KORESPONDENCYA.

Pan M. F e l d b l u m przesłał nam następujące uwagi z powodu artykułu: „Z dziedziny rachunku prawdopodobieństwa“, ogłoszonego w tym tomie „Wiadomości“ na str. 137 i następnych.

Szanowny Panie Redaktorze,

Dotychczasowe określenie prawdopodobieństwa uważa Szanowny Autor za niedość ogólne i pragnie je zastąpić innem, ogólniejszem, aby na niem teoryę prawdopodobieństwa zbudować. Nie zatrzymujemy się w tej chwili nad kwestyą, o ile słusznym lub niesłusznym jest zarzut, skierowany przeciw rozpowszechnionemu pojęciu prawdopodobieństwa z powodu jakoby niedostatecznej jego ogólności, i zastanówmy się nad tem, jak traktowane jest to pojęcie w pracy, o której mówimy.

W rozprawie rozważanej prawdopodobieństwo określa się jako iloraz możliwości przez konieczność; skąd wynika, że przez możliwość i konieczność rozumieć mamy pewne **w i e l k o ś c i**, zależne od zjawisk badanych. Możliwość i konieczność, jako wielkości, stanowią zatem pojęcia zasadnicze, na których zbudowaną ma być teorya prawdopodobieństwa.

Nieodzownem przeto staje się dokładne wyjaśnienie, co właściwie rozumieć należy przez możliwość i konieczność, jako wielkości: musimy mieć jasne i ścisłe określenie tych pojęć, będących podwaliną całej teoryi, a skądinąd nam obcych. Zdania takie, jak:

„stanami krańcowemi możliwości są z jednej strony konieczność, z drugiej niemożliwość“,

„jako wielkość, możliwość można uważać za pewną część konieczności, która zresztą (konieczność) może mieć jakąbądź wartość“,

„jeśli przyjmiemy . . . konieczność za jedność, możliwość wyrażać się wtedy będzie liczbą dodatnią, mniejszą od jedności. W tem rozumieniu możliwość nazywamy prawdopodobieństwem“,

dokładnego określenia nie mogą naturalnie zastąpić.

Szanowny Autor upatruje wadę zwykłej teoryi prawdopodobieństwa w tem, iż trudno jest np. rozwiązać zagadnienie 2 § 1 **b e z p o ś r e d n i o** na zasadzie definicyi prawdopodobieństwa (przy pomocy reguł dodawania i mnożenia prawdopodobieństw zagadnienie to rozwiązuje się bez trudności). Otóż z tym poglądem trudno by się pogodzić; zdaje się nam bowiem, że wychodząc z tej samej zasady, musielibyśmy np. widzieć wadę rachunku różniczkowego w tem, że dając dokładne określenie funkcyi pochodnej, często nie może znaleść tej ostatniej wprost z określenia, ale posiłkuje się nieraz dość skomplikowanym mechanizmem rachunkowym, wskutek którego **n i e w i d a ć**, że otrzymana funkcya pochodna jest granicą stosunku dwóch wielkości, dążących do zera.

Ze strony czysto **f o r m a l n e j**, zwracamy uwagę na rozumowanie następujące: Autor powiada:

„zamiast mówić długo:

(1) k o n i e c z. = 1 , m o ż l. = p r a w d.,

będziemy mówili krótko:

(2) p r a w d. = m o ż l. / k o n i e c z.

i tę formułę, w której mianownik jest w ogóle różny od jedności, przyjmujemy za określenie prawdopodobieństwa".

Otóż nie rozumiemy związku między wzorem (1), gdzie konieczność = 1 a wzorem (2), gdzie konieczność jest w ogóle różna od jedności; nie rozumiemy też, dlaczego zamiast „długiej formuły" (1) obraną została specyalnie „krótka formuła" (2), boć tak samo możnaby np. umotywować wzór:

p r a w d. = m o ż l. × k o n i e c z.

albo:

p r a w d. = m o ż l. × (k o n i e c z.)^n,

gdzie n jest liczbą dowolną.

D-r M. Feldblum.

Na uwagi powyższe p. Wł. G o s i e w s k i przesyła następującą odpowiedź

Że dotychczasowa definicya prawdopodobieństwa jest wadliwa, zwrócili już na to uwagę J. B e r t r a n d i p. H. P o i n c a r é; my zauważyliśmy tylko, że wadliwość ta polega na jej nieogólności.

Jakoż, definicya brzmi: prawdopodobieństwo zdarzenia jest stosunkiem liczby przypadków sprzyjających temu zdarzeniu do liczby przypadków wszystkich możliwych, pod warunkiem atoli, że przypadki wszystkie możliwe są jednakowo możliwe, t. j. jednakowo prawdopodobne.

Pomijamy już wadę, że tak postawiona definicya zawiera w sobie błąd, polegający na petitio principii, zauważony przez wyżej wymienionych autorów, a okażemy, niezależnie od tego błędu, że jest ona nieogólną.

Gdy mamy np. wyznaczyć prawdopodobieństwo wylosowania gałki białej z jednej mieszaniny m gałek, między któremi znajduje się x gałek białych, definicya jest wystarczającą. Bo przypadków sprzyjających zdarzeniu jest x, przypadków wszystkich możliwych jest m; nadto przypadki wszystkie możliwe są jednakowo prawdopodobne, co umyślnie zakładamy, żeby w ten sposób wyrazić, że mamy do czynienia z jedną tylko mieszaniną. Stąd prawd. $= x/m$.

Ale gdy chcemy wyznaczyć prawdopodobieństwo wylosowania gałki białej z dwóch mieszanin, zawierających po m i n wszystkich gałek, między któremi znajduje się odpowiednio po x i y gałek białych, wtedy liczba przypadków sprzyjających zdarzeniu wynosi $x+y$, a liczba przypadków wszystkich możliwych wynosi $m+n$. Bo przecież żadnej innej gałki białej, prócz zawierającej się między danemi $x+y$, nie wyciągniemy, ani też nie wyciągniemy żadnej innej gałki w ogóle, prócz zawierającej się między danemi wszystkiemi $m+n$ gałkami.

Jakżeż więc tu stosować powyższą definicyę, skoro zgoła nie wiemy, czy wszystkie przypadki możliwe w liczbie $m+n$ są jednakowo prawdopodobne?

Co innego gdy powiemy: prawdopodobieństwo jest stosunkiem sumy wartości przypadków sprzyjających zdarzeniu do sumy wartości wszystkich przypadków możliwych.

Wówczas, oznaczając przez a wartość przypadku dla pierwszej mieszaniny, a przez b wartość przypadku dla drugiej mieszaniny (ponieważ z założenia wszystkie przypadki w jednej mieszaninie są równowarte), otrzymujemy na szukane prawdopodobieństwo:

$$\frac{ax+by}{am+bn}.$$

Ponieważ jednak am jest sumą wartości przypadków, sprzyjających wylosowaniu którejbądź gałki z pierwszej mieszaniny, a bn jest sumą wartości przypadków, sprzyjających wylosowaniu którejbądź gałki z drugiej mieszaniny, am i bn wyrażają właściwie odpowiednie możliwości trafienia do jednej i drugiej mieszaniny. Stosownie więc do tego, czy według danych zadania te możliwości są sobie równe lub różne, znajdziemy na prawdopodobieństwo odpowiednie wartości.

Z powyższego zdaje się już jasno wypływać, że dotychczasowa definicya prawdopodobieństwa stosuje się tylko w tym razie, gdy wszystkie przypadki możliwe uważać możemy za równowarte; w razie przeciwnym zgoła się nie stosuje.

Żeby jednak uwydatnić to jeszcze lepiej, przytoczymy przykład, podany przez d'A l e m b e r t a, także jako dowód niedokładności powszechnie akceptowanej definicyi prawdopodobieństwa.

Przykład jest następujący:

Rzuca się losem na płaszczyznę pieniądz o stronach A i B i żąda oznaczenia prawdopodobieństwa, że w dwóch takich rzutach strona np. A odkryje się przynajmniej raz jeden.

D'A l e m b e r t rozumuje tak:

Jeśli się odkryje A w pierwszym rzucie, gra jest skończona; a jeśli przeciwnie, odkryje się w pierwszym rzucie B, należy zrobić rzut drugi, w którym odkryć się może A lub B. Na trzy zatem przypadki: A, BA i BB, dwa tylko sprzyjają zdarzeniu: A i BA; więc prawdopodobieństwo równa się $2/3$.

Owóż, d'Alembert uważał trzy przypadki A, BA i BB za równowarte, bo tak się one istotnie na pierwszy rzut oka przedstawiają, i wreszcie tego warunku wymagała koniecznie definicya prawdopodobieństwa. Tymczasem, po głębszem wniknięciu w istotę rzeczy, okazuje się, że przypadek pierwszy wart jest dwa razy tyle, co każdy z pozostałych. Jakoż, w razie odkrycia się A w pierwszym zaraz rzucie, gra kończy się dlatego i tylko dlatego, że obojętnem jest, czy w drugim rzucie odkryłoby się wtedy A czy B. Gdy więc każdy z przypadków BA i BB jest wart np. po 1, przypadek A jest wart wtedy 2. W ten sposób suma wartości przypadków sprzyjających zdarzeniu wynosi $2+1=3$, a suma wartości wszystkich przypadków możliwych wynosi $2+1+1=4$, tak, że prawd. $=3/4$ zamiast $2/3$.

Sądzimy, że to jedno tylko nierozumienie potrzeby uogólnienia definicyi prawdopodobieństwa tak pesymistycznie nastroiło p. F., że nawet znaczenia tak utartych wyrazów, jakiemi są: możliwość, konieczność i niemożliwość, nie chciał zrozumieć. A przecież można sobie było wystawić szereg mieszanin, zawierających po m gałek wszystkich, uporządkowany w ten sposób, żeby w pierwszej mieszaninie nie było ani jednej gałki białej, w drugiej — żeby była tylko jedna biała, w trzeciej — tylko dwie białe i t. d., w ostatniej — wszystkie białe; i losować z każdej mieszaniny po gałce. Okazałoby się wtedy, że zdarzenie wylosowania gałki białej z pierwszej mieszaniny jest niemożliwością, a z ostatniej — koniecznością, podczas gdy z każdej pośredniej jest możliwością, rosnącą w miarę zbliżania się do mieszaniny ostatniej.

Wł. Gosiewski.

TWIERDZENIA DO DOWODZENIA

podał

Kazimierz Cwojdziński.

I. Jeżeli z wierzchołków trójkąta spuścimy prostopadłą na prostą dowolną w jego płaszczyźnie i na każdej z nich, począwszy od spodka, odetniemy odcinki, będące w stosunku $1 : \lambda$ do całych prostopadłych, następnie z punktów podziału poprowadzimy prostopadłe do odpowiednich boków trójkąta, to te drugie prostopadłe przetną się w jednym punkcie.

II. Miejscem geometrycznem punktów przecięcia tych prostopadłych (przy zmianie liczby λ) jest prosta. Nazwijmy ją **p r o s t ą p i o n ó w** dla uważanego trójkąta.