O STOSOWALNOŚCI WZORÓW DYSPERSYJNYCH [1]

napisał

Wł. Gorczyński.

Pomimo wielu ciekawych prac teoretycznych i doświadczalnych nad wzorami dyspersyjnemi, porównania otrzymywanych doświadczalnie wyników z obliczonemi nie można dotychczas uważać za zupełnie zadawalające, a stosowalność wzorów dyspersyjnych obracać się musi z konieczności w bardzo ciasnych granicach. Z tego powodu ponowne przeliczenie wzorów dyspersyjnych oraz zbadanie, o ile i w jakich warunkach dać one mogą wartości zgodne z doświadczeniem, przedstawia pewien interes. Przedsięwzięte próby w tej mierze okazały też w rzeczy samej, że przynajmniej dla szkieł jenajskich zadanie to w pewnym zakresie budzi widoki rozwiązania i prowadzi do pewnych, jak się zdaje, ciekawych wyników, które też pragniemy tu w krótkości przedstawić.

Jeżeli weźmiemy następujące wzory dyspersyjne:

1) wzór ogólny Cauchy'ego:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \frac{D}{\lambda^6} + \ldots;$$

2) wzory Schmidta:

a) $$n = a + \frac{b}{\lambda} + \frac{c}{\lambda^4},$$

b) $$n^2 = a^2 + \frac{b}{\lambda} + \frac{c}{\lambda^4};$$

[1]) Streszczenie obszerniejszego referatu; porówn. „Physikalische Zeitschrift" 1901. № 14, str. 205—261.

3) wzory Kettelera:

a) $$n^2 = a^2 + \frac{M}{\lambda^2 - \lambda^2_1} - K\lambda^2,$$

b) $$n^2 = -K\lambda^2 + a^2 + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4};$$

4) wzory Wüllnera:

a) $$n^2 - 1 = -P\lambda^2 + Q\frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda^2_1},$$

b) $$n^2 - 1 = K\lambda^2 + \frac{M\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda^2_1};$$

5) wzór Lommela:

$$n^2 - 1 = Q\frac{\lambda^2_1}{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2};$$

6) wzór Hartmanna:

$$n - n_0 = \frac{c}{(\lambda - \lambda_0)^{1,2}}$$

i rozwiążemy [1]) je dla 8 szkieł jenajskich katalogu D-ra Schotta, przyjmując za wiadome spółczynniki załamania dla linij Fraunhofera A', C, D, F, to otrzymamy następującą tabelkę, która wyraża odchylenia teoretycznie obliczonego spółczynnika $n_{G'}$ od wyznaczonej doświadczalnie jego wartości w jednostkach piątego znaku dziesiętnego.

(*Patrz tablicę na stronie 3-ej*).

Podane powyżej nad każdym wzorem litery odnoszą się do użytych linij Fraunhofera, przyczem liczba ich wskazuje liczbę stałych dyspersyjnych równania, tak że np. wzory Cauchy'ego obliczone były kolejno z dwoma, trzema i czterema spółczynnikami.

---

[1]) Rachunki wykonane zostały przy pomocy sześciocyfrowych tablic Bremikera, co jak się okazało, jest w danym razie wystarczającem; sumy i różnice wyznaczane były sposobem Gaussa.

T a b l i c a I.

№ katalogu	ν	Cauchy					Schmidt		Ketteler		Wüllner		Lommel	Hartmann
		A, C	C, D	C, F	C, D, F	A, C, D, F	C, D, F	C, D, F	A, C, D, F	A, C, D, F	C, D, F	C, D, F	D, F	C, D, F
0.802	64.9	+116	+ 48	+ 8	−23	+ 6	− 1	− 1	−13	−13	− 2	− 4	+12	− 5
0.709	57.3	+ 84	+ 10	− 4	−15	+38	+ 8	+ 7	+ 1	+ 1	− 4	− 5	+ 6	0
0.1209	57.2	+ 65	+ 7	− 8	−20	+20	+ 8	+ 9	− 6	− 6	− 7	− 6	+ 4	0
0.722	53.8	+ 40	− 3	−13	−21	+ 8	+ 7	+ 5	−12	−12	− 6	− 9	+ 1	+ 1
0.846	53.0	+ 33	− 7	−14	−21	+ 8	+ 6	+ 6	−11	−11	− 8	− 9	0	+ 1
0.726	47.3	− 1	− 35	−25	−17	+20	+11	+12	− 2	− 4	−10	−10	− 5	+ 4
0.378	45.9	− 21	− 47	−32	−21	+13	+ 8	+ 7	−11	−12	−16	−15	−10	+ 5
0.748	39.1	−137	−119	−63	−19	+ 8	+17	+15	− 8	−11	−14	−20	−23	+19

Za zasadnicze stałe przyjęte są długości fali (według katalogu szkieł jenajskich D-ra S c h o t t a), a mianowicie:

$$\lambda_{A'} = 0.7677\,\mu \;;\; \lambda_C = 0.6563\,\mu \;;\; \lambda_D = 0.5893\,\mu \;;\; \lambda_F = 0.4862\,\mu \;;$$

$$\lambda_{G'} = 0.4341\,\mu\,.$$

Jako zasadniczy punkt wyjścia przyjęty jest tu podział substancyj optycznych według wartości ich dyspersyj względnych, a właściwie ich odwrotności, które według powszechnie stosowanego symbolu oznaczamy przez ν $\left(\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}\right)$. Wartości te ν dla danej substancyi charakteryzują przebieg dyspersyi i są dla niej niezmiernie ważne; na zasadzie badań teoretycznych, możnaby już z góry przewidywać związek między przebiegiem wartości ν a odchyleniem ciał optycznych od normalnego biegu, wskazywanego przez wzory dyspersyjne. I rzeczywiście, że związek taki przynajmniej dla szkieł jenajskich faktycznie istnieje, usiłujemy pokazać i stwierdzić w artykule niniejszym.

Tablica I, zawierająca przebieg odchyleń dla 8 szkieł, ułożonych w porządku ich wielkości ν, wskazuje w rzeczy samej, że wzory C a u c h y'ego z dwiema stałemi, wzory L o m m e l a i H a r t m a n n a i wreszcie, chociaż niezupełnie dokładnie, wzory W ü l l n e r a, wykazują bieg odchyleń, równolegle idący z biegiem wielkości ν. Fakt ten jest tu nadzwyczaj ważny, gdyż prowadzi do wniosku, że można przez ułożenie tabeli odchyleń w funkcyi ν wprowadzać odpowiednie poprawki do wzoru dyspersyjnego i przeto otrzymywać dokładne wartości spółczynników załamania na drodze wyliczeń teoretycznych, co dotąd nie dawało się osiągnąć.

Aby wykazać to dokładniej, podajemy w poniższej tablicy II-ej podobną tabelę. W celu otrzymania jej obliczono wszystkie bez wyjątku 76 szkieł optycznych, podanych w katalogu D-ra S c h o t t a, a rachunki wykonane zostały przy pomocy wzoru L o m m e l a dla linij F r a u n h o f e r a G'.

Tablica II.

№ katalogu	ν	Otrzymane odchylenia	Wartość poprawek	Błąd pozostający	№ katalogu	ν	Otrzymane odchylenia	Wartość poprawek	Błąd pozostający
0.225	70.0	+11	−11	0	0.152	51.2	− 2	+ 1	−1
s 40	66.9	+12	−11	+1	0 583	51.2	− 1	+ 1	0
0.802	64.9	+12	−11	+1	0.543	50.6	− 4	+ 2	−2
0.144	64.0	+ 9	− 9	0	0.527	50.4	− 3	+ 2	−1
0 599	62.3	+ 7	− 7	0	0.164	49.4	− 1	+ 3	+2
0.57	61.8	+ 7	− 7	0	0.575	49.3	− 3	+ 3	0
0.40	60.9	+ 6	− 6	0	0.214	48.7	− 5	+ 5	0
0.337	60.7	+ 6	− 6	0	0.522	48.2	− 6	+ 5	−1
0.374	60.5	+ 4	− 6	−2	0.726	47.3	− 5	+ 6	+1
0.546	60.2	+ 8	− 6	+2	0.161	46.7	− 4	+ 6	+2
0.60	60.2	+ 6	− 6	0	0 578	46.4	− 8	+ 7	−1
0.138	60.2	+ 6	− 6	0	0.378	45.9	− 10	+ 10	0
0.567	59.7	+ 5	− 5	0	0.154	43.0	− 16	+ 15	−1
0.20	59.6	+ 4	− 5	−1	0.376	42.9	− 16	+ 15	−1
0.227	59.4	+ 6	− 5	+1	0.230	42.5	− 14	+ 15	+1
0.203	59 0	+ 3	− 4	−1	0.340	41.4	− 19	+ 19	0
0.610	59.0	+ 2	4	−2	0.569	41.4	− 19	+ 19	0
0.598	58.6	+ 6	− 4	+2	0.184	41.1	− 20	+ 20	0
0.512	58.6	+ 3	− 4	−1	0.748	39.1	− 23	+ 23	„
0.13	58.0	+ 5	− 4	+1	0.318	38.3	− 25	+ 25	„
0.15	58.0	+ 4	− 4	0	0.118	36.9	− 30	+ 30	„
0.211	57.5	+ 5	− 4	+1	0.167	36.5	− 32	+ 32	„
0.709	57.3	+ 6	− 4	+2	0.103	36.2	− 32	+ 32	„
0.153	57.2	+ 3	− 4	−1	0.93	35.8	− 35	+ 35	„
0.1209	57.2	+ 4	− 4	0	0.266	35.4	− 35	+ 35	„
0.114	56.6	+ 3	− 3	0	0.335	34.8	− 40	+ 40	„
0 197	56.5	+ 2	− 3	−1	0 102	33.8	− 42	+ 42	„
0.463	55.4	+ 2	− 3	−1	0.192	32.0	− 49	+ 49	„
0.202	55.3	+ 3	− 3	0	0.41	29.5	− 61	+ 61	„
0.608	54.6	+ 1	− 2	− 1	0.113	28.4	− 68	+ 68	„
0.722	53.8	+ 1	− 1	0	0.165	27.5	− 76	+ 76	„
0.602	53.0	+ 2	0	+2	0 198	26.5	− 88	+ 88	„
0,846	53.0	0	0	0	s.57	19.7	−216	+216	„
0.381	51.3	− 2	+ 1	−1					

Z tablicy II-ej, wyrażającej poprawki dla wartości $n_{G'}$, otrzymanych ze wzoru Lommela, widać, że po wprowadzeniu powyższej poprawki błąd pozostający dosięga najwyżej ± 2 jednostek piątego znaku dziesiętnego; dla mniejszych wartości ν błąd pozostający nie jest podany, gdyż z powodu braku w katalogu D-ra Schotta większej liczby szkieł o dużych względnych rozproszeniach (t. j. małych ν) nie mieliśmy dostatecznego materyału porównawczego. W ogóle do możliwego ustalenia powyższej tablicy poprawek niezbędne jest uwzględnienie większej liczby szkieł o różnych i jednakowych wielkościach ν, niż te, któreśmy mieli do rozporządzenia w katalogu D-ra Schotta.

Z tego samego powodu nie przedstawiamy graficznie zależności poprawek od wielkości ν; otrzymana w ten sposób krzywa nie ma zresztą żadnego charakterystycznego przebiegu, jest ona dosyć nieregularna i odznacza się w ogóle tylko tem, że nader szybko oddala się od osi wraz z zmniejszaniem się wielkości ν, co najzupełniej widocznie pokazuje już sama tablica II. Również przedwczesnemi byłyby tu próby, aby pomienioną zależność przedstawić za pomocą wzorów empirycznych; o wiele ważniejszem jest na razie rozszerzenie zakresu wielkości ν lub badanie odchyleń dla innych linij Fraunhofera.

Co do tych ostatnich, to już z góry, po ułożeniu tablicy II, przypuszczaćby należało, że skoro podobna zależność od wielkości ν istnieje dla $n_{G'}$ to daje się ona stwierdzić i dla innych linij Fraunhofera. Aby to pokazać, przedstawiamy poniżej bieg odchyleń w infraczerwonej i ultrafioletowej części widma dla pięciu szkieł jenajskich, których spółczynniki załamania wyznaczali w szerokim zakresie H. Rubens i H. Th Simon[1]). W poniższej tablicy pierwsza kolumna pozioma zawiera długość fal w mikronach, kolumny zaś pionowe wskazują odchylenia; miejsca puste wskazują, że odpowiedni spółczynnik nie był doświadczalnie wyznaczany.

(Patrz tablicę na stronie 7-ej).

Tablica ta wskazuje, że dla każdego z powyższych szkieł odchylenia idą w jednym kierunku, wzrastając w miarę, gdy przechodzimy od fal krótszych do dłuższych, tak że w ogóle: 1) dla danego szkła odchylenia, będąc dodatniemi w ultraczerwonej czę-

---

[1]) H. Rubens. Ueber die Dispersion ultraroter Strahlen. Ann. d. Phys. u. Chem. **45**, 238; **46**, 540. 1892. H. Th. Simon. Ueber die Dispersion ultravioletter Strahlen. Ann. d. Phys. u. Chem. **53**, 542. 1894. Porówn. także H. Hovestadt „Jenaer Glas", str. 40—45.

Tablica III.

№ szkła	ν	Długość fal w mikronach																		
		2.4	2.2	2.0	1.8	1.6	1.4	1.2	1.0	0.8	0.4340	0.3610	0.3466	0.4303	0.3261	0.3133	0.3081	0.2980	0.2880	0.2837	0.2763
0.1092	60.6	—	+1012	+899	+713	+548	+408	+275	+175	+ 95	0	0	— 5	— 8	— 16	— 29	— 38	— 49	—77	—95	—127
0.1151	51.8	—	—	+940	+709	+499	+319	+200	+ 83	+ 16	— 14	— 38	— 65	— 76	— 98	—192	—231	— 316	—	—	—
0.151	41.1	+1240	+1033	+821	+611	+437	+277	+143	+ 52	+ 1	— 24	—181	—262	—313	—465	—680	—801	—1092	—	—	—
0.469	33.7	+1081	+ 921	+751	+585	+421	+242	+103	+ 10	— 36	— 48	—355	—530	—636	—965	—	—	—	—	—	—
s.163	22.3	+ 887	+ 707	+546	+353	+183	+ 33	—105	—132	—145	—147	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

ści widma, stopniowo zmniejszają się i dla dostatecznie krótkich fal stają się ujemne i 2) że dla danej długości fali odchylenia zmniejszają się wraz ze zmniejszaniem się ν [1]).

Dla ostatnich 5 szkieł poprawki dla $n_{G'}$ niezupełnie odpowiadają tym wartościom, które poprzednio znaleziono dla ogółu szkieł katalogu D-ra Schotta. Różnice te nie są jednak znaczne i można je zupełnie objaśnić, biorąc pod uwagę niejednakowe źródła pomiarów, a głównie i przedewszystkiem zaś to, że w wartościach spółczynników, wyznaczonych przez Rubensa i Simona, dokładność dosięga najwyżej w ogóle tylko pierwszych czterech znaków dziesiętnych.

Przebieg odchyleń w tablicy III ma dla wszystkich powyższych 5 szkieł charakter jednakowy i typowy; można jednak wskazać szkła z innemi nieco przebiegami, jak np. posiadającemi maximum lub minimum pośrodku, nad czem się jednakowo w niniejszem streszczeniu nie zatrzymujemy.

Jeżeli więc, pomijając okoliczności drugorzędne, weźmiemy pod uwagę tylko sam fakt zasadniczy, a mianowicie zależność naszych różnic między teoretycznie a doświadczalnie otrzymanemi spółczynnikami załamania od ν i λ, to powiedzieć można, że uogólniony wzór Lommela

$$n_x^2 = 1 + Q \frac{\lambda_1^2}{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_x}\right)^2} + f(\nu, \lambda_x)$$

(gdzie x oznacza linię Fraunhofera, dla której wyznaczyć chcemy spółczynnik) pozwala w dużym względnie zakresie ekstrapolacyi dokładnie wyznaczać spółczynniki załamania. Wartości liczebne wprowadzonej wyżej funkcyi $f(\nu, \lambda_x)$ odpowiadają właśnie poprawkom, takim np. jakie daje dla linii G' tablica II w zakresie wartości ν od 70.0 do 19.7; co się zaś tyczy samej postaci

---

1) Co się tyczy tej drugiej zależności, to tablica III wskazuje dwa nieznaczne odstępstwa w tym względzie, jedno dla $\lambda = 2.2\,\mu$ ($\nu = 41.1$) i drugie dla $\lambda = 2.0\,\mu$ ($\nu = 51.8$).

tej funkcyi, to tymczasowo nic dokładnego powiedzieć o niej nie można.

Rzecz naturalna, że istnienie podobnej podwójnej zależności odchyleń (od ν i λ) jest nie tylko charakterystycznem dla wzoru Lommela, lecz dla wszystkich w ogóle równań dyspersyjnych, które dają prawidłowy przebieg odchyleń; tak więc nawet dla wzorów Cauchy'ego z dwiema stałemi można się starać o wyznaczanie liczebne odpowiadającej im funkcyi $F(\nu, \lambda_x)$.

Warszawa, w styczniu 1901 r.

POMIAR MIKROMETRYCZNY PODWÓJNEJ MGŁAWICY

II. 316 . H . 444; II. 317 . H . 445,

podał

R. Merecki.

Jeden z astronomów w roku 1872 wyraził się trafnie, mówiąc, iż, gdy usuniemy na stronę zdobycze analizy widmowej, będziemy odnośnie do mgławic na tem samem stanowisku, na jakiem byliśmy za czasów Tychona i Keplera odnośnie do gwiazd stałych. Trzydzieści lat mija od tego czasu, pozostawiwszy wspaniały ślad we wszystkich dziedzinach astronomii; mgławice jedynie, ciała niebieskie najwięcej tajemnicze, najmniej zbadane i badane, pomimo roli jaką im ogólnie przypisują w układzie wszechświata, nie mogą wskazać poważniejszych zdobyczy. Licznie nowo odkrywane są zbyt nikłe, aby kiedykolwiek stać się mogły przedmiotem badań ścisłych; lecz z liczby znanych od początku zeszłego stulecia i dostatecznie jasnych, mała tylko część dość dokładnie wyznaczone posiada położenie, jeszcze mniejsza dokładne opisy, rysunki i w ostatnich czasach fotografie. Z wyzna-