżeli uważać będziemy te wyniki jako mające wagę równą, to ich wynik średni wynosi 6673.10^{-11} z błędem prawdopodobnym ± 5 jedności czwartej cyfry dziesiętnej, t. j. wynosi $\frac{1}{1330}$. Jest to ten sam stopień dokładności, jaki wyprowadził prof. Newcomb z danych astronomicznych.

[1]) Piękna historya tej nauki, z uwzględnieniem jej stron technicznych, ułożona przez prof. Izaaka Todhuntera i uzupełniona przez prof. K. Pearsona wyszła p. t.: „A History of the Theory of elasticity und the strength of materials from the time of Galilei to the present time". Cambridge, at the University Press. Vol I Galilei to Saint-Venant 1886. Vol II. Parts I and II Saint-Venant to Lord Kelvin 1893.

Znakomitą, jakkolwiek treściwą historyę tej nauki, podał Saint-Venant w notatach do trzeciego wydania Naviera: „Resistance des corps solides". Paryż 1864. Historya Todhuntera i Pearsona jest poświęcona Saint-Venantowi, słusznie nazwanemu „dziekanem teoretyków sprężystości" (dean of elasticians).

i jest rzeczą osobliwą, że pierwszy z wielkich odkrywców na tem polu Navier był nauczycielem największego z pomiędzy nich Barré de Saint-Venanta[1]). Inne wielkie nazwiska są też związane ściśle z rozwojem tej teoryi i z głębszemi zagadnieniami, którym ona daje początek. Bystrzy analiści: Poisson, Cauchy i Boussinesq z francuskiej szkoły elastyków[2]), głębocy fizycy Green, Kelvin, Stokes i Maxwell ze szkoły brytańskiej, i znakomici uczeni szkoły niemieckiej Neumann (Franz-Ernst 1798—1895), Kirchhoff (1824—1887) i Clebsch (1833—1870)—wszyscy przyczynili się do wzbogacenia pojęć, terminologii i maszyneryi matematycznej tej najtrudniejszej i najważniejszej nauki, mającej do czynienia z materyą i ruchem.

Teorya sprężystości ma za zadanie wykrycie praw, rządzących odkształceniem sprężystem i plastycznem ciał lub ośrodków. Dla osiągnięcia tego celu jest zasadniczem przejście od skończonych i grubo zmysłowych części ośrodka do cząstek nieskończenie małych lub zaledwie spostrzegalnych. Stąd teoryę tę nazywają niekiedy mechaniką cząsteczkową (molekularną), ponieważ jej zakres rozciąga się aż do nieskończenie małych cząstek materyi, lub do samych cząsteczek. Zważywszy tedy złożoność materyi, jak ją znamy z nauk bardziej elementarnych, łatwo zrozumieć, dlaczego teorya sprężystości przedstawia tak olbrzymie trudności i wymaga osobnego traktowania oraz specyalnej terminologii.

Jakkolwiek byłoby niewłaściwem wchodzić tu w szczegóły matematyczne tego przedmiotu, pozwolę sobie wszakże na chwilę zwrócić uwagę waszą na owe uderzająco proste i piękne pojęcia, przy pomocy których badanie matematyczne postępuje szybko i nieomylnie do równań równowagi i ruchu cząsteczki ośrodka. Najważniejszem z tych pojęć jest to, które odnosi się do wysiłu (stress) cząsteczki, wynikającego z jej związku z cząsteczkami

---

[1]) Ten znakomity mistrz pozostawił godnego siebie ucznia, którym jest J. Boussinesq, profesor Fakultetu nauk w Paryżu.

[2]) Tem mianem skróconem nazwać można badaczy teoryi sprężystości.
S. D.

przyległemi do ośrodka oraz do pojęcia skręceń cząsteczki, z tych wysiłów wynikającego. Jeżeli cząsteczka jest np. prostopadłościanem, wtedy wysiły te mogą być przedstawione przy pomocy trzech ciśnień albo napięć, działających prostopadle do ścian, oraz trzech napięć, działających stycznie lub wzdłuż ścian. I tak przylegające cząsteczki ośrodka dają same sześć niezależnych sił składowych do równań równowagi albo ruchu, a parcia albo wielkości sił na jednostkę pola, wywołane przez te siły składowe, są znane technicznie jako ciągnienia (ciśnienia) albo strzyżenia (shears), stosownie do tego, czy działają prostopadle czy też stycznie na ściany cząsteczki [1]). Odpowiednio do tych sześciu składowych jest sześć różnych dróg, na których cząsteczka ulegać może odkształceniu. I tak może być wydłużona lub skrócona w trzech kierunkach równoległych do jej krawędzi, albo też jej ściany równoległe mogą trzema drogami wzajemnie się przesuwać. Te sześć różnych odkształceń, które prowadzą w ogólności do zmiany względnych położeń końców przekątnej prostopadłościanu, mierzymy przy pomocy zmian ich prędkości, zwanych technicznie „strains“ i odróżnianych jako „stretches“ i „slides“, stosownie do tego, czy odnoszą się do odkształceń liniowych, czy kątowych [2]).

---

[1]) Tej terminologii używają Todhunter i Pearson w swojej „Historyi sprężystości i wytrzymałości materyałów“. Tom I. Nota B.

[2]) Terminologia i symbologia teoryi sprężystości zdaje się być więcej rozwiniętą niż każdej innej nauki matematycznej. Nauczającem jest porównanie wyrazów i symboli teoryi sprężystości z wyrazami i symbolami dawniejszej nauki hydromechaniki, jak to widać z następującego zestawienia:

Teorya sprężystości.

Wysiły.		Odkształcenia.	
Ciągnienia (Ciśnienia)	p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}	Rozszerzenia (Ściśnienia)	s_x, s_y, s_z
Strzyżenia	p_{yz}, p_{zx}, p_{xy}	Przesunięcia (Ślizgania)	σ_{yz}, σ_{zx}, σ_{xy}

Z takich to rozważań elementarnych dynamicznych i kinematycznych wyrosła ta teorya tak, iż jest nietylko niezbędną podporą dla inżyniera i fizyka lecz także jedną z najbardziej pociągających dziedzin dla czystego matematyka. P e a r s o n zauważył,

---

Składowe przemieszczenia u, v, w

Pochodne tych przemieszczeń $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \text{ i t. d.} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} \text{ i t. d.} \end{cases}$

Rozszerzenie: $\theta = s_x + s_y + s_z = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$.

Składowe skręceń

$$\tau_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \tau_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Potencyał przemieszczenia w nieobrotowem albo czystem odkształceniu.

H y d r o m e c h a n i k a.

Ciśnienie cieczy p.
Składowe prędkości u, v, w

Pochodne prędkości składowych $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \text{ i t. d.} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} \text{ i t. d.} \end{cases}$

Rozszerzenie: $\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}$.

Składowe obrotu cząsteczkowego:

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Potencyał prędkości w ruchu nieobrotowym.

że niema prawie żadnej gałęzi badania fizykalnego, poczynając od tworzenia planu olbrzymiego mostu aż do najdelikatniejszych prążków świetlnych w kryształach, w którejby teorya ta nie brała udziału. Istotnie jest ona podstawową dla teoryi struktur, dla hydromechaniki, dla teoryi sprężystej światła oraz teoryi ośrodków krystalicznych.

Zamykając te bardzo pobieżne wzmianki o tej niezwykle praktycznej i trudnej nauce matematycznej, należy zwrócić uwagę na wspaniałe prace „dziekana elastyków", Barre de Saint-Venauta. Zadaniem tych prac jego życia było przystosowanie teoryi sprężystości do celów praktycznych inżyniera i równocześnie uwolnienie jej, o ile to jest możliwem, od wszelkiego empiryzmu. Jego rozprawa epokowa [1]) z r. 1853 o skręceniu pryzmatów jest klasycznym traktatem nietylko z praktycznego punktu widzenia lecz pracą zarówno interesującą i ważną z punktu widzenia teoretycznego. Jego badania są wszędzie w najwyższym stopniu zaciekawiające i pouczające dla fizyka, a niektóre ich części, jak zauważyli Kelvin i Tait [2]), są pełne uderzających twierdzeń czystej matematyki, których tak rzadko los użycza matematykom, zamykającym się w czystej analizie albo w geometryi, a stroniącym od czystych i pięknych pól prawdy matematycznej, leżącej na drogach badania fizykalnego. Jeszcze ważniejszem pod względem dydaktycznym są: opracowane przez niego wydanie z r. 1864 Naviera „Résistance des corps solides" oraz wydany przezeń i opatrzony notami przekład francuski dzieła Clebscha „Theorie der Elasticität fester Körper", który ukazał się w r. 1883. Te prace monumentalne, których przypisy i noty wyjaśniające pozostawiają w cieniu tekst autorów oryginalnych, będą na długo wzorowemi źródłami informacyjnemi do historyi, teoryi, metod i rezultatów tego skomplikowanego przedmiotu. Wykład pełen jasności, głębokie wniknięcie w stosunki fizykalne i sumienność naukowa w krytykowaniu innych autorów czynią pracę Saint-Venanta godną najwyższego podziwu.

---

[1]) Mémoire sur la torsion des prismes etc. (Mémoires des savants étrangers). Tom XIV. 1855.

[2]) Natural Philosophy. Wyd. 2-gie. Część II, str. 249.

Ściśle związaną z teoryą sprężystości, jakkolwiek historycznie znacznie starszą, jest hydromechanika. Ta ostatnia jest właściwie zawartą w pierwszej, i prawdopodobnie wielkie traktaty nowego stulecia będą ją wykładały pod tytułem mechaniki cząsteczkowej. Może wydać się dziwnem, że teorya matematyczna ciał stałych powstała o tyle stuleci później niż teorya cieczy, gdyż na pierwszy rzut oka dotykalne, lubo giętkie, ciała stałe zdawały się bardziej podatnemi badaniu, niż ruchliwe ciecze i niewidzialne gazy. Ale krótka rozwaga prowadzi każdego do wniosku, że daleko łatwiej było zaobserwować dane, istotnie potrzebne do uzasadnienia teoryi hydromechaniki, niż odkryć zasady teoryi wysiłów i odkształceń; czas zaś, jaki upłynął od Archimedesa do Galileusza, można poczytywać niejako za przybliżoną miarę względnej złożoności hydrostatyki, a teoryi zginania i skręcania belek. Nie należy wszakże wnioskować stąd, że prostota zjawisk w cieczach, będących w stanie względnego spoczynku, rozciąga się też i na zjawiska w cieczach, będących w stanie względnego ruchu; albowiem przepaść, dzieląca hydrostatykę od hydrokinetyki, mimo potężnych środków matematyki nowoczesnej, nie jest jeszcze wypełniona. Elementy hydrokinetyki, która to gałęź hydromechaniki należy do niniejszego zarysu, dał Euler w połowie XVIII stulecia [1]; jemu to zawdzięczamy równania ruchu cząsteczki „cieczy doskonałej“. Jest to ciecz idealna, poruszająca się bez tarcia, albo—wyrażając się technicznie—niepodległa wysiłowi stycznemu. Lubo, jak łatwo widzieć, płyn taki nie istnieje, wszakże w pewnych warunkach ten stan hypotetyczny zbliża się bardzo do stanu istotnego i w zgodzie z metodami nauki matematyczno-fizycznej w rozwikływaniu złożonych procesów przyrody, rozwój odbywał się kolejno od teoryi cieczy idealnych do teoryi cieczy rzeczywistych.

Historyę rozwoju mechaniki w ciągu stulecia przedstawili starannie i dokładnie Gabriel Stokes [2]) w 1846 i prof. W. M.

---

[1]) „Principes généraux du mouvement des fluides“. Histoire de l'Académie de Berlin 1755: „De principiis motus fluidorum“ Novi Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae. T. XLV. Pars I pro anno 1759.

[2]) „Report on recent researches in hydrodynamics“. Report of British Association for the Advancement of Science for 1846.

Hicks [1]) w 1881 i 1882 roku w Raportach swych, złożonych Stowarzyszeniu brytańskiemu postępu nauk. Historyę przedmiotu tego aż do czasu obecnego przedstawili W. A. Hicks [2]) w sekcyi *A* tegoż Stowarzyszenia i prof. E. Brown w sekcyi *A* Towarzystwa amerykańskiego postępu nauk w r. 1898. Wystarczy tu rzut oka na niektóre wybitne punkty, cechujące postęp nauki od czasów Lagrange'a przed stu laty.

Łatwo postawić ogólne zagadnienie kinetyki cząsteczki cieczy „doskonałej". Brzmi ono tak [3]): Dane są dla danego czasu i dla danego położenia cząsteczki jej ciśnienie wewnętrzne, jej gęstość i jej trzy prędkości składowe wraz z siłami, którym jest poddana z przyczyn zewnętrznych; znaleść ciśnienie, gęstość i prędkości składowe, odpowiadające innemu czasowi i innemu położeniu. Mamy tu tedy w ogólności pięć wielkości niewiadomych, wymagających tyluż równań na ich wyznaczenie. Sześć zwykłych równań ruchu czyli równania d'Alemberta dają tylko trzy z pomiędzy szukanych wielkości, a mianowicie są trzy równania przesunięcia cząsteczki, gdyż trzy równania, odnoszące się do obrotu, znikają z powodu nieistnienia ciśnienia stycznościowego. Czwarte równanie daje nam zasada zachowania energii, którą wyrażamy przez to, że przyrównywamy do zera przeciąg czasu, odpowiadający zmianie masy cząsteczki. Daje nam to, co nazywamy technicznie **prawem ciągłości**. Piąte równanie daje nam zwykle prawo ściśliwości uważanej cieczy [4]).

---

[1]) „Report on recent progress in hydrodynamics". Reports of British Association for the Advancement of Science for 1881, 1882.

[2]) „On recent progress towards the solution of problems in hydrodynamics". Proceedings of American Association for the Advancement of Science for 1898. Patrz „Science" 11 listopada 1898. Porów. A. E. H. Love: „On recent English researches in vortex-motion". Mathematische Annalen XXX. 1887.

[3]) Zagadnienie to według „metody historycznej" polega na tem, że staramy się śledzić cząsteczkę cieczy od jej położenia początkowego w każdem położeniu następnem i wyznaczyć zmiany ciśnienia gęstości i prędkości. Metoda, zwana „statystyczną", zwraca uwagę na pewną stałą objętość cieczy i wyznacza jej miejsce dla danego czasu.

[4]) Pięciu równaniami są następujące:

$$\frac{du}{dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\ \frac{dv}{dt}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};\ \frac{dw}{dt}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z};\ \frac{d(V\rho)}{dt}=0;\ p=f(\rho),$$

Otóż równania obrotu, jak to właśnie pokazano, nie odpowiadają na pytanie, czy cząsteczki poruszają się po swoich orbitach bez obrotu, czy też podlegają obrotowi obok ruchu postępowego. Było to pytanie krytyczne, albowiem niemożność odpowiedzenia na nie opóźniła postęp w ostatniej połowie stulecia; L a g r a n g e, a po nim C a u c h y i P o i s s o n wiedzieli, że przy pewnych warunkach [1]) równania różniczkowe ruchu są całkowalne, ale nie rozumieli—zdaje się—znaczenia fizykalnego tych warunków. Dopiero Sir G. S t o k e s pokazał, że podanym przez L a g r a n ge'a warunkom całkowalności odpowiada przypadek nieistnienia ruchu obrotowego i tym sposobem rozróżnił wyraźnie dwa typy, które nazywamy dziś ruchem niewirowym i ruchem wirowym [2]). Ten wielki krok naprzód, który uczynił był S t o k e s w r. 1845, świadczy o tem, jak wielkiej doniosłości w matematyce stosowanej jest poszukiwanie znaczenia fizykalnego każdego symbolu i każdej kombinacyi symboli.

W trzynaście lat potem ukazała się sławna rozprawa H e l m h o l t z a o całkach równań hydrodynamicznych, odpowiadających ruchom wirowym [3]) Rozprawa ta jest godna podziwu tak ze względu na prostotę argumentacyi matematycznej, prowadzącej do wniosków, jako też ze względu na jasność poglądu na rozważane zjawiska fizykalne. Krótko mówiąc, otwarła ona nowe

---

gdzie p jest ciśnieniem, ρ gęstością w punkcie (x, y, z) cząsteczki, V jej objętością, u, v, w jej prędkościami składowemi, X, Y, Z składowemi sił zewnętrznych na jednostkę masy, pochodzącemi od przyczyn zewnętrznych.

[1]) To jest gdy $udx + vdy + wdz$ jest różniczką zupełną, u, v, w są prędkościami składowemi, albo gdy $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}$ t. j. podwojone składowe obrotu cząsteczkowego znikają, — te ostatnie stanowią warunek istnienia potencyału prędkości.

[2]) Odkrycie S t o k e s a podane jest w jego rozprawie zasadniczej: „On the theories of internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids". Transactions of the Cambridge Philosophical Society VIII, przedrukowanej w zbiorowem wydaniu dzieł S t o k e s a: Mathematical and physical Papers I.

[3]) „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen". Crelle's Journal 1858.

obszary i dała wyniki, pojęcia i metody, które utorowały drogę do ważnych postępów nauki w ciągu trzech ostatnich dziesięcioleci.

Inny silny bodziec hydrokinetyce oraz wszystkim innym gałęziom fizyki matematycznej dały Principia XIX stulecia — dzieło Kelvina i Taita „Natural Philosophy", którego pierwsze wydanie ukazało się w roku 1867. Z tego wielkiego dzieła wypłynęła większość pojęć i metod, należących do teoryi ruchu ciał stałych w cieczach, teoryi, której piękne rezultaty dały nam badania Kirchhoffa, Clebscha, Bjerknesa, Greenhilla, Lamba i innych. Pierwszorzędnego też znaczenia są liczne przyczynki Lorda Kelvina w innych gałęziach hydrokinetyki, a w szczególności w teoryi ruchu wirowego [1]). W istocie, dzięki niezrównanej swej płodności naukowej, rozjaśnił on i wzbogacił każdy dział całkowitej nauki hydromechaniki, począwszy od pojęć przygotowawczych aż do teoryi atomów wirowych materyi.

Powracając do bardziej zawikłanej gałęzi, badającej ruch cieczy lepkich albo ruch ciał stałych w takich cieczach, powiemy, iż postęp tu w ciągu stulecia jest mniej wyraźny, ale pomimo to, wielce godny uwagi. Ta gałęź wiąże się ściśle z teoryą sprężystości i sięga naturalnie dawniejszych badań Naviera, Poissona i Saint-Venanta, ale ponowne ożywienie zainteresowania do tych poszukiwań oraz do innej powikłanych gałęzi tego przedmiotu, bierze zdaje się początek od płodnej, cytowanej wyżej, rozprawy Stokesa z roku 1845 i od raportu jego, złożonego Stowarzyszeniu brytańskiemu postępu nauk w roku 1846. Od tego czasu opracowano niektóre wielce interesujące i pożyteczne zagadnienia, dotyczące wypływu cieczy lepkich i ruchu ciał stałych w takich cieczach, i otrzymano wyniki, dość dobrze zgadzające się z doświadczeniem. Ale w ogóle powîedzieć można, że mimo przenikliwych badań Stokesa, Maxwella, Helmholtza, Boussinesqua, Meyera, Oberbecka i wie-

[1]) „On vortex motion" 1867. Transactions of the Royal Society of Edinburgh XXV.

lu innych, pozostają jeszcze do zwalczenia wielkie trudności, tak teoretyczne jak i doświadczalne [1].

Ze wszystkich gałęzi hydromechaniki żadna nie ma tak wielkiej ważności praktycznej i nie budzi tak powszechnego interesu popularnego, jak teorya przypływów, odpływów i fal. Zjawiska te na morzu są widoczne dla każdego okolicznościowego spostrzegacza, a szczegółowe ich opisy nie okazują przerwy od czasów Curtiusa Rufusa po dzień dzisiejszy. Teorya mechaniczna wszakże tych zjawisk jest dziełem postępu nowoczesnego, a doskonalenie jej przypadło w udziale matematykom XIX-go stulecia [2].

I tu także postęp mierzyć należy z posuniętego stanowiska zajętego przez Laplace'a, który pierwszy podjął rozwiązanie zagadnienia o przypływach i odpływach za pomocą zasad hydrokinetycznych. Po fundamentalnych przyczynkach Laplace'a, zawartych w drugim i piątym tomie jego „Mechaniki niebieskiej", najbliższy stanowczy postęp uczynił Sir George Airy (1801—1892) w artykule o przypływach, odpływach i falach, ogłoszonym w „Encyclopaedie Metropolitana" w r. 1842. W ćwierć wieku potem przyszło odrodzenie, spowodowane bezwątpienia wielką rozprawą Helmholtza, dziełem „Natural Philosophy" Kelvina i Taita oraz pobudzającemi komunikatami lorda Kelvina w towarzystwach naukowych i w dziennikach o każdej prawie fazie zagadnień o falach, przypływach i odpływach. Nastąpiły potem stanowcze ulepszenia teoretyczne teoryi przypływów i odpływów przez W. Ferrela [3], zwłaszcza w tem, co dotyczy rozwinięcia potencyału, wytwarzającego przypływy i odpływy, oraz

---

[1] Prof. Hele-Shaw zastosował niedawno z powodzeniem wielce interesującą metodę badania doświadczalnego. Patrz jego rozprawę: „Stream-line motion of a viscous film" i załączoną do niej pracę Sir G. Stokesa: „Mathematical proof of the identity of the stream-lines obtained by means of a viscous film with those of a perfect fluid moving in two dimensions". Report of British Association for the Advancement of Science for 1898.

[2] Doskonały zarys historyi i teoryi przypływów i odpływów oraz metod ich obserwowania i przewidywania podał D-r Rollin A. Harris w pracy „Manual of Tides" (Report of the U. S. Coast and Geodetic Survey for 1897. Append. 8 i 9).

[3] „Tidal researches". Apendix do Report of U. S. Coast and Geodetic Survey for 1874. Waszyngton 1874.

wyznaczenia skutków tarcia. Nieco później ukazały się nowe badania prof. G. H. Darwina, który nietylko podał sposób praktyczny zupełnie wykończony traktowania przypływów i odpływów ziemskich [1], lecz rozszerzył nadto tę teoryę na układ słoneczny i rzucił pouczające światło na procesy ewolucyjne, z jakich wyłoniły się planety i ich satelity i przez jakie przechodzić mają w przyszłości [2]).

Jeżeli zastanowimy się nad postępem, który przedstawiłem tak pobieżnie i niedokładnie, to okaże się, że matematycy XIX stulecia dodali wiele świetnych i trwałych przyczynków do dziedziny najściślejszej pomiędzy naukami fizykalnemi. Zwracając się od pewnej przeszłości ku mniej pewnej przyszłości, skłonni jesteśmy stawiać domysły o tem, czy świetny ten postęp trwać będzie i jaki w nim udział weźmie amerykańskie Towarzystwo matematyczne. W pytaniach tych nie mogę przepowiedni ani rad udzielać. Ale zdaje się, że nie ma powodu do innych oczekiwań, niż do optymistycznych. Drogi, jakiemi postępować może badanie, są liczne i pociągające. Postępujmy tylko przykładem, danym przez Laplace'a, Poissona, Greena, Gaussa, Maxwella, Kirchhoffa, Saint-Venanta, Helmholtza i ich znakomitych rówieśników i następców. Polecając dzieła tych wielkich mistrzów młodszym zwłaszcza członkom amerykańskiego Towarzystwa matematycznego, nie chcę być tak rozumianym, jakobym polecał mniej uprawę matematyki czystej, a pobudzał więcej do pracy nad matematyką stosowaną. Taż sama wierność w badaniach, toż samo uzdolnienie do nieskończonej pilności, które pozwoliły na osiągnięcie wielkich rezultatów dziewiętnastego stulecia, doprowadzą — jak tego słusznie oczekiwać można — do wielkich rezultatów i w wieku dwudziestym.

---

[1]) W artykule „Tides" w „Encyclopaedia Britannica", wyd. 9-te.

[2]) Badania Darwina ogłoszone zostały w szeregu artykułów w „Philosophical Transactions of the Royal Society of London". Parts I. II. 1879, Part II. 1880, Part II 1881, Part I. 1882: przedrukowane w dodatku G. do „Natural Philosophy" Thomsona i Taita, wyd. 2-gie. Patrz także kapitalne dzieło półpopularne G. H. Darwina: „The Tides and kindred Phenomena in the Solar System". Boston i New-York, Houghton, Mifflin & C. 1889.