E. Picard.

O ROZWOJU NIEKTÓRYCH TEORYJ ZASADNICZYCH ANALIZY MATEMATYCZNEJ w WIEKU XIX-ym [1]).

Odczyty miane w Clark-University (w Stanach Zjednocz.) d. 5, 6 i 7 lipca 1899 r.

I.

Rozwój pojęcia funkcyi w tem stuleciu.

1. Cała nauka matematyki spoczywa na pojęciu funkcyi, t. j. na pojęciu zależności pomiędzy dwiema lub więcej wielkościami, którego badanie stanowi przedmiot główny Analizy. Wiele potrzeba było czasu, zanim zdołano zdać sobie sprawę z nadzwyczajnej rozciągłości tego pojęcia; okoliczność ta zresztą była bardzo szczęśliwa dla postępu nauki. Gdyby Newton i Leibniz wiedzieli byli, że funkcye ciągłe niekoniecznie mają pochodną — co stanowi przypadek ogólny — nie powstałby był Rachunek różniczkowy; podobnież, nieścisłe poglądy Lagrange'a, dotyczące możliwości rozwijania funkcyi na szereg Taylora, oddały olbrzymie usługi postępowi nauki. Nie wdając się w zbytnie uogólnienia, możemy powiedzieć, że błąd bywa nieraz użytecznym, i że w epokach prawdziwie twórczych prawda niezupełna lub przybliżona może być płodniejszą od tejże prawdy, obstawionej zastrzeżeniami koniecznemi. Historya nauki stwierdza wielokrotnie to spostrzeżenie; jako przykład możemy, powołując się znów na Newtona, przytoczyć tę okoliczność szczęśliwą, że na początku swych poszukiwań miał on zupełne zaufanie do praw Keplera. Geo-

---

[1]) Podajemy ten przekład za upoważnieniem Autora. *S. D.*

metrowie poprzedniego wieku—nie sięgamy do czasów nie dawniejszych—nie subtylizowali pojęcia funkcyi; dla nich funkcyą zmiennej jest funkcya, którą można przedstawić przez krzywą, tworzącą ciąg nieprzerwany; takie to funkcye Euler nazywał functiones continuae. Pytanie o przedstawialności funkcyi dowolnej w postaci analitycznej, w której występują tylko działania zasadnicze arytmetyki, wykonane skończoną lub nieskończoną liczbę razy, pytanie to, nasunęło się, zdaje się, poraz pierwszy z powodu zagadnienia o strunach drgających. D'Alembert podał całkę ogólną równania:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

w postaci $f(x + at) + \Phi(x - at)$. Daniel Bernoulli pokazał, że można uczynić zadość temu równaniu różniczkowemu i warunkom na ograniczeniu przy pomocy szeregu trygonometrycznego, i twierdził, że ten szereg daje rozwiązanie najogólniejsze. Dało to powód do długiej dyskusyi pomiędzy Bernoullim, Eulerem i Lagrangem. Dla tych wielkich geometrów funkcyą dowolną była zawsze funkcya dowolna, dająca się przedstawić za pomocą ciągu nieprzerwanego. W r. 1807 Fourier w sławnej rozprawie, a następnie w swojej „Teoryi analitycznej ciepła“ wykazał nadzwyczajną ważność szeregów trygonometrycznych; on to pierwszy odważył się twierdzić, że każda funkcya może być pomiędzy granicami 0 i 2π przedstawiona przez taki szereg, oraz — co właśnie stanowi punkt kapitalny — że toż samo rozwinięcie może w tych granicach przedstawiać funkcye, które uważano za różne, t. j. za odpowiadające graficznie łukom krzywych różnych. Bardzo pouczającem jest poznanie w „Teoryi analitycznej ciepła“ tych dróg rozmaitych, któremi dochodzi Fourier do spółczynników rozwinięcia. Wyznaczenie tych spółczynników przy pomocy całek klasycznych występuje tu dopiero na drugiem miejscu; było ono zresztą wskazane dawniej, jakkolwiek tylko okolicznościowo, przez Eulera. W pierwszej swojej metodzie Fourier otrzymuje spółczynniki, ustawiając nieskończoną liczbę równań stopnia pierwszego o nieskończenie wielu niewiadomych. Było to poszukiwanie smiałe, jak na ową epokę, i nie możemy żądać od niego tej ścisłości, jakiej wymagamy dzisiaj; ale należy zapamiętać to, że pierwszy Fourier miał odwagę rozwiązywania układów nieskończonej liczby równań liniowych o nieskończenie wielu niewiadomych. Istnieje zresztą w Analizie dość wiele zagadnień, w których występują takie właśnie układy. Ma to np. miejsce przy szukaniu rozwinięcia ilorazu dwóch szeregów trygonometrycznych oraz przy całkowaniu równania różniczkowego liniowego o spółczynnikach peryodycznych, kiedy chcemy zadość uczynić takiemu równaniu przy pomocy funkcyi peryodycznej, albo przy pomocy iloczynu takiej funkcyi przez funkcyę wykładniczą. Ten ostatni przypadek występuje w wielu problematach Mechaniki nieba, a w szczególności w pięknych pracach Hilla nad ruchem punktu przyziemnego orbity księżyca. Poincaré podał zasady ścisłego traktowania układów nieskończonej liczby równań, zwłaszcza układów jednorodnych. Wprowadza on do tej teoryi wyznaczniki rzędu nieskończonego, a z badań tych wypływa fakt nieoczekiwany, mianowicie, że w niektórych przypadkach nieskończoną liczbę równości można zastąpić nieskończoną liczbą nierówności. Istnieją w Analizie i inne jeszcze zagadnienia, w których stajemy wobec nieskończonej liczby równań, i będzie z czasem wdzięcznem zadaniem przedstawienie metod całkowania nieskończonej liczby równań różniczkowych z nieskończenie wielu funkcyami niewiadomemi.

Lecz powróćmy do szeregów trygonometrycznych. Przebiegając szybko ich dzieje, dochodzimy do okresu, w którym Cauchy, Abel i Dirichlet poddają ścisłej rewizyi zasady podstawowe Analizy matematycznej. Rozprawa Dirichleta o szeregach Fouriera pozostała wzorem ścisłości; sławny geometra wyraża w niej dokładnie warunki na to, aby można było twierdzić, że rozwinięcie na szereg trygonometryczny ze spółczynnikami Fouriera przedstawia funkcyę daną w przedziale od 0 do 2π; warunki te pozostały w nauce pod nazwą warunków Dirichleta. Są one warunkami tylko dostatecznemi, ale nie można mieć nadziei znalezienia w tej teoryi w postaci praktycznej warunków, równocześnie koniecznych i dostatecznych. Wiemy dzisiaj, dzięki badaniom Du Bois-Reymonda, że funkcya ciągła niekoniecznie daje się rozwinąć na szereg trygonometryczny; warunek dostateczny L i p s c h i t z a, wyrażony za pomocą nierówności:

$$| f(x+h) - f(x) | < kh^a \qquad (a > 0)$$

w którym k jest stałą oznaczoną, ma cechę wielkiej ogólności; toż samo powiedzieć można o twierdzeniu C. J o r d a n a, dotyczącem rozwijalności funkcyi o zmienności ograniczonej.

Sławną w historyi szeregów trygonometrycznych jest rozprawa R i e m a n n a; dla scharakteryzowania jej w dwu słowach powiemy, że R i e m a n n porzuca w niej punkt widzenia D i r i c h l e t a i zamiast szukać warunków dostatecznych, zajmuje się głównie szukaniem warunków koniecznych. I z innego stanowiska rozprawa ta jest znamienną, albowiem stanowi ona dalszy ciąg rewizyi zasad Rachunku nieskończonostkowego, rozpoczętej przez A b e l a i C a u c h y'ego. Pierwszy raz występuje tu odróżnienie funkcyj całkowalnych od niecałkowalnych i można powiedzieć, że z prac R i e m a n n a wypływa to, że istnieją funkcye ciągłe, nie mające pochodnych.

Zawdzięczamy G. C a n t o r o w i odpowiedź na ważne pytanie: czy funkcya może być kilkoma różnemi sposobami przedstawiona pomiędzy 0 i 2π przez szereg trygonometryczny; inaczej mówiąc, czy z e r o może być przedstawione przez szereg trygonometryczny, którego spółczynniki nie są wszystkie zerami? Niezależnie od samego rezultatu, rozprawa G. C a n t o r a jest godna uwagi dla tego, że w traktowaniu tego dawnego zagadnienia grają ważną rolę pojęcia, odnoszące się do mnogości punktów. Jeżeli daną jest mnogość punktów pomiędzy 0 i 2π, to według G. C a n t o r a m n o g o ś c i ą p o c h o d n ą nazywamy mnogość jej punktów granicznych; i w tenże sposób można określać pochodne kolejne mnogości. Jeżeli pochodna n-ta mnogości redukuje się do skończonej liczby punktów, wtedy mnogość nazywa się mnogością g a t u n k u n-tego. C a n t o r dowodzi, że jeżeli szereg trygonometryczny jest w przedziale $(0, 2\pi)$ zerem dla wszystkich wartości zmiennej x, prócz tych, które odpowiadają punktom gatunku n-tego, dla których o szeregu nic nie wiemy, wtedy wszystkie jego spółczynniki są zerami.

2. Zatrzymałem się może zbyt długo nad szeregami trygonometrycznemi. Szeregi te — nie mówiąc już o ich ważności dla

zastosowań, zwłaszcza w Fizyce matematycznej—odegrały ważną rolę w ewolucyi pojęcia funkcyi. Właśnie badanie tych szeregów pozwoliło zwrócić uwagę na okoliczności, które nas dzisiaj nie zdumiewają, ale kiedyś wydawały się nieprawdopodobnemi; jak np. fakt, że granica, do której dąży szereg funkcyj ciągłych, może nie być równa wartości szeregu w uważanym punkcie. Szeregi też trygonometryczne wskazały nam konieczność zachowywania ostrożności przy różniczkowaniu szeregów; należą już do tej kategoryi liczne badania, przedsięwzięte od czasów Cauchy'ego nad różniczkowaniem i całkowaniem szeregów, do których to badań Osgood dorzucił przed kilku laty ważne dopełnienie w rozprawie o zbieżności niejednostajnej.

Rozwinięcie funkcyi na szereg trygonometryczny jest też najprostszym typem rozwinięć bardzo ogólnych, jakie napotykamy w zastosowaniach. I na tem polu Fourier poprzedził innych badaczy. Badanie oziębiania się kuli przy założeniu, że temperatura zależy tylko od czasu i od odległości od środka, doprowadziło go do rozwinięcia, w którem, zamiast linij trygonometrycznych wielokrotności $x, 2x, \ldots, nx$ zmiennej, występują linie trygonometryczne ilości $a_1 x, a_2 x, \ldots, a_n x$, gdzie ilości a oznaczają pierwiastki w liczbie nieskończonej pewnego równania przestępnego. Fourier podał zarys teoryi rozwinięć tego rodzaju. Badanie to podjął następnie Cauchy w wielu rozprawach, stanowiących jedno z najbardziej godnych uwagi zastosowań rachunku, który ten wielki analista nazywa rachunkiem pozostałości (rezyduuów). Założywszy pewne warunki bardzo ogólne, dotyczące równania przestępnego, Cauchy wykazał z całą ścisłością dopuszczalność rozwinięć dla funkcyi, czyniącej zadość warunkom Dirichleta, i tym sposobem znacznie uogólnił rezultaty rozprawy klasycznej znakomitego geometry niemieckiego.

Rozwinięcia jeszcze ogólniejsze napotykamy w Fizyce matematycznej. Stanowiły one przedmiot badań Poissona, Sturma, Liouville'a i wielu innych. Tu z punktu widzenia ścisłości zupełnej zachodzą trudności, które potrafiono pokonać w niewielkiej tylko liczbie przypadków. Jako przykład bardzo prosty, przytoczę jedynie zagadnienie o oziębianiu się muru nieograniczonego, którego ściany zewnętrzne są utrzymywane w temperaturze zero; zakłada się przytem, że ciepło właściwe jest funkcyą odciętej x, odpowiadającej każdej warstwie, tak że dla temperatury V mamy równanie o pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = A(x) \frac{\partial V}{\partial t},$$

w którem $A(x)$ jest funkcyą ciągłą dodatnią zmiennej x w przedziale (a, b) grubości muru. Napiszmy równanie liniowe zwyczajne:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k A(x) y = 0$$

i niechaj k przyjmuje nieskończoną liczbę wartości dodatnich $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$, dla których istnieje całka tego równania, znikająca w punktach a i b. Każdej wartości k_i odpowiada całka $y_i(x)$ tego równania (oznaczona, poza stałą dowolną), a zagadnienie, o którem mowa, sprowadza się do rozwinięcia funkcyi $f(x)$, znikającej w punktach a i b na szereg postaci:

$$f(x) = \Sigma B_i y_i(x).$$

Dowód ścisły tego rozwinięcia wynika z ostatnich poszukiwań Stekłowa, opartych na poprzednich pracach Poincarégo o równaniach Fizyki matematycznej. Zdaje się, że dla zupełnej ścisłości koniecznem jest tu przyjęcie, iż funkcya $f(x)$ ma pochodne dwu pierwszych rzędów; dalecy tu wszakże jeszcze jesteśmy od ogólności warunków Dirichleta rozwijania na szereg trygonometryczny, które zresztą stanowi przypadek szczególny zadania powyższego, ten mianowicie, w którym $A(x)$ jest ilością stałą.

3. Historya rozwinięć na szeregi, którą treściwie naszkicowałem, daje nam przykład godny uwagi, stwierdzający ścisłą solidarność, łączącą w pewnych momentach Analizę czystą i Matematykę stosowaną. W wielu razach ta ostatnia dała silny bodziec do stawiania rozmaitych problematów; i jest faktem istotnie znamiennym, że pytania o drganiu strun i o rozchodzeniu się ciepła pobudziły geometrów do zgłębienia pojęcia tak złożonego, jakiem jest pojęcie funkcyi. Historya nauk matematycznych przedstawia

zresztą już w swych początkach przykłady analogiczne; nasza zdolność abstrakcyjna może rozwijać się tylko, opierając się na faktach konkretnych: nie ulega wątpliwości, że pierwsi geometrowie greccy utworzyli naukę geometryczną, rozważając i zgłębiając postępowanie swych poprzedników, praktyków egipskich. Nie wolno mi tu dłużej zastanawiać się nad tym przedmiotem, dodam tylko, iż nie należałoby, zdaniem mojem, trzymać się zbyt systematycznego poglądu o równoległości rozwoju teoryi czystej i jej zastosowań, jaki, idąc za Laplacem, Fourierem i Poissonem, wyznawała świetna Szkoła francuska Fizyki matematycznej. Dla tych geometrów analiza czysta była tylko narzędziem; Fourier, przedstawiając Akademii nauk w Paryżu prace Jacobi'ego, wyrzekł, że problematy Filozofii naturalnej powinny być głównym przedmiotem rozmyślań geometrów: „Należy życzyć sobie — dodał — by osoby najbardziej uzdolnione do doskonalenia nauki Rachunku, zwracały swe prace ku wysokim jego zastosowaniom, tak koniecznym dla postępu inteligencyi ludzkiej". Życzenie to zupełnie słuszne, nie powinno być wszakże wyłącznem; byłoby to zapoznawaniem znaczenia filozoficznego i artystycznego Matematyki. Spekulacye teoretyczne pozostawały nieraz przez długi czas dalekiemi od wszelkiego zastosowania, póki nie nadszedł moment właściwy. Nie można na to przytoczyć lepszego przykładu niż ten, który odnosi się do teoryi stożkowych; teorya ta, opracowana jeszcze przez geometrów greckich, pozostawała przez dwa tysiące lat bez zastosowań aż do chwili, w której Kepler spożytkował ją w badaniu ruchu planety Marsa. Zagadnienia wyczerpują się na czas pewien i nie jest pożądanem, aby wszyscy badacze szli po jednej drodze. W kilka lat po napisaniu się wspomnianych słów przez Fouriera, zjawia się Ewaryst Galois, który—gdyby mu danem było żyć dłużej — przywróciłby równowagę, zwracając badania ku wyższym dziedzinom czystej teoryi; śmierć tego badacza, którego geniusz wywarł był wpływ tak głęboki na najrozmaitsze części matematyki. była nieszczęściem niepowetowanem dla nauki francuskiej.

Powyższe zboczenie oddaliło nas pozornie od drogi głównej, na której rozwijało się pojęcie funkcyi od początku tego stulecia, ale w istocie nie jest to zboczenie bezpożyteczne, bo wykazuje, że musiała nadejść chwila, w której spekulacye nad teoryą funkcyj zmiennych rzeczywistych zaczęto uprawiać bez żadnego względu na bezpośrednie zastosowania, nadając im charakter coraz bardziej filozoficzny. Powiedzieliśmy już, że z prac Riemanna wynikało bezpośrednio, iż funkcya ciągła niekoniecznie ma pochodną. Weierstrass dał pierwszy przykład funkcyi ciągłej, która dla żadnej wartości zmiennej nie posiada pochodnej. Dowiódł on twierdzenia, które prowadzi do rozwinięć funkcyi ciągłych na szeregi, których wyrazy są wielomianami. Według Weierstrassa każda funkcya ciągła może być w pewnym przedziale rozwinięta na szereg wielomianów, bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w tym przedziale. Dowód tego twierdzenia, podany przez znakomitego geometrę, jest bardzo skomplikowany; punktem wyjścia w nim jest całka, rozważana przez Fouriera w „Teoryi ciepła", pozwalająca wyrazić funkcyę badaną, jako granicę funkcyi przestępnej całkowitej, zależnej od jednego parametru, gdy ten parametr dąży do zera. Stąd wyprowadza Weierstrass możliwość przedstawienia przybliżonego funkcyi ciągłej w przedziale skończonym przez wielomian, i tym sposobem dochodzi do rzeczonego wyżej rezultatu. Można daleko prędzej dojść do twierdzenia Weierstrassa, wychodząc z całki klasycznej Poissona w teoryi szeregów trygonometrycznych; z całki tej widzieć łatwo, że funkcya, określona w przedziale mniejszym od 2π, daje się przedstawić z takiem przybliżeniem, jak chcemy, przez szereg ograniczony Fouriera, a stąd przechodzimy już do przedstawienia przybliżonego przez wielomian. Dowodzenie to daje się rozciągnąć i na funkcye ciągłe o jakiejkolwiek liczbie zmiennych. Volterra doszedł też na drodze bardzo prostej do twierdzenia, o którem mowa, odpierając się na spostrzeżeniu, że funkcya ciągła daje się przedstawić z takiem przybliżeniem, jak chcemy, za pomocą odpowiedniej linii wielokątnej; prowadzi to do szeregu Fouriera jednostajnie zbieżnego, a gdy szereg ten zredukujemy do skończonej dostatecznie wielkiej liczby wyrazów, otrzymamy rezultat powyższy. Twierdzenie Weierstrassa posiada rzetelny interes filozoficzny i jednocześnie może mieć pewne znaczenie dla rachunku praktycznego; stosowano je też nieraz do dowodzenia niektórych twierdzeń.

Rozwinięcia na szeregi wielomianów specyalnych są wielce ważnemi, lecz dają się stosować jedynie do funkcyj, czyniących zadość warunkom szczególnym. I tak Darboux w rozprawie „Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres", zbadał rozwinięcia funkcyi według wielomianów Jacobi'ego, pochodzących od szeregu hypergeometrycznego; warunki, jakie tu zachodzą, są jeszcze warunkami Dirichleta; podobnież i w przypadku, gdy funkcya staje się nieskończoną, powinna pozostać całkowalną. Jest jednak inaczej, gdy funkcya staje się nieskończoną w punktach skrajnych. W przypadku wielomianów Legendre'a funkcya, która stawałaby się nieskończoną rzędu równego lub większego od $\frac{3}{4}$ dla $x = \pm 1$, nie jest rozwijalną, jakkolwiek jej spółczynniki nie tracą znaczenia.

4. Wracając do funkcyj wziętych w całej ogólności, uznajemy odrazu konieczność nadzwyczaj starannego uzasadnienia niektórych twierdzeń, na które godzimy się z łatwością, gdy idzie o funkcye zwykłe. Wiedział to już Cauchy w swojej „Analizie algebraicznej"; prace Hankela, rozprawa Darboux'a o funkcyach nieciągłych, piękna książka Dini'ego i najnowsze badania geometrów włoskich wykazują, jak wielkie ostrożności są niezbędne w tego rodzaju poszukiwaniach. I tak funkcya dwóch zmiennych rzeczywistych x i y może być ciągła oddzielnie względem zmiennej x oraz oddzielnie względem zmiennej y, a może nie być funkcyą ciągłą względem obu zmiennych razem, jak to pokazują przykłady, podane przez Dini'ego. Pomiędzy pracami najnowszemi o tych delikatnych pytaniach, wymieniam rozprawę p. Baire'a, zawierającą ciekawe wyniki. Autorowi temu udało się znaleść warunek konieczny i dostateczny na to, aby funkcya $f(x)$ zmiennej rzeczywistej x dała się przedstawić przez szereg prosty wielomianów. Wysłowienie tego twierdzenia wymaga niektórych pojęć, odnoszących się do nieciągłości funkcyi względem mnogości punktów: funkcya może być względem takiej mnogości nieciągłą punktowo lub całkowicie. Warunek, o którym mowa wyżej, brzmi: funkcya ma być punktowo nieciągłą względem każdej mnogości doskonałej. P. Baire stawia sobie też osobliwe pytanie, odnoszące

się do równań liniowych o pochodnych cząstkowych. Dajmy sobie równanie:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

i pytajmy, jakie funkcye czynią mu zadość. Oczekujemy niewątpliwie odpowiedzi, że jedynie funkcye różnicy $x - y$ czynią zadość równaniu. Tymczasem p. Baire nie jest tego bezwzględnie pewny. Czyni on uwagę, że teorya zamiany zmiennych opiera się na założeniu ciągłości zachodzących w twierdzeniu pochodnych; jeżeli założymy przeto jedynie istnienie pochodnych $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ funkcyi szukanej f, to nie będzie można wykonać klasycznej zamiany zmiennych. Potrzeba na to delikatnej analizy, aby stwierdzić, że funkcya f, z założenia ciągła względem obu zmiennych x i y razem i czyniąca zadość równaniu (1), jest funkcyą różnicy $x - y$; wniosek ten atoli staje się wątpliwym, gdy f jest funkcyą ciągłą zmiennej x i takąż funkcyą ciągłą zmiennej y.

I z punktu widzenia geometrycznego, badania ogólne o funkcyach nie są pozbawione interesu; uczą nas one, że nawet najprostszym pojęciom bezwzględnie zaufać nie można. Cóż może wydać się na pozór prostszem od pojęcia krzywej, której spółrzędne x i y są funkcyami ciągłemi parametru t, zmieniającego się w przedziale od a do b? Tymczasem Peano pokazał, że można te dwie funkcye wybrać w ten sposób, aby przy zmienianiu się parametru t od a do b, punkt (x, y) przyjmował położenie dowolne wewnątrz prostokąta. Pewnym punktom (x, y) w przykładzie Peana mogą zresztą odpowiadać dwie lub cztery wartości parametru t. Rezultat taki w pierwszej chwili zbija nas z tropu i zdaje się burzyć nasze pojęcia o powierzchniach i o krzywych. Oto drugi rezultat osobliwy, otrzymany niedawno przez Lebegue'a: prócz powierzchni rozwijalnych istnieją inne powierzchnie, dające się rozwinąć na płaszczyznę. Można przy pomocy funkcyj ciągłych otrzymać powierzchnie, odpowiadające płaszczyźnie w ten sposób, że każda linia wyprostowywalna na płaszczyźnie ma swoją odpowiednią tejże długości, wyprostowywalną na powierzchni, a powierzchnia mimo to nie jest prostoliniową.

Przykłady takie wykazują subtelność poszukiwań, jakie muszą podjąć pragnący zgłębić pojęcie funkcyi, wzięte w całej jego ogólności. Poszukiwania te w wielu punktach są ściśle związane ze spekulacyami nad pojęciem liczby. Przychodzimy tu do Szkoły filozofii matematycznej, która świetnie rozwijając się od lat trzydziestu, zajmuje się drobiazgową analizą natury liczby. Uderza nas obfitość prac, ogłoszonych w ostatnich latach z tej dziedziny matematyki filozoficznej; prac zgodnych z dążeniami ogólnemi epoki naszej, w której umysł ludzki stosuje krytykę coraz przenikliwszą w rozmaitych kierunkach. Te spekulacye subtelne przedostały się nawet do nauczania elementarnego, czego—mojem zdaniem—bardzo żałować należy. Lecz nie idzie mi tu o nauczanie; nie zastanawiam się też bliżej nad znaczeniem tych badań dla filozofa; powiem tylko, że przedstawiają one dla niego interes rzetelny i dla tego byłoby do życzenia, aby młodzi filozofowie, obznajmiwszy się poważnie z matematyką, zechcieli pracować w tym kierunku. Ja stoję tu na stanowisku matematyki. Niektóre dobre umysły zaprzeczają rzeczonym spekulacyom wszelkiej wartości dla matematyki pozytywnej i przejmują się obawą, widząc, że tyle zdolności zużywa się na te bezpłodne badania. Pojmuję bardzo dobrze te obawy, lecz niezupełnie je podzielam. Należy oczywiście poczynić tu pewne odróżnienia. Niektóre kwestye mają interes czysto filozoficzny i nigdy nie przyniosą prawdopodobnie żadnego pożytku matematyce, jak np. pytanie, czy pierwszeństwo należy się liczbie kardynalnej czy też porządkowej, t. j. czy pojęcie liczby właściwej poprzedza pojęcie porządku (rang), czy też odwrotnie. Lecz w innych razach rzecz ma się inaczej: I tak, jest prawdopodobnem, że teorya mnogości G. Cantora, którą napotkaliśmy już dwa razy na drodze naszej, odegra pożyteczną rolę w rozwiązywaniu zagadnień, których nie postawiono dotąd wyraźnie, by stały się zastosowaniami tej teoryi. Nie żałujmy przeto tych śmiałych usiłowań, podjętych nad pojęciem liczby i pojęciem funkcyi, gdyż teorya funkcyj zmiennych rzeczywistych jest istotną podstawą Analizy matematycznej.

5. Należy, co prawda, pamiętać o tem, że pojęcie ogólne funkcyi jest bardzo nieokreślonem, i że możemy otrzymać rezultaty pewnej doniosłości tylko wtedy, jeżeli poczynimy założenia szczególne. Co mniej lub więcej bezwiednie kierowało badaczami w wyborze tych założeń? Z tego, co powiedziano wyżej o stosunkach pomiędzy Analizą i jej zastosowaniami w badaniu zjawisk przyrody, wypływa, że te ostatnie kierowały wielokrotnie wyborem. Założeniem istotnem było założenie ciągłości. Stosownie do starego przysłowia natura non facit saltus mamy poczucie — powiedziałbym — wiarę, że w przyrodzie nie ma miejsca na nieciągłość. Jest wszelako rzeczą nieraz pożyteczną zachować pojęcie nieciągłości w rachunkach naszych, np. wtedy, gdy w Mechanice rozumowej czas trwania uderzenia przyjmujemy za zero, albo gdy warstwy przejściowe w rozmaitych zagadnieniach Fizyki matematycznej traktujemy jak powierzchnie, jakkolwiek wiemy o tem, że czas trwania uderzenia ma pewną wielkość, fizycy zaś nauczyli nas mierzyć grubość warstw, w których odbywają się zmiany nagłe w rozmaitych zjawiskach. Pojęcie pochodnej narzuca się nam już z mniejszą stanowczością, lubo i ono odpowiada nieokreślonemu poczuciu większej lub mniejszej szybkości, z jaką ujawnia się to lub inne zjawisko. Założenie, odnoszące się do istnienia pochodnej, ma źródło analogiczne z założeniem, dotyczącem ciągłości. Nie chcę przez to bynajmniej twierdzić, że ze stanowiska pojęcia liczby, pojęcie ciągłości jest tak jasnem w istocie rzeczy, jak niem jest na pozór, lecz mam tu na myśli jedynie pojęcie ciągłości fizycznej, wydzielone z grubych spostrzeżeń zmysłowych.

W innych przypadkach nie widzimy równego powodu w nadawaniu pewnych szczególnych właściwości funkcyom. Tak się rzecz ma—jak mniemam—z własnościami funkcyj, zwanych analitycznemi, t. j. funkcyj, które w sąsiedztwie dowolnej wartości zmiennej mogą być rozwinięte na szereg Taylora. Ponieważ funkcye, najwcześniej badane, jak funkcye wymierne, wykładnicze, trygonometryczne mają własność powyższą, to przedewszystkiem na nią to zwrócono uwagę; następnie zaś łatwość, z jaką hypoteza ta pozwalała na podjęcie pewnych zagadnień, nadała taką ważność funkcyom analitycznym. Wielką swą rolę zawdzięczają one tedy dogodności, jaką nam dają w rachunkach.

Nie wiemy zresztą, jakie są warunki stosowalności rozwinięcia na szereg Taylora funkcyi, określonej jedynie dla wartości rzeczywistych zmiennej. Funkcya zmiennej x może posiadać pochodne wszystkich rzędów dla każdej wartości zmiennej, a mimo to nie być rozwijalną. E. Borel podał wielce godne uwagi twierdzenie o funkcyi zmiennej rzeczywistej, określonej w pewnym przedziale i mającej w tym przedziale pochodne wszystkich rzędów; jeżeli tym przedziałem jest $(-\pi, +\pi)$, wtedy funkcya daje się przedstawić przez rozwinięcie postaci

$$\Sigma\,(A_n\,x^n + B_n \cos nx + C_n \sin nx)\,.$$

Te różne uwagi skłaniają mnie do powiedzenia słowa o pewnej Szkole geometrów, którzy nic nie chcą widzieć po za funkcyami analitycznemi i ogólniej nic poza ważnością, może nieco przesadzoną, jaką ona posiada w nowszych pracach nad Teoryą funkcyj analitycznych. Chcieć ograniczać się do rozwinięć tak szczególnych, jakiemi są rozwinięcia na szeregi całkowite, wtedy gdy można tworzyć tyle innych rozwinięć natury odmiennej, nie dających się przez takie szeregi przedstawiać, jest to obcinać analizę. Prawdą jest, że najpospoliciej używamy funkcyj analitycznych i że mógłby nas kto zapytać o przykłady, w których rozwiązaniu występują funkcye nieanalityczne, podczas gdy dane tych przykładów są analitycznemi. Otóż przykłady takie są, ale nie są pospolitemi; najłatwiej dostarczają ich równania o pochodnych cząstkowych. Następujący przykład, podany przez E. Borela, wydaje mi się interesującym. Napiszmy równanie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\,(x, y)$$

w którem a jest liczbą niewymierną odpowiednio dobraną, $f(x, y)$ pewną funkcyą analityczną zmiennych x i y o peryodzie 2π dla x i y. Dla równania tej postaci istnieje jedno rozwiązanie peryodyczne i nie jest ono analitycznem. Niech a będzie liczbą niewymierną taką, aby, gdy $\frac{m_i}{n_i}$ jest jakimkolwiek reduktem rozwinięcia liczby a na ułamek ciągły, zachodziła nierówność:

$$| m_i - n_i a | < e^{-m_i^2 - n_i^2};$$

utwórzmy funkcyę

$$\Phi(x, y) = \Sigma\, a^{m_i} b^{n_i} \cos(m_i^2 x) \cos(n_i^2 y)\,. \quad (a < 1,\ b < 1)$$

Jest to funkcya n i e a n a l i t y c z n a. Połóżmy z drugiej strony

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - a^4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Psi(x, y),$$

to funkcya Ψ będzie a n a l i t y c z n a. A zatem jeżeli przyjmiemy a p r i o r i to ostatnie równanie i szukać będziemy rozwiązania peryodycznego względem x i y, znajdziemy jedno tylko rozwiązanie, t. j. Φ, k t ó r e n i e j e s t a n a l i t y c z n e m.

I z innego jeszcze punktu widzenia byłoby niewłaściwem ścieśnienie teoryi funkcyj do teoryi funkcyj analitycznych. Istnieje wiele zagadnień, w których okoliczność, że dane są analitycznemi, nie stanowi bynajmniej ułatwienia w szukaniu rozwiązania, i w których, przywiązując zbyt wiele uwagi do natury fych danych, narażamy się na szukanie rozwiązań na drogach bez wyjścia. Jakąż naprzykład ważność dla zagadnienia o oziębianiu się sztaby, o którem mówiliśmy wyżej, może mieć ta okoliczność, że dane $A(x)$ i $f(x)$ są lub nie są analitycznemi? Ale nie jest to wszystko: istnieje jeszcze jeden punkt, na który pragnę położyć nacisk. Może zdarzyć się, że okoliczność, iż mamy do czynienia z funkcyami analitycznemi, prowadzi istotnie do rozwiązania, ale to rozwiązanie może nie przedstawiać się w postaci najdogodniejszej, do której właśnie dojdziemy wtedy, gdy odwrócimy uwagę od natury analitycznej danych zagadnienia. Teorya równań różniczkowych daje nam przykłady, stwierdzające powyższą uwagę; jednym z nich jest twierdzenie zasadnicze Rachunku całkowego o istnieniu całki równania $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Te dowody, w których nie zakładamy wcale, iż funkcya f jest analityczną, dają nam obszar największy, w których całka jest z pewnością oznaczoną; analista zaś, który zakłada, że funkcya rzeczywista $f(x, y)$ jest analityczną i stosuje tylko szeregi całkowite, dochodzi przez dowodzenie swoje do obszaru bardziej ścieśnionego.

W tem, co wyżej powiedziano, miałem na celu wykazanie, iż nie należy zacieśniać systematycznie pojęcia funkcyi. Podziwiajmy systematy dobrze uporządkowane, ale niedowierzajmy nieco ich wyglądowi scholastycznemu, który może osłabić ducha wynalazczości. Nie mamy oczywiście zamiaru zaprzeczenia wielkiej wartości aktualnej teoryi funkcyj analitycznych, ale nie należy też zapominać o tem, że stanowią one klasę bardzo szczególną funkcyj. Jest do życzenia, aby nadszedł dzień, w którym matematycy opracowywać będą teorye coraz bardziej ogólne; nastąpi to, być może, w nadchodzącem stuleciu, skoro pojęcie funkcyj, którego histōryę tak niedokładnie wam nakreśliłem, nie przestanie rozwijać się w dalszym ciągu. Ale w chwili obecnej jesteśmy jeszcze w wieku XIX i dla tego będę miał sposobność wypowiedzenia zaszczytnego zadośćuczynienia funkcyom analitycznym, które, jak wiadomo, są od lat trzydziestu przedmiotem wielu prac znakomitych.

6. Widzieliśmy, jakie rozległe perspektywy otwiera nam coraz większe rozszerzanie pojęcia funkcyi. Zapewne, należy zachowywać na tej drodze wielką roztropność i nie podejmować przedwcześnie poszukiwań, które mogłyby pozostać bezpłodnemi; ale nie ulega wątpliwości, iż nadejdzie chwila, w której Analiza poczuje potrzebę rozszerzenia obszaru swych badań. Ale nietylko rozszerzenie pojęcia funkcyi zajmowało matematyków bieżącego stulecia, którzy zastanawiali się nad zasadami wiedzy; żywe zajęcie budziła też kwestya liczb zespolonych, a budziła je tembardziej, że nad tem pytaniem unosiła się pewna ciemność, powstała skutkiem nazwy nieco tajemniczej liczb urojonych. Dziś przedmiot ten nie przedstawia nic tajemniczego. W e i e r s t r a s s w rozprawie, ogłoszonej w roku 1884, rozwinął teoryę liczb zespolonych. Rozważa on w niej liczby postaci:

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n ,$$

w której liczby x są liczbami zwykłemi rzeczywistemi albo urojonemi; liczby e są czystemi symbolami. Stawia on hypotezę, że suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb tej mnogości należą też do mnogości; iloczyny przeto $e_p\, e_q\, (p, q = 1, 2, \ldots, n)$ będą wyrażeniami $E_{p,q}$ liniowemi i jednorodnemi względem $e_1, e_2 \dots e_n$; wyrażenia te odgrywają rolę zasadniczą w tej teoryi. Weierstrass przyjmuje nadto, że tak dodawanie jak i mnożenie są działaniami przemiennościowemi i łącznościowemi. Dla dodawania własności te sprawdzają się same przez się; dla mnożenia wyrażają się one przez równości:

$$ab = ba \quad , \quad (ab) \,.\, c = a \,.\, (bc)$$

gdzie a, b, c są jakiekolwiek trzy liczby uważanej mnogości. Warunki te prowadzą do pewnych związków pomiędzy spółczynnikami form liniowych E_{pq}. Każdemu układowi form E_{pq}, sprawdzającemu te warunki, odpowiadać będzie pewna mnogość liczb zespolonych. Liczby zespolone, tak określone, w jednym tylko punkcie różnią się od liczb zespolonych zwykłych. Kiedy n jest większe od 2, mogą istnieć liczby różne od zera, których iloczyn przez pewne inne liczby jest zerem. Weierstrass nazywa takie liczby dzielnikami zera. Dedekind wykazał, że w ogóle rachunki z temi liczbami zespolonemi sprowadzają się do rachunków Algebry zwykłej. Mówiąc dokładniej: jeżeli kwadrat liczby może być zerem tylko wtedy, gdy sama liczba jest zerem, to zamiast pierwotnych n jednostek zespolonych możemy podstawić n innych (wyznacznik podstawienia ma być różny od zera) takich, że dla nowych jednostek będzie:

$$e_i'^2 = e_i' \quad , \quad e_i' e_k' = 0 \,. \qquad (i \neq k)$$

Wnosimy stąd, że rachunki z liczbami zespolonemi wyżej określonemi, sprowadzają się do rachunków z liczbami rzeczywistemi lub zespolonemi zwyczajnemi.

Jeżeli teraz pominiemy założenie, przyjęte dla algebry liczb zespolonych, mianowicie to, że stosują się do niej oba prawa przemienności i łączności, a staniemy na punkcie ogólniejszym, przyjmując jedno tylko prawo łączności, wyrażone wzorem $(ab)\,c = a\,(bc)$, otrzymamy algebrę jeszcze ogólniejszą, którą określa zupełnie układ wyrażeń liniowych $E_{p,q}$. Przykładem sławnym takiego układu o czterech jednostkach e_1, e_2, e_3, e_4 jest układ kwaternionów Hamiltona z jednostkami

$$e_1 = 1 \quad , \quad e_2 = i \quad , \quad e_3 = j \quad , \quad e_4 = k$$

i ze związkami:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k \quad ; \quad jk = -kj = i \quad ; \quad ki = -ik = j \, .$$

Spostrzeżenie bardzo interesujące H. Poincarégo sprowadza całą teoryę ilości zespolonych do zagadnienia z teoryi grup. Spostrzeżenie to polega na tem, że każdemu układowi jednostek zespolonych odpowiada grupa ciągła (w znaczeniu nadawanem temu pojęciu przez Liego) podstawień liniowych o n zmiennych ze spółczynnikami, które są funkcyami liniowemi n parametrów dowolnych, i odwrotnie. Pomysł ten pogłębił G. Scheffers i doszedł tym sposobem do podziału liczb zespolonych na dwie klasy, stosownie do tego, czy grupa im odpowiadająca jest całkowalna albo nie całkowalna. Do tej drugiej klasy należy grupa, odpowiadająca kwaternionom, które są najprostszemi przedstawicielami tej kategoryj liczb zespolonych. Zbliżenie pomiędzy teoryą grup Liego a liczbami zespolonemi usuwa tajemniczość, która zdawała się być przywiązana do tych ostatnich i uwidocznia prawdziwe źródło tych symbolów. Można zapytać, czy ten symbolizm zdolny jest podnieść potęgę Analizy. We Francyi niewielu geometrów interesuje się temi rachunkami; przeciwnie w Anglii i — o ile wiem — w Ameryce, kwaterniony są bardzo cenione. Nie władam dostatecznie tem narzędziem, aby orzec, czy stosowanie go w Mechanice lub w Fizyce matematycznej upraszcza znacznie rachunki; jest to prawdopodobnie przedewszystkiem rzecz wprawy. Pytaniem istotnie interesującem jest, czy te ilości zespolone będą miały z czasem to znaczenie dla Analizy ogólnej, jakie mają dziś liczby urojone zwyczajne. Próby dotychczasowe na tej drodze nie wydają się dość szczęśliwemi; ale obecnie, gdy związek z teoryą grup został zupełnie uwidoczniony, nie jest niemożliwem, iż nowe usiłowania doprowadzą do rezultatów interesujących.

Pojęcie liczby rzeczywistej i zespolonej oraz pojęcie funkcyi stanowią podstawy Analizy; ale prócz nich jest jeszcze jedno pojęcie, które, dzięki pracy matematycznej tego stulecia, uległo znacznemu rozszerzeniu. Pojęcie przestrzeni — o niem tu mowa — stanowiące przedmiot geometryi, poddano krytyce przenikliwej, która odnowiła podstawy geometryi. Nie będę tu przytaczał historyi tego rozwoju, który rozpoczął się od Gaussa, Bolyai'a i Łobaczewskiego, historyi bardzo często powtarzanej, nie stanę też po żadnej stronie w sporach, które o tym przedmiocie prowadzą dotąd filozofowie; powiem tylko słowo o znaczeniu, jakie mają dla matematyki te spekulacye nad istotą przestrzeni. W sławnej rozprawie Riemanna ukazują się poraz pierwszy pojęcia, odnoszące się do krzywizny przestrzeni w różnych kierunkach, t. j. funkcye niezmiennicze w liczbie $\frac{n(n-1)}{2}$, charakterystyczne dla rozmaitości n-wymiarowej; teorya form kwadratowych różniczek otrzymała przez to silny bodziec w swym rozwoju. Przytoczę jeden tylko przykład, mianowicie formę $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$, która daje element łuku w geometryi Łobaczewskiego i przypominam rolę, jaką ona odegrała w badaniach Poincarégo nad tworzeniem grup fuchsowych. Helmholtz po Riemannie przeniósł kwestyę na grunt inny: jego myśl zasadnicza polegała na zbadaniu ogółu ruchów możliwych w rozważanej przestrzeni. Wielki fizyk traktował tym sposobem bezwiednie zagadnienie, należące do teoryi grup. Ta teorya nie istniała jeszcze w epoce, w której Helmholtz pisał swoją rozprawę; popełnił on przeto kilka błędów drugorzędnych, ale pozostanie przy nim sława traktowania geometryi jako zagadnienia z teoryi grup. Badanie Helmholtza podjął następnie w całej rozciągłości Lie, któremu dały one wspaniałą sposobność zastosowania pięknej teoryi grup przekształceń. W badaniach tych, przestrzeń uważa się a priori jako rozmaitość; w przypadku np. trzech wymiarów, punkt jest określony przez trzy wielkości x, y, z. Ruch w przestrzeni jest tem samem, co przekształcenie:

$$x' = f(x, y, z) \quad , \quad y' = \Phi(x, y, z) \quad , \quad z' = \Psi(x, y, z) \, ,$$

ważne dla pewnej części przestrzeni. Przyjmuje się, że wszystkie ruchy możliwe tworzą grupę o sześciu parametrach; że nie zmieniają pewnej funkcyi spółrzędnych dwóch punktów dowolnych; że wreszcie możliwym jest ruch swobodny, jak wyrażał się Helmholtz. Lie dowodzi, że przestrzeń euklidesowa i przestrzenie nieeuklidesowe są jedynemi przestrzeniami, czyniącemi zadość tym warunkom. Z punktu widzenia Liego badanie zasad geometryi może być uważane jako wyczerpane; lecz należy nadmienić, że stosuje się ono tylko do rozważań małej części przestrzeni. Clifford i Klein zwrócili uwagę na kwestyę nadzwyczaj interesującą, a dotyczącą spójności przestrzeni; nic nie wiemy o spójności przestrzeni, w której żyjemy. Można też pogłębić pojęcie o przestrzeni, uważanej za rozmaitość, i podporządkować pojęcie jej miarowe pod pojęcie rzutowe, jak to uczynili v. Staudt, Cayley i Klein. Na tej wzmiance atoli o tych różnych kierunkach ograniczyć się muszę.

Chciałem tu jedynie wykazać, jakie perspektywy otwiera badaczom rozszerzenie naszych pojęć o funkcyach, o liczbie, o przestrzeni. Jeżeli prace matematyczne w nadchodzącem stuleciu będą tak płodne jak w obecnem, to Analiza po stu latach bardzo różnić się będzie od dzisiejszej. Być może, że następcy nasi będą wykonywali biegle rachunki z funkcyami bardzo niezwykłemi i że widzieć będą jasno przestrzenie wielowymiarowe i o spójności złożonej. Aby módz przedstawić sobie matematykę w roku 2000, należałoby mieć fantazyę autora książki: „Looking Backward“; niestety, Bellamy w romansie swoim nic nie powiedział nam o matematyce w tej epoce. Ponieważ ludzkość — jeżeli możemy temu wierzyć,—będzie rozporządzała wtedy znaczną ilością czasu swobodnego, matematyka będzie bezwątpienia bardzo kwitnącą, a zagadnienia, które sprawiają nam obecnie trudność, staną się zabawkami dziecinnemi dla naszych następców.

II.

Kilka poglądów ogólnych na teoryę równań różniczkowych.

1. Pragnąłbym dziś podać zarys teoryi równań różniczkowych, która odgrywa tak ważną rolę w Analizie, a której postępy mają tyle znaczenia dla jej zastosowań. Jest to dziedzina bardzo rozległa i dlatego odczuwam pewną trudność w wyborze pomiędzy tylu różnemi kierunkami, w jakich ta teorya się rozwijała. Geometrowie ostatniego stulecia nie bardzo kłopotali się o ścisłe uzasadnienie istnienia całek równań różniczkowych; całkowali, kiedy mogli, równania różniczkowe, które napotykali w swych badaniach, nie troszcząc się bynajmniej o twierdzenia, zwane dziś „twierdzeniami o istnieniu", którym dziś przypisujemy tak wielką wagę. Cauchy'emu zawdzięczamy pierwsze ściłe badania w tym przedmiocie; nie zbadał on wprawdzie całej tak rozległej dziedziny, ale przynajmniej dla przypadku, w którym funkcye i dane są analitycznemi, wskazał zasady, któremi kierowali się później jego następcy.

W twierdzeniach, odnoszących się do istnienia całek, używamy metod różnych, stosownie do tego, czy równania i dane przyjmujemy za analityczne lub za nieanalityczne.

2. Rozpatrzmy najprzód przypadek pierwszy, daleko lepiej opracowany. Idea zasadnicza Cauchy'ego polega na rozważaniu funkcyj, które on nazywa „majorantes". Wiadomo, że trudności tkwią głównie w uzasadnieniu zbieżności pewnych szeregów całkowitych, które tworzymy z danych równań różniczkowych. Cauchy dochodzi do tego przez porównanie z innemi równaniami łatwo całkowalnemi. Dla równań różniczkowych zwyczajnych pozostało po Cauchym niewiele do zrobienia, prócz pewnych uproszczeń co do formy. I dla przypadku jednego równania o pochodnych cząstkowych o ilukolwiek zmiennych ten wielki geometra wskazał punkty główne dowodzenia, które Zofia Kowalewska przedstawiła później w formie bardzo prostej w swej rozprawie klasycznej. Twierdzenie podstawowe

jest takie: Mamy dane równanie o pochodnych cząstkowych rzędu n-tego, odnoszące się do funkcyi z, zależnej od $p+1$ zmiennych niezależnych $x, x_1, \ldots, x_p$; jeżeli to równanie zawiera pochodną $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ rzędu n-tego, wtedy całka jego będzie w ogóle oznaczoną, jeżeli damy sobie dla $x=a$ wartości funkcyi z i jej pochodnych względem x aż do rzędu $n-1$; te dane są funkcyami holomorficznemi zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_p$ w sąsiedztwie wartości $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Można przeto, opierając się na powyższem wysłowieniu powiedzieć, że całka ogólna rozważanego równania zależy od n funkcyj p zmiennych niezależnych. Dawniej wielką przywiązywano wagę do tego, od ilu funkcyj dowolnych zależy całka ogólna równania o pochodnych cząstkowych; wszakże niektóre rezultaty paradoksalne już zwróciły były uwagę na tę okoliczność, iż rozmaite postaci całki ogólnej równania ciepła $\frac{\partial^2 z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$ występują raz z jedną, drugi raz z inną liczbą funkcyj dowolnych. Te rezultaty dziś bynajmniej nas nie dziwią, gdy się ma do czynienia, jak w naszym przypadku, z funkcyami analitycznemi. Dość przypomnieć sobie, że liczba skończona jakakolwiek funkcyj o ilukolwiek zmiennych niezależnych nie przedstawia z punktu widzenia arytmetycznego większej ogólności, niż jedna funkcya, zależna od jednej tylko zmiennej, albowiem tak w pierwszym jak i w drugim razie mnogość spółczynników rozwinięć jest mnogością odliczalną. W ten sposób możemy zrozumieć, dla czego E. Borel mógł wykazać, że każda całka analityczna równania o pochodnych cząstkowych ze spółczynnikami analitycznemi daje się przedstawić za pomocą wzoru, zawierającego tylko jednę funkcyę dowolną zmiennej rzeczywistej.

Mówiliśmy dotąd o jednem równaniu o pochodnych cząstkowych. Badanie układów równań różniczkowych przedstawiało większe trudności. Jedno zwłaszcza pytanie pozostawało długo bez odpowiedzi: można było, mianowicie, zapytać, czy istnieją układy, obejmujące nieograniczoną liczbę równań różniczkowych, t. j. równań, nie dających się wyprowadzić przez różniczkowanie z pewnej liczby z pomiędzy nich. Otóż Tresse wykazał, że jeżeli określimy w jakikolwiek sposób układ równań różniczkowych cząstkowych, to układ ten musi być koniecznie ograniczony, t. j. że istnieje liczba skończona s taka, iż wszystkie równania rzędu wyższego niż s, zawarte w układzie, wyprowadzają się z równań rzędu równego s lub niższego od s, przy pomocy prostych różniczkowań. Następne pytanie dotyczyło natury elementów dowolnych, występujących w całce ogólnej. Z. Kowalewska zbadała niektóre tylko układy, w których liczba równań jest równa liczbie funkcyj niewiadomych i które dają się rozwiązać względem pochodnych każdej z tych funkcyj rzędu najwyższego, wziętych względem tej samej zmiennej x. Riquier, a po nim Delassus, dali w różnych postaciach rozwiązanie zagadnienia w przypadku ogólnym. Drugi z nich, przy pomocy zamiany zmiennych, dochodzi do formy kanonicznej zupełnie całkowalnej i wykazuje że całkowanie takiego układu o m zmiennych sprowadza się do całkowania kolejnego m układów Z. Kowalewskiej, zawierających kolejno $1, 2, \ldots, m$ zmiennych. Opierając się na tej własności, można łatwo udowodnić istnienie całek analitycznych oraz wyznaczyć funkcye i stałe początkowe w liczbie skończonej, od których te całki zależą.

Matematycy długo wahali się co do tego, co należy rozumieć przez całkę ogólną równania o pochodnych cząstkowych. Jeżeli ograniczymy się do przypadków, w których występują w równaniach tylko elementy analityczne i jeżeli szukamy tylko całek anatycznych, wtedy całkę uważamy dziś za ogólną, skoro możemy rozporządzić występującemi w niej funkcyami i stałemi dowolnemi w ten sposób, aby módz otrzymać rozwiązania, których istnienie wykazały twierdzenia Cauchy'ego i jego następców. Dawniej Ampére w swej wielkiej rozprawie o równaniach różniczkowych cząstkowych stanął na innem stanowisku; wyraża się on w niej tak: „aby całka była ogólną, trzeba aby pomiędzy rozważanemi zmiennemi i ich pochodnemi do nieskończoności wynikały z niej tylko takie związki, które wyrażają równanie dane i równania, które otrzymujemy z danego przez różniczkowanie“. Jest jasnem, że idzie tu o związki, nie zawierające żadnej z wielkości dowolnych, zachodzących w rozważanej całce. Zdania geometrów były podzielonemi i pytano, czy definicye Ampére'a i Cauchy'ego są identycznemi. Goursat, któremu teorya równań o pochodnych cząstkowych zawdzięcza tyle pięknych badań, wykazał jasno na wielu przykładach, że całka może być ogólną w znaczeniu przyjętem przez Ampère'a, a nie być taką według określenia Cauchy'ego.

Nie należy wnioskować z prac poprzednich, że badanie warunków, określających całki układu równań o pochodnych cząstkowych, nawet wtedy gdy idzie tylko o całki i równania analityczne, jest już obecnie całkowicie ukończone. Wskazane wyżej twierdzenia ogólne dają nam poznać pewne warunki, określające całkę, ale całka może być też określona przez nieskończenie wiele innych warunków. Nie ulega wątpliwości, że jest nieskończenie wiele typów tych twierdzeń o istnieniu. Weźmy np. równanie bardzo proste

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0.$$

Całka tego równania jest określona przez warunek, aby dla $x=0$ sprowadzała się do danej funkcyi zmiennej y, dla $y=0$ do danej funkcyi zmiennej x. Jest to warunek wyznaczenia całki, odmienny od warunków twierdzenia ogólnego Cauchy'ego. Rozmaite warunki wyznaczania całek równań różniczkowych cząstkowych wymagają jeszcze licznych nowych poszukiwań.

3. Dotąd staliśmy na stanowisku teoryi funkcyj analitycznych. Powiedziałem już poprzednio, że tak ze stanowiska filozoficznego jak i nawet ze względów praktycznych, często jest ważnem poczynienie założeń ogólniejszych. I tu znowu Cauchy'emu zawdzięczamy dowód istnienia całek dla równań różniczkowych zwyczajnych, bez tego ograniczenia, że równania są analitycznemi. Metoda Cauchy'ego. bardzo naturalna i bardzo prosta, polega na uważaniu równań różniczkowych jako granic równań różnicowych. Można o tej metodzie Cauchy'ego uczynić uwagę wielce ciekawą; nadaje się ona do otrzymania takich rozwinięć całek, które są zbieżnemi tak długo, póki całki są ciągłemi i pozostawiają ciągłemi ich spółczynniki różniczkowe. Pod tym względem ta metoda jest wyższą od innych, stosowanych w tem rozważaniu. Tak np. niechaj będzie układ równań

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad , \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

gdzie funkcye X_i są wielomianami. Całki tego układu, przybierające dla $t = 0$ odpowiednio wartości $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, można przedstawić za pomocą rozwinięć postaci:

$$P_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n, t) + \ldots + P_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t) + \ldots,$$

gdzie wyrażenia P są wielomianami zależnemi od $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t$; rozwinięcia te są zbieżnemi, o ile całki pozostają funkcyami ciągłemi zmiennej t.

Podano i inne metody w celu wykazania istnienia całek, jak np. metodę przybliżeń kolejnych, która daje szeregi o zbieżności dość szybkiej, ale szeregi te niekoniecznie są zbieżnemi w całym obszarze, w którym całki są ciągłemi.

Gdy chcemy wykazać istnienie całek dla równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n-tego, zakładamy zwykle jako dane dla pewnej wartości x wartości funkcyi i jej pochodnych aż do rzędu $n - 1$; ale możnaby przyjąć i inne dane, co mianowicie ma miejsce w zastosowaniach Rachunku waryacyjnego. Tak np. dla równania różniczkowego rzędu 2-go zdarza się, że całka jest określona przez warunki takie, aby przybierała dla x_0 wartość y_0, dla x_1 wartość y_1. Mało pracowano dotąd w tym kierunku, a jednak rozmaite warunki początkowe są tak samo interesujące, jak warunki, przyjęte w twierdzeniu ogólnem klasycznem. Badania, na tej drodze podjęte, doprowadziły do pewnych rezultatów przy stosowaniu metod przybliżeń kolejnych; można było np. poznać przypadki osobliwe rozbieżności, zachodzące przy użyciu tych metod.

Przejdźmy teraz do równań cząstkowych, w których równania i dane nie są koniecznie analitycznemi. Jest to dziedzina bardzo rozległa, w której stawiamy dopiero pierwsze kroki. Potrzeba już pewnego trudu, aby wykazać istnienie całek równania liniowego

$$\frac{\partial f}{\partial x} + X(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

jeżeli nie zakładamy, że funkcya $X(x, y)$ jest analityczną. Dla równań rzędów wyższych znamy dotąd tylko niewielką liczbę typów, dla których możemy określić dokładnie, co rozumiemy przez całkę ogólną. Źródłem takich równań są w ogólności zagadnienia Geometryi nieskończonostkowej albo Fizyki matematycznej; zmienne i funkcye są tu rzeczywistemi. Weźmy jako przykład równanie:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

w którem a, b, c są funkcyami ciągłemi zmiennych x i y; o równaniu tem Riemann napisał kilka kart niezmiernie interesujących. Niechaj będzie łuk krzywej MP taki, że każda prosta równoległa do Ox albo do Oy spotyka go najwyżej w jednym punkcie; dajmy sobie wartość funkcyi z i $\frac{\partial z}{\partial x}$ na tej krzywej. Istnieje całka i to jedyna, ciągła wraz z swemi pochodnemi cząstkowemi rzędu pierwszego, czyniąca zadość danym warunkom; będzie ona określona wewnątrz prostokąta o bokach równoległych odpowiednio do osi i o wierzchołkach przeciwległych w punktach M i P. Widzimy, o ile to wysłowienie jest dokładniejszem niż wysłowienia poprzednie ze stanowiska teoryi funkcyj analitycznych, gdzie ustanawiamy jedynie istnienie rozwiązania w sąsiedztwie krzywej, a zatem w sąsiedztwie określonem w sposób mało dokładny. Ten przykład prosty pokazuje zarazem, że nie zawsze istnieje całka ciągła wraz ze swemi pochodnemi, czyniąca zadość warunkom na łuku krzywej; tak będzie mianowicie, kiedy dla tego łuku istnieje styczna równoległa do jednej z osi. Oto drugi przykład tej samej kategoryi; jeżeli mamy równanie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

to można dać sobie wartości funkcyi u i pochodnej $\frac{\partial u}{\partial z}$ dla wszystkich punktów koła C, położonego w płaszczyźnie $z = z_0$; całka, tak określona, będzie oznaczoną wewnątrz dwóch stożków obrotowych, przechodzących przez okrąg C i mających tworzące równoległe do tworzących stożka $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Warunki, określające całki, mogą mieć formy najrozmaitsze. Tak np. warunkami ciągłości można zastąpić pewne dane; jest to fakt, do którego przywykliśmy, a mimo to, niemniej jest on godny uwagi. Równanie potencyału wywołało w tym kierunku bardzo liczne poszukiwania, a twierdzenie Riemanna, któremu ten uczony nadał nazwę zasady Dirichleta było przedmiotem głębokich badań Schwarza, Neumanna, a w ostatnich czasach Poincarégo. Analogiczne zagadnienie postawiono i rozwiązano dla wielkiej liczby równań, np. dla równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

którego całka ciągła jest określona przez jej wartości na obwodzie zamkniętym w każdym obszarze, w którym spółczynnik c jest ujemny. Tego rodzaju zagadnienia nie ograniczają się zresztą do równań liniowych.

Te różne przykłady charakteryzują naturę twierdzeń o istnieniu całek, kiedy nie stajemy na stanowisku teoryi funkcyj analitycznych. Mamy tu rozległą dziedzinę poszukiwań, ważnych zarazem dla teoryi czystej i dla zastosowań Analizy. Nie tykając nawet pytań zupełnie nowych, ileż tu znaleźlibyśmy punktów do ponownego rozpatrzenia się w sławnych pracach fizyków-geometrów pierwszej połowy tego stulecia, w pracach Fouriera, Poissona, a nawet i Cauchy'ego, gdybyśmy chcieli wnieść do nich tę ścisłość, jaka jest wymagana dzisiaj w Matematyce!

Dla scharakteryzowania przejścia, istniejącego pomiędzy dwoma kierunkami badań nad teoryą ogólną równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, powiem, że istnieją klasy równań bardzo rozległe, których wszystkie całki są analitycznemi. Jako przykład wymieniamy równania liniowe rzędu n-tego o dwu zmiennych niezależnych; w obszarze płaszczyzny, w którym wszystkie charakterystyki są urojonemi, każda całka dobrze określona i ciągła wraz ze swemi pochodnemi aż do rzędu n-tego, jest koniecznie analityczną. Istnieją też liczne przykłady równań nieliniowych, których wszystkie całki są analitycznemi.

Wspomniałem o charakterystykach równania; jest to przedmiot, będący w ścisłym związku z twierdzeniami ogólnemi o istnieniu, o których mówiliśmy wyzej. Charakterystyki są to pewne rozmaitości, mające własności szczególne odnośnie do równania danego, rozmaitości osobliwe pod tym względem, że nie określają całki, a więc przeciwnie, niż to ma miejsce w ogóle dla rozmaitości, zawierających te same elementy. O ile pojęcie charakterystyki jest dziś bardzo dokładnie ustanowionem dla równań lub dla układów równań o dwóch zmiennych niezależnych, o tyle wymaga jeszcze pogłębienia dla przypadku większej od 2 liczby zmiennych.

4. Od badań ogólnych, odnoszących się do istnienia całek, przejdźmy do omówienia sposobów szukania samych całek i badań nad równaniami specyalnemi. Usiłowanie rozklasyfikowania tak wielkiej liczby prac jest zadaniem bardzo trudnem, i czujemy dobrze, że klasyfikacya nasza będzie słabą w rozmaitych punktach. Być może, iż należałoby wyróżnić przedewszystkiem dawną Szkołę matematyczną, gdzie wyraz „dawna" nie znaczy bynajmniej, że ta Szkoła dziś już nie kwitnie. Jest to szkoła Eulera, Lagrange'a, Monge'a w jego nieśmiertelnem dziele o zastosowaniach Analizy do Geometryi, Ampère'a w jego sławnej rozprawie z roku 1817 o równaniach o różnicach cząstkowych. We Francyi głową tej Szkoły analistów-geometrów, dla których problematy geometryi dają sposobność do pięknych poszukiwań analitycznych, jest Darboux. Jego lekcye o teoryi powierzchni są dziś dziełem klasycznem, które zwróciło uwagę na wiele pytań od pewnego czasu zaniedbanych. Do całkowania faktycznego równań rzędu 2-go nic zasadniczego nie dorzucono w ciągu długich lat, upłynionych od ukazania się rozprawy Ampère'a. W roku 1870 Darboux ogłosił rozprawę zawierającą poglądy głębokie i oryginalne, które stało się podstawą w dziejach tej teoryi. Od tej epoki rozmaici geometrowie obmyślali metody więcej lub mniej analogiczne. Goursat ogłosił w tym przedmiocie wyniki wielce interesujące: w dziele wybornem zebrał on metody podane, dodając własne odkrycia w tej trudnej dziedzinie. Wszystkie te badania można scharakteryzować, mówiąc, że idzie w nich o znalezienie wyraźne całek z możliwie wysokim stopniem nieoznaczoności. W niektórych razach metody są wskazaniem postępowania, jakie podjąć należy, jeżeli nasuwa się podobna

szczęśliwa okoliczność; wtedy szukamy klas równań, dla których to ma miejsce. W innych przypadkach wyrzekamy się przynajmniej na razie, całkowania zupełnego i za pomocą odpowiednich przekształceń szukamy rozwiązań coraz rozleglejszych, jak to czyni np. Bianchi dla równania powierzchni o krzywiźnie stałej.

Pomysły wielkiego geometry norwegskiego Sophusa Lie, którego świeżą stratę opłakuje nauka [1]), wywierały od lat dwudziestu wpływ wielki na badanie równań różniczkowych z tego punktu widzenia, jaki zajmuje nas w tej chwili. Teorya grup przekształceń, jedna z najpiękniejszych kreacyj matematycznych tego wieku, przyniosła nam element nieporównany do klasyfikacyi, albowiem pozwoliła na przeprowadzenie rozległej syntezy, sprowadzając do jednego źródła pojęcia rozproszone, które zdawały się być zupełnie niezwiązanemi wzajemnie.

Powiedziałem był przed chwilą, że nasze klasyfikacye z trudnością naginają się do złożoności przedmiotów. Pewne zagadnienia znajdują się w spływie, w którym spotykają się dawne Szkoły Monge'a i Ampère'a z nową szkołą, opierającą się na nowoczesnej teoryi funkcyj. Monge zcałkował równanie powierzchni minimalnych i to jest jeden z tytułów jego sławy. Wzory jego przekształcił Weierstrass i wtedy ujawnił się związek pomiędzy teoryą funkcyj zmiennej urojonej a teoryą powierzchni minimalnych. Jedne zagadnienie zwłaszcza żywo pobudza uwagę naszą w tej teoryi: jest to zagadnienie Plateau'a, odnoszące się do powierzchni minimalnych, przechodzących przez kontur dany. Zagadnienie to rozwiązano dotąd jedynie w trzech przypadkach bardzo specyalnych; mniemam, że pobudzając ducha wynalazczego analistów, da ono jeszcze sposobność do poczynienia ważnych postępów w Analizie ogólnej.

5. Mówiłem dotąd głównie o równaniach o pochodnych cząstkowych. Teorya równań różniczkowych zwyczajnych jest bardziej specyalną, zwłaszcza, że niektórzy są skłonni uważać ją za rozdział teoryi funkcyj analitycznych. Po uwagach, które wyżej uczy-

---

[1]) Patrz art. „O działalności naukowej Sophusa Lie'go", przez K. Żorawskiego, Wiadomości matemat. t. III, str. 85—119. (Przyp. Red.)

niłem, nie mam potrzeby dodawać, że nie jestem tego zdania. Pprzytoczyłem już różne zagadnienia, które bynajmniej nie zawisły od teoryi funkcyj analitycznych, a zacytuję jeszcze rozciągnięcie pomysłów Galois'a na równania różniczkowe. Mimo to, nie ulega wątpliwości, że postępy teoryi funkcyj analitycznych najpomyślniej oddziałały na rozwinięcie pewnych punktów teoryi równań różniczkowych zwyczajnych. Przypomnę tu tylko sławną rozprawę Puiseux'a o funkcyach algebraicznych, w której ten uczony, badając z nowego punktu widzenia najprostsze równania różniczkowe, t. j. kwadratury, odkrył źródło peryodyczności całek różniczek algebraicznych. Nie mniej klasycznemi są badania Briota i Bouqueta; autorowie ci badają okoliczności osobliwe, które mogą ujawnić się w równaniu różniczkowem rzędu pierwszego, gdy spółczynnik różniczkowy staje się nieskończonym lub nieoznaczonym. Należałoby się cofnąć o półstulecia, aby módz należycie ocenić tę rozprawę, w której poraz pierwszy uwidoczniono rolę punktów osobliwych w badaniu funkcyj; pojęcia te są dla nas dziś pospolitemi, lecz pamiętajmy o tem, że właśnie prace Puiseux'a oraz Briota i Bouqueta wykazały wysoką ich użyteczność. Zdawałoby się, że rozprawa Briota i Bouqueta powinna była stać się bezpośrednim początkiem szeregu prac w tym samym kierunku, tymczasem upłynęły lata, zanim prace te podjęto na nowo i uzupełniono. Pod wpływem wykładów Weierstrassa podjęto w Niemczech badanie osobliwości równań różniczkowych i mianowicie równań różniczkowych liniowych. Jest istotnie uderzającem, że Briot i Bouquet, zbadawszy przypadek trudniejszy osobliwości równania nieliniowego, choć ono było rzędu pierwszego, nie pomyśleli o tem, aby zająć się równaniami liniowemi; zaszczyt utworzenia teoryi tych równań należy się L. Fuchsowi. Znakomity ten geometra niemiecki nie tylko sam wskazał niezmiernie ważne zastosowania tej teoryi lecz i wywołał swemi pracami olbrzymią liczbę poszukiwań. Rozprawami, napisanemi w ciągu lat trzydziestu o teoryi równań różniczkowych liniowych, możnaby wypełnić całe biblioteki. Nie mogę tu ani myśleć o wymienieniu wam licznych badanych dotąd klas równań. Pozostając w dziedzinie ogólnej, przypomnę tylko, że badanie punktów osobliwych przedstawia się bardzo różnie, stosownie do tego, czy punkt osobliwy jest regularnym, jak mówi L. Fuchs, czy też ma cechy punktu istotnie osobliwego. Ten drugi przypadek jest daleko trudniejszy. Thomé utworzył szeregi formalne, czyniące zadość równaniu, ale nie zbieżne. Zauważmy przy sposobności, że Briot i Bouquet pierwsi wykazali, iż równanie różniczkowe może prowadzić do szeregu w ogóle rozbieżnego; podają oni przykład prosty, którem jest równanie:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = ax + by ;$$

równaniu temu czyni zadość szereg całkowity o promieniu zbieżności równym zeru. To drobne spostrzeżenie zwróciło uwagę na fakt wielkiej ważności, napotykany bardzo często w zastosowaniach. W Mechanice analitycznej i w Mechanice nieba mamy bardzo wiele rozwinięć formalnych, które są rozpaczą geometrów. Dla równań liniowych, rozwinięcia te, jak to pokazał Poincaré, mają pewne znaczenie, mianowicie, gdy idzie o przedstawienie asymptotyczne całek. Z drugiej strony można i to niejednym sposobem otrzymać przedstawienie analityczne całek w otoczeniu punktu osobliwego. Co się zaś tyczy punktów osobliwych nieregularnych, to wspomnę tu o badaniach H. von Kocha, który potrafił wyzyskać dla tej kwestyi szczęśliwie wyniki badania nad wyznacznikami rzędu nieskończonego.

Wróćmy do równań rzędu pierwszego. Briot i Bouquet badali przedewszystkiem osobliwości, redukując równania do typu

$$x \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

w którym f jest funkcyą hołomorficzną znikającą dla $x=0$, $y=0$; badania tych autorów uzupełniono potem przez znalezienie formy analitycznej całek w sąsiedztwie punktu osobliwego. Przypadku bardziej złożonego, t. j. równania:

$$x^m \frac{dy}{dx} = f(x, y) , \qquad (m \geqslant 2)$$

po Briocie i Bouquecie aż do ostatnich czasów nie badano. Dopiero niedawno podjęli badanie to równocześnie pp. Horn i Bendixson. Autorowie ci posługują się odpowiednio przystosowaną metodą przybliżeń kolejnych, której zasada jest następująca. Przyjmijmy wyraźnie, że zmienna x pozostaje rzeczywistą i dąży do zera, przechodząc przez wartości dodatnie i połóżmy:

$$f(x, y) = by + F(x, y) \, ,$$

gdzie F nie zawiera wyrazu stopnia pierwszego względem y, niezależnego od x. Jeżeli część rzeczywista ilości b jest dodatnia, równanie poprzedzające ma nieskończenie wiele całek, dążących do zera wraz z zmienną x, a ma jednę tylko całkę, jeżeli część rzeczywista ilości b jest ujemna. Te oba przypadki można traktować, tworząc przybliżenia kolejne:

$$x^m \frac{dy_1}{dx} = by_1 \, , \; x^m \frac{dy_2}{dx} = by_2 + F(x, y_1), \ldots, x^m \frac{dy_n}{dx} = by_n + F(x, y_{n-1}) \, ;$$

otrzymujemy tym sposobem przedstawienie analityczne całek (albo całki). Istnieje rozwinięcie

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \, ,$$

czyniące formalnie zadość rozważanemu równaniu, ale promień jego zbieżności jest w ogóle zerem. Jest to uogólnienie uwagi Briota i Bouqueta. Możemy jeszcze dodać, że pochodna rzędu n-tego wszystkich tych całek dąży do $1 \,.\, 2 \ldots n \,.\, a_n$, gdy x dąży do zera. Nadto, gdy istnieje nieskończenie wiele całek dążących do zera równocześnie, wtedy wszystkie one dają się przedstawić asymptotycznie przez to samo rozwinięcie; jest to oczywiście okoliczność niepomyślna dla użytku podobnego przedstawienia asymptotycznego. Opisane wyżej metody nadają się do rozciągnięcia i na układ równań różniczkowych.

Uczynię jeszcze jednę ważną uwagę o rozpatrywanem przez nas równaniu: przypadek, w którym część rzeczywista ilości b jest zerem, usuwa się zupełnie z pod wyłożonej metody. Równanie ma wtedy w ogóle całki, które nie dążą do żadnej granicy, gdy x dąży do zera. Znajdujemy się wtedy w tym prostym przykładzie wobec takich samych trudności, jakie napotykamy w wielu zagadnieniach Mechaniki analitycznej; napróżno dotąd usiłowano stosować metodę przybliżeń kolejnych ciągłych; rozwinięcia, których próbowano, są w ogóle rozbieżnemi.

Jakkolwiek przeto pozostają jeszcze wielkie trudności do zwalczenia, uczyniono wszakże poważne postępy w badaniu całek równań nieliniowych w sąsiedztwie punktów osobliwych, widocznych z samej postaci równania różniczkowego. Te to punkty są jedynemi, dla których możemy mieć całki w przypadku równania liniowego; inaczej wszakże rzecz się ma dla równań nieliniowych. Poza punktami osobliwemi, które są pozornemi w równaniu, mogą być inne zmienne od całki do całki. Równania rzędu pierwszego nie przedstawiały pod tym względem wielkich trudności. W równaniach różniczkowych algebraicznych wszystkie punkty osóbliwe, które nie są pozornemi, mogą być tylko punktami krytycznemi algebraicznemi. Proste przykłady pokazują, że dla równań rzędu wyższego niż pierwszy tak nie jest: tu mogą być bowiem punkty istotnie osobliwe ruchome. Zwrócono uwagę na ten punkt, gdy na równania różniczkowe rzędu drugiego o punktach krytycznych stałych usiłowano rozciągnąć metody, z powodzeniem stosowane do równań rzędu pierwszego, posiadających tęż własność. Trudność ta istniała jeszcze zupełnie aż do chwili, w której Painlevé poczynił ważne rozróżnienie i zwrócił uwagę na fakt nieoczekiwany. Punkty osobliwe ruchome dają się podzielić na dwie klasy: do pierwszej należą punkty osobliwe algebraiczne lub przestępne, dla których całka i jej pochodne przyjmują wartość oznaczoną, skończoną lub nieskończoną, do drugiej punkty istotnie osobliwe. Painlevé wykazał, że w równaniach różniczkowych algebraicznych przypadek, w którym punkty istotnie osobliwe są ruchomemi, jest przypadkiem wyjątkowym. Równania przeto, o których mówimy, dzielą się na dwie klasy: klasa ogólna, w której całka ogólna nie ma punktów istotnie osobliwych ruchomych i klasa osobliwa. Znaczenie tej klasyfikacyi jest bardzo ważne w badaniu niektórych specyalnych klas równań różniczkowych.

6. Zatrzymajmy się specyalnie nad przypadkiem, w którym zmienne i funkcye są rzeczywistemi; jest to przypadek ważny dla

zastosowań. Oznaczmy przez t zmienną niezależną, którą może być — jeżeli chcemy — czas. Dla badania ilościowego funkcyj, określonych przez równania różniczkowe, t. j. dla możności obliczania wartości tych funkcyj, pożądanem byłoby mieć takie ich przedstawienia, które pozwalają na obliczanie wartości dla możliwie wielkiego przedziału czasu. Istnieją dość rozległe klasy równań różniczkowych, których postać zapewnia nas już z góry o istnieniu r o z w i n i ę ć, nadających się dla wszelkich wartości t. Przypadek bardzo prosty stanowią tu równania

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

w których zakładamy, że funkcye f są ciągłemi dla wszystkich wartości rzeczywistych i skończonych ilości t i y, oraz że wartości bezwzględne pochodnych $\frac{df_i}{dy_e}$ są mniejsze od pewnej liczby stałej. Metoda C a u c h y'ego albo metoda przybliżeń kolejnych daje na y_i rozwinięcia, nadające się dla każdej wartości t.

Jeżeli przyjmiemy, że funkcye f są analitycznemi i regularnemi dla każdej wartości rzeczywistej skończonej lub nieskończonej ilości t i y, wtedy można inną drogą szukać rozwinięć, nadających się dla każdej wartości czasu. Dość wtedy, jak to czyni P o i n c a r é, pas bardzo mały płaszczyzny zmiennej t (uważanej chwilowo za zmienną zespoloną), równoległy do osi rzeczywistej, przedstawić, przy pomocy odwzorowania podobnego, na kole, położonem w płaszczyźnie zmiennej z, lub — co na jedno wychodzi — położyć:

$$z = \frac{e^{ati} - 1}{e^{ati} + 1}.$$

Można postąpić jeszcze inaczej, przypomniawszy sobie twierdzenie, udowodnione przez P a i n l e v é g o, że każda funkcya holomorficzna zmiennej rzeczywistej może być w pewnym przedziale rozwinięta na szereg wielomianów, których spółczynniki zależą liniowo od wartości funkcyi i jej pochodnych dla wartości szczególnej $t = t_0$.

Są przypadki, w których równanie nie należy do kategoryj poprzednio rozważanych, a w których mimo to dla pewnych całek jesteśmy pewni możliwości rozwinięcia, nadającego się dla wszystkich wartości t. Jako pierwszy przykład podaję równania

$$\frac{dx}{dt} = -ax + f\left(\frac{1}{t}, x, y\right), \quad \frac{dy}{dt} = -by + F\left(\frac{1}{t}, x, y\right),$$

w których a, b są dwie stałemi dodatniemi, f i F—szeregami holomorficznemi względem zmiennych $\frac{1}{t}$, x, y, nie zawierającemi ani wyrazów stałych, ani też wyrazów stopnia pierwszego względem x i y. Łatwo wykazać, że gdy dla wartości $t = t_0$, dostatecznie wielkiej, wartości początkowe są dostatecznie małe, to odpowiednie całki dążą do zera dla $t = \infty$. Przykłady takie są, niestety, bardzo rzadkie. Można zacytować jeszcze zagadnienia Mechaniki, w których istnieje funkcya sił. Wiadomo, że równowaga jest stałą w sąsiedztwie położenia, dla którego funkcya sił jest maximum; lecz to twierdzenie klasyczne otrzymano przy pomocy badania pośredniego równań różniczkowych. Toż samo zagadnienie pokazuje nam odrazu, jak pożądanem byłoby badanie bezpośrednie i ile tu jeszcze trudności należy pokonać. Załóżmy, że nie istnieje funkcya sił i ograniczmy się na jednym punkcie materyalnym. Napiszmy równania:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ax + by + \dots, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a'x + b'y + \dots,$$

gdzie strony drugie są szeregami, postępującemi według potęg zmiennych $x, y, \dots$, i zbieżnemi dla dostatecznie małych wartości tych zmiennych. Czy punkt $x = 0, y = 0, \dots$ odpowiada położeniu równowagi stałej? Dziś nie potrafimy odpowiedzieć na to pytanie. Niektórzy mechanicy, być może, są zdania, że natura równowagi zależy jedynie od wyrazów stopnia pierwszego po stronie drugiej. Nie miejmy o to do nich pretensyi, bo taki sam błąd popełnił Lagrange; ale jest jasnem, że redukując równania do ich części liniowej, można otrzymać rozwiązanie dla położenia stalego, które przestaje być rozwiązaniem, skoro przywrócimy wyrazy rzędu wyższego. Równania powyższe przedstawiają ciekawą własność, którą warto tu zaznaczyć. Można szukać ich całki pierwszej, mającej postać:

$$F(x, y, x', y', \ldots) = C, \quad \left(x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}\right)$$

w której F jest funkcyą holomorficzną ilości $x, y, x', y' \ldots$, zaczynającą się od wyrazów stopnia drugiego. Otóż, znajdujemy istotnie funkcyę taką formalnie, ale otrzymany szereg nie jest w ogóle zbieżny. Dodaję jeszcze, że gdyby siła zależała nietylko od położenia punktu lecz i od prędkości, t. j. gdyby w powyższych równaniach różniczkowych strony drugie zależały jeszcze od $x', y' \ldots$, wtedy badanie funkcyi F nie dałoby się ogólnie przeprowadzić, lecz byłoby łatwiej odpowiedzieć na pytanie, dotyczące stałości równowagi.

Nie mając żadnego pojęcia o wielkości przedziału, w którym funkcye, określone przez równania różniczkowe, są ciągłemi, możemy jednak otrzymywać rozwinięcia, nadające się dla całego przeciągu czasu, w którym funkcye te ciągłemi pozostają. Wspomniałem dopiero co, że takie rozwinięcia można otrzymywać przy pomocy metody klasycznej Cauchy'ego; jest to rezultat bardzo ciekawy, ale niestety, ma on jedynie znaczenie teoretyczne, albowiem wyprowadzenie z rozwinięć tych pewnych danych o obszarze, w którym całki są ciągłemi, jest rzeczą trudną.

Istnieją bez wątpienia przypadki, w których pewne własności pomocnicze równań różniczkowych pozwalają na otrzymywanie wzmiankowanych danych o obszarach ciągłości całek. Weźmy naprzykład sześć równań klasycznych ruchu ciała stałego zawieszonego w punkcie, w których zachodzi sześć funkcyj p, q, r, a, a', a''; całka sił żywych oraz całka $a^2 + a'^2 + a''^2 = \text{const}$ pozwalają nam wnieść, że wymienione funkcye pozostają skończonemi dla wszelkich wartości czasu, i wtedy jesteśmy pewni, że dla tego zagadnienia metoda Cauchy'ego daje rozwinięcia, nadające się dla wszelkich wartości czasu.

7. Z kategoryą zagadnień, o których obecnie mówimy, wiążą się prace Poincarégo o rozwiązaniach peryodycznych i o rozwiązaniach asymptotycznych. Badanie rozwiązań peryodycznych równania różniczkowego jest wielce interesującem. Znam mało przykładów, w których możnaby znaleść bezpo-

średnio rozwiązanie peryodyczne. W pracach o tym przedmiocie Poincaré postępuje drogą pośrednią: korzysta z obecności pewnej stałej bardzo małej w równaniach i rozumuje przy pomocy ciągłości, wyszedłszy z rozwiązania peryodycznego dla wartości zero tej stałej. Byłoby pożądanem wniknięcie na innej drodze w to badanie rozwiązań peryodycznych. Co się tyczy rozwiązań pojedyńczo-asymptotycznych do pewnego rozwiązania, to badanie ich wynika z prostych rozwinięć analitycznych; ale istnienie w niektórych szczególnych przypadkach rozwiązań podwójnie asymptotycznych, t. j. rozwiązań asymptotycznych dla $t = -\infty$ do rozwiązania peryodycznego i na nowo asymptotycznych dla $t = +\infty$ do tegoż rozwiązania, było nadzwyczajnie utajone i odkrycie tych rozwiązań wymagało poważnych wysiłków.

Badanie krzywych, określonych przez równania różniczkowe, jest przedewszystkiem badaniem jakościowem. Weźmy na początek równanie stopnia pierwszego i rzędu pierwszego

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

w którem X i Y są wielomianami, zależnemi od x i y; badanie punktów osobliwych ogólnych wypływa z rezultatów, otrzymanych przez Briota i Bouqueta. Punkty te należą do trzech typów, które Poincaré nazywa szyją (col), węzłem (noeud) i ogniskiem (foyer). Punktem osobliwym natury już bardziej skomplikowanej jest ten, który Poincaré nazywa środkiem (centre); ma on w ogóle ma wiele podobieństwa z ogniskami, lecz około niego w pewnych przypadkach całka tworzy krzywą zamkniętą. Mamy wtedy przykład rozwiązań peryodycznych, których peryod zależy od warunków początkowych. Najnowszemi pracami o punktach osobliwych krzywych całkowych powyższego równania są prace geometry szwedzkiego Bendixsona, który udowodnił między innemi, że jeżeli dla tego równania istnieje krzywa całkowa, idąca ku początkowi ze styczną oznaczoną, to wszystkie krzywe całkowe, idące ku początkowi, dojdą tam ze stycznemi oznaczonemi.

Badanie krzywych całkowych nie powinno ograniczać się do sąsiedztwa punktów osobliwych; należy starać się zdać sobie sprawę z ich postaci na całej płaszczyźnie lub też na kuli (przy pomocy perspektywy). Pytamy, co nastąpi, jeżeli postępować będziemy po krzywej całkowej poprzedniego równania? Krzywa ta może być zamknięta w ten sposób, że dojdziemy do punktu wyjścia; może mieć jedno z ognisk, jako punkt asymptotyczny; może też mieć, jako krzywą asymptotyczną, krzywą zamkniętą, czyniącą zresztą zadość równaniu różniczkowemu. Te krzywe zamknięte, które Poincaré nazywa cyklami granicznemi (cycles limites), odgrywają rolę pierwszorzędną; w tych przypadkach, w których umiemy sobie zdać sprawę z ich położenia, badanie równania różniczkowego daje się przeprowadzić w zupełności.

Trudności są znacznie większe dla równania rzędu pierwszego stopni wyższych nad pierwszy. Badano punkty osobliwe ogólne tych równań i stosowano to badanie w zagadnieniach takich, jak wyznaczenie linij krzywiznowych powierzchni, przechodzących przez punkt kołowy (ombilic). Badanie krzywych w całej płaszczyźnie staje się tu skomplikowanem, zwłaszcza skutkiem okoliczności, która nie mogła mieć miejsca dla równań stopnia pierwszego; może się zdarzyć mianowicie, że krzywa całkowa pokrywa pole, t. j. że może się zbliżać, ile chcemy, do punktu dowolnego w tem polu.

Skoro już równania rzędu pierwszego przedstawiają tak poważne trudności, to tembardziej badanie równań rzędów wyższych długich jeszcze wymagać będzie wysiłków badaczy. Z punktu widzenia analitycznego należy zaznaczyć tu następującą ważną okoliczność. Gdy dla równań rzędu pierwszego można mieć korzyść w pewnych przypadkach, jak np. w przypadku środków, z pewnych rozwinięć na szeregi, to w równaniach stopni wyższych, przeciwnie, rozwinięcia analogiczne są czysto-formalnemi. Widzieliśmy już przykład tego wyżej, gdy była mowa o stałości równowagi, i można powiedzieć, że pytania, dotyczące niestałości, są łatwiejsze do badania, niż pytania, odnoszące się do stałości. Gdy istnieje funkcya sił, równowaga jest stała, jeżeli dla tego położenia funkcya sił jest maximum. Co się tyczy położeń rownowagi, dla których nie spełnia się ten ostatni warunek, to uważano je zawsze za niestałe, lecz ta niestałość nie była udowodniona. P. Liapunow uzasadnił ją w szczególności dla przypadku, który można nazwać ogólnym, kiedy nieistnienie maximum funkcyi sił poznajemy przy pomocy wyrazów stopnia drugiego.

Przytoczę jeden tylko przykład, odnoszący się do krzywych całkowych równania rzędu wyższego niż pierwszy. Hadamard badał niedawno linie geodezyjne powierzchni o krzywiznach przeciwnych, o spójności wielokrotnej i o ograniczonej liczbie powłok nieskończonych. Dowiódł on, że styczne do linij geodezyjnych, przechodzących przez punkt powierzchni i pozostających w odległości skończonej, tworzą mnogość doskonałą nieciągłą. Rezultat ten jest ciekawy z punktu widzenia rozmieszczenia linij geodezyjnych na powierzchni: istnieją linie geodezyjne, przybliżające się do linii geodezyjnej zamkniętej oznaczonej, potem odsuwające się od niej, zbliżające się do innej, następnie przechodzące do trzeciej i tak dalej nieograniczenie. J. Hadamard wykazuje dalej, że postać krzywych całkowych może w niektórych przypadkach zależeć od pewnych własności natury nieciągłej, t. j. od własności arytmetycznych stałych całkowania. Powiem tu, że w teoryi równań różniczkowych, jak i w innych jeszcze częściach matematyki, badania przyjmują charakter coraz bardziej arytmetyczny. Jest to t. zw. arytmetyzacya matematyki, o której niedawno pisał F. Klein.

W zarysie powyższym, pozostając w dziedzinie własności ogólnych i nie rozbierając żadnej szczegółowej klasy równań, starałem się narysować niejako kartę geograficzną ogólnikową teoryi równań różniczkowych. Wiele dróg jest otwartych i w rozmaitych kierunkach; na wielu punktach postawiono zaledwie pytania, ale, zdaje się, że postawiono je dobrze, i tu — co ma swoje znaczenie, — zdajemy sobie sprawę z natury trudności, które przezwyciężyć należy. Ścisłe przymierze pomiędzy rozmaitemi gałęziami nauki doprowadzi nas do nowych postępów. Dziś nie wolno geometrowi — odkrywcy być człowiekiem jednego tylko stanowiska i musimy być przygotowani na wielkie komplikacye. Przywilej ten nauki matematycznej dzielić będą w przyszłości z innemi naukami; miejmy wszakże nadzieję, że zjawiać się będą ludzie geniuszu, którzy sprawiać nam będą złudzenie prostoty, przynajmniej czasowej.

III.

O teoryi funkcyj analitycznych i o pewnych funkcyach specyalnych.

1. Teorya funkcyj analitycznych stała się dziś ważną częścią Analizy matematycznej. Rozwój swój świetny zawdzięcza ona odkryciu pewnych podań ogólnych, pomiędzy któremi pierwsze miejsce należy się twierdzeniom Cauchy'ego o całkach, wziętych po obwodzie zamkniętym. Te prawa ogólne funkcyj analitycznych, zastosowane do funkcyj specyalnych, pozwalają nieraz na wyprowadzanie z wielką łatwością głównych własności tych funkcyj. Stosowanie tych praw stanowi metodę syntetyczną, a wyniki, do których doprowadziłby długi szereg przekształceń rachunkowych, ujawniają się w niej niekiedy z oczywistością intuicyjną. Teorya funkcyj eliptycznych daje pod tym względem przykład pamiętny; w istocie, czyż nie jest rzeczą prawie cudowną otrzymanie jednem pociągnięciem pióra głównych własności funkcyj podwójnie peryodycznych przez proste całkowanie wzdłuż równoległoboku peryodów, jak to czyni Hermite? Nie mniej godnym uwagi przykładem metody syntetycznej w teoryi funkcyj jest sposób, w jaki Riemann w swojej rozprawie inauguralnej stawia i rozwiązuje zagadnienie o całkach abelowych.

2. Nie jest już dziś wątpliwem, że Gauss był w posiadaniu podstaw zasadniczych dzisiejszej teoryi funkcyj. Nie ogłosił on wprawdzie swych badań w tym przedmiocie; nie można atoli wcale przypuszczać, aby nie pojmował ich doniosłości. Wierny swej dewizie *pauca sed matura*, Gauss czekał zapewne chwili, w której będzie mógł oddać się szczegółowemu ich opracowaniu; tymczasem ogłosił swoje odkrycia Cauchy, i stał się rzec można, prawdziwym założycielem teoryi, która miała odegrać tak ważną rolę w przyszłości, oczywiście nie w formie dydaktycznej, jaką jej nadał. Odkrywając nowe drogi i bezustannie pracując, Cauchy mało troszczył się o nadanie swym pomysłom formy dosko-

nałej. Śledzimy jego pracę twórczą w licznych publikacyach, zwłaszcza przeglądając niezliczone noty w „Comptes rendus", przedrukowane następnie w wydaniu zupełnem dzieł jego. W teoryi, która nas zajmuje, osobne miejsce należy się pomysłowi zasadniczemu uogólnienia pojęcia całki określonej przez uważanie wartości urojonych zmiennej niezależnej; pomysł ten stał się źródłem najpiękniejszych odkryć, a wyrażenie funkcyi przez całkę, wziętą po obwodzie zamkniętym, zachowa na zawsze nazwę całki Cauchy'ego.

Punkt wyjścia Riemanna zbliża się bardzo do punktu wyjścia Cauchy'ego; jest to bardzo filozoficznie wziąć za podstawę dwa równania równoczesne:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

i sprowadzić tym sposobem teoryę funkcyj zmiennej zespolonej do badania dwu równań jednoczesnych o pochodnych cząstkowych. Przytem ujawniają się związki pomiędzy tem badaniem a wieloma zagadnieniami Fizyki matematycznej, jakiemi są na przykład ruch stateczny płynów po płaszczyźnie lub elektryczności na płycie przewodzącej; wszystkie te zagadnienia nadają się do uogólnienia, jeżeli zamiast zwyczajnej płaszczyzny (x i y) weźmiemy płaszczyznę wielokrotną Riemanna. Powyższe dwa związki prowadzą do równania $\Delta u = 0$, które obejmuje w sobie całą teoryę funkcyj zmiennej zespolonej. Pomiędzy rozmaitemi zagadnieniami, odnoszącemi się do tego równania, najsławniejszem jest zagadnienie o wyznaczeniu całki z jej wartości, danych na obwodzie zamkniętym. Zastosowanie innego rodzaju dotyczy Geometryi: jest niem zagadnienie o kreśleniu kart geograficznych, sprowadzające się do zagadnienia o odwzorowaniu podobnem jednej powierzchni na drugiej.

Weierstrass zbudował teoryę funkcyj zmiennej zespolonej na podstawie odmiennej, niż Cauchy i Riemann. Punktem wyjścia w jego teoryi są rozwinięcia na szeregi potęgowe całkowite; we Francyi uczynił to samo Méray, nie wiedząc nic o wykładach Weierstrassa. Po rozprawie z roku 1876, w której znakomity analista berliński dał poznać szerszej publiczności rezultaty, oddawna już rozwijane w swych wykładach, ukazała się znaczna liczba prac, poświęconych teoryi funkcyj. Już Cauchy otrzymał był ważne twierdzenia o rozwijaniu pewnych kategoryj funkcyj na sumy albo iloczyny nieskończone. Lecz dopiero Weierstrass i jego uczniowie podjęli te pytania w całej ich ogólności. Rozkład funkcyj całkowitych, t. j. funkcyj jednowartościowych i ciągłych w całej płaszczyźnie, na czynniki pierwsze jest jednem z najbardziej godnych podziwu twierdzeń Analizy nowoczesnej; każdy z tych czynników pierwszych jest iloczynem czynnika liniowego przez funkcyę wykładniczą. Rozwinięcia funkcyj jednowartościowych na sumy albo iloczyny nieskończone były potem przedmiotem wielkiej liczby prac, pomiędzy któremi należy wymienić zwłaszcza rozprawę Mittag-Lefflera, traktującego to zagadnienie w całej ogólnej jego możliwości. Przypomnę też rozprawę Rungego, której przywróciły aktualność najświeższe badania, i w której między innemi udowodniono, że każda funkcya holomorficzna w obszarze spójnym może być w tym obszarze rozwinięta na szereg wielomianów.

Cauchy i jego uczniowie francuscy, rozwijając teoryę funkcyj jednowartościowych, nie dotarli do badania tych punktów osobliwych, zwanych dziś istotnie osobliwemi, których przykładem najprostszym jest punkt $z = 0$ dla funkcyi $e^{\frac{1}{z}}$. Rozważanie czynników pierwszych pozwoliło Weierstrassowi wykazać, że w sąsiedztwie punktu istotnie osobliwego odosobnionego funkcya jednowartościowa daje się przedstawić w postaci ilorazu dwóch funkcyj jednowartościowych, nie mających biegunów w sąsiedztwie tego punktu. Weierstrass wykazał, że w sąsiedztwie takiego punktu funkcya zbliża się, ile chcemy, do wszelkiej wartości danej. Uzupełniono następnie to twierdzenie, udawadniając, że w sąsiedztwie punktu istotnie osobliwego istotnego funkcya przyjmuje nieskończenie wiele razy każdą wartość daną, z jedynym możliwym wyjątkiem dla dwu punktów najwyżej. Dowód tego twierdzenia opiera się na rozważaniu funkcyi, mającej posiadać tę własność, której niemożliwość chcemy wykazać; ta funkcya jest funkcyą modułową teoryi funkcyj eliptycznych, ale jej punkty istotnie osobliwe nie są odosobnionemi. Z przytoczonego twierdzenia wypływa jako wniosek, następujące podanie, odnoszące się do funkcyj całkowitych: „jeżeli dla funkcyi całkowitej $G(z)$ istnieją dwie wartości a i b takie, że dwa równania $G(z) = a$ i $G(z) = b$ mają tylko ograniczoną liczbę pierwiastków, funkcya $G(z)$ jest wielomianem.

Czyniono liczne usiłowania w celu bezpośredniego udowodnienia twierdzeń poprzedzających, bez uciekania się do pomocy teoryi funkcyj eliptycznych. Co się tyczy twierdzenia o funkcyach całkowitych, to J. Hadamardowi udało się dowieść, że skoro funkcyę całkowitą przedstawia szereg $\sum\limits_{m=0}^{m=\infty} a_m x^m$, wtedy $\frac{a}{a_m} < \frac{1}{(1\,.\,2\,...\,m)^a}$, gdzie a jest dodatnie. Niedawno E. Borel dowiódł tego twierdzenia dla wszystkich funkcyj całkowitych i znacznie je uogólnił.

Prace Hadamarda i Borela, ogłoszone w kilku ostatnich latach, są wielce godne uwagi. W pracach tych rolę kapitalną odgrywa ważne pojęcie rodzaju funkcyi całkowitej, wprowadzone przez Laguerre'a. Pojęcie to jest zwłaszcza ważnem z tego względu, że wiąże się ściśle z rozmieszczeniem pierwiastków funkcyj. Poincaré pierwszy zauważył był, że rodzaj funkcyi całkowitej jest w związku ścisłym z rzędem wielkości jej wartości dla wielkich wartości zmiennej. Hadamard szukał granicy rodzaju przy pomocy spółczynników rozwinięcia i dowiódł, że gdy spółczynnik przy x^m jest mniejszy od $\frac{1}{(1\,.\,2\,...\,m)^{\frac{1}{\lambda}}}$, wtedy funkcya jest rodzaju E, jeżeli $E+1$ oznacza liczbę całkowitą bezpośrednio wyższą od λ. Dowiódł on także, że gdy spółczynnik a_m maleje szybciej niż $\frac{1}{[\Phi(m)]^m}$, gdzie $\Phi(m)$ jest funkcyą rosnącą nieograniczenie wraz z m, wtedy pierwiastek p-ty ma moduł większy od $(1-\varepsilon)\,\Phi(p)$, gdzie ε jest nieskończenie małem dla $p=\infty$. Wyniki te zastosował Hadamard w pięknej pracy o rozmieszczeniu pierwiastków sławnej funkcyi całkowitej, którą rozważa Riemann w swej rozprawie o liczbach pierwszych.

E. Borel w pracy swej o zerach funkcyj całkowitych, stara się przedewszystkiem okazać niemożliwość pewnych tożsamości. Niechaj $\mu(r)$ oznacza funkcyę dodatnią, rosnącą nieograniczenie wraz z r; niechaj $G_i(z)$ będzie funkcyą całkowitą, której moduł maximum dla $z = r$ jest mniejszy od $e^{\mu(r)}$, $H_i(z)$ — funkcyę całkowitą, której moduł maximum jest większy od $[\mu(r)]^{1+\alpha}$, gdzie a jest dodatnie; otóż tożsamość

$$G_0(z) + G_1(z) e^{H_1(z)} + \ldots + G_n(z) e^{H_n(z)} = 0,$$

może zachodzić tylko wtedy, gdy wszystkie ilości G są zerami. W szczególności dla $n = 2$ tożsamość nie może istnieć, gdy G_0 jest ilością stałą, G_1 i G_2 są wielomianami; jest to właśnie powyższe twierdzenie dla funkcyj całkowitych.

Po tych twierdzeniach, odnoszących się do funkcyj holomorficznych w całej płaszczyźnie, przejdźmy teraz do twierdzeń o szeregach całkowitych, których promień zbieżności jest skończony. Szereg taki — jeżeli użyjemy wyrażenia Weierstrassa — daje element funkcyi, w założeniu oczywiście, że promień zbieżności nie jest zerem. Rozciągnięcie analityczne takiego elementu odgrywa rolę główną w teoryi Weierstrassa; jest w niej rzeczą niezmiernie ważną mieć dane o punktach osobliwych i o promieniu zbieżności. Rozprawa Darboux'a o przybliżeniu funkcyj bardzo wielkich liczb oraz nowe badania Hadamarda, Borela i Fabry'ego doprowadziły do wyników bardzo ważnych. Chcę tu zaznaczyć tylko jeden wniosek, przewidziany już przez Pringsheima: kresem przeprowadzenia (coupure) dla szeregu całkowitego jest w ogóle obwód jego koła zbieżności. Wiadomo, że Weierstrass pierwszy podał był przykład szeregu całkowitego, który nie daje się przeprowadzić analitycznie poza swoje koło zbieżności, a przykład ten pochodził z teoryi funkcyj eliptycznych. Jest prawdziwie osobliwem, że dawniej napotykano na trudności przy szukaniu przykładów na to, co dziś uważać należy za fakt najczęściej się powtarzający.

Pomiędzy metodami, stosowanemi do badania szeregu, przeprowadzonego poza koło jego zbieżności, dwie zwłaszcza odznaczają się prostotą. Pierwsza, użyta przez E. Lindelöfa, polega na teoryi odwzorowania podobnego; druga spożytkowuje pojęcie szeregu rozbieżnego sumowalnego, wprowadzone przez E. Borela. Zdaje się, że pojęcie to odegra ważną rolę w rozmaitych kwestyach Analizy. W dwóch słowach wskażę jego zasadę. Niechaj będzie szereg

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots;$$

utwórzmy funkcyę ilości a:

$$u(a) = u_0 + u_1 a + \frac{u_2 a^2}{1.2} + \ldots + \frac{u_n a^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

wyrażenie

$$s = \int_0^\infty u(a)\, e^{-a}\, da$$

może mieć znaczenie nawet, gdy szereg pierwotny jest rozbieżny; uważamy je wtedy za granicę szeregu. Stosując to pojęcie do szeregu geometrycznego, przedstawiającego funkcyę $\frac{1}{1-x}$ i posługując się całką Cauchy'ego, dochodzimy do wyrażenia analitycznego, które w wielu razach przedstawia funkcyę w polu, znajdującem się zewnątrz koła zbieżności.

Nie mogę tu podać chociażby najkrótszej wzmianki o wielce ważnych badaniach, poczynionych w ostatnich czasach nad przeprowadzaniem funkcyj analitycznych; zatrzymam się tylko na chwilę nad twierdzeniem, które w tym czasie ogłosił Mittag-Leffler. Uważajmy wraz z znakomitym geometrą szwedzkim element funkcyi w jej kole zbieżności, a na każdym promieniu tego koła śledźmy bieg funkcyj, póki nie napotkamy punktu osobliwego, który może być zresztą w nieskończoności. Na każdym promieniu zatrzymajmy część jego od środka aż do pierwszego punktu osobliwego; otrzymamy tym sposobem to, co Mittag-Leffler nazywa gwiazdą, odpowiadającą elementowi funkcyi. Otóż można otrzymać przedstawienie analityczne funkcyi w całej gwieździe w postaci szeregu, którego wyrazami są wielomiany ze zmienną x o spółczynnikach liniowych względem spółczynników rozwinięcia pierwotnego. Tym sposobem, jeżeli dla danego punktu mamy wartość funkcyi analitycznej i wszystkich jej pochodnych, to przy pomocy jedynie tych danych można już otrzymać przedstawienie analityczne funkcyi w całej gwieździe. Wynik ten powinien mieć pewną ważność dla teoryi równań różniczkowych; należy wszakże zauważyć, że w tym przypadku metoda Cauchy'ego, jak już miałem o tem sposobność wspomnieć, prowadzi do wyniku równoważnego. I tak, szeregi wyżej uważane (str. 196) stanowią rozwinięcia, utrzymujące się dla całej gwiazdy.

Uważaliśmy poprzednio element funkcyi, t. j. zakładaliśmy, że szereg

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

ma promień zbieżności różny od zera. Jeżeli ten szereg jest zbieżny tylko dla $x = 0$, to nic nie przedstawia, i zdawałoby się, że nie można tu postawić żadnego zagadnienia. Tymczasem podaliśmy poprzednio przykłady równań różniczkowych, które do takich właśnie rozwinięć prowadzą; pochodna rzędu jakiegokolwiek m pewnych całek w pewnym kącie A, którego wierzchołek jest w początku, dąży do $1 . 2 \ldots m . a_m$, gdy x dąży do zera wewnątrz kąta A. Warunki te, odnoszące się do wartości całek, nie mogą oczywiście wystarczać do wyznaczenia jednej tylko funkcyi w kącie A w bliskości początku, gdyż do pierwszej znalezionej funkcyi można dodać funkcyę wykładniczą postaci $e^{-x^{\alpha}}$ (gdzie α jest odpowiednio dobrane), której wszystkie pochodne są zerami dla $x = 0$. Ale stosując metodę sumowania szeregów rozbieżnych, Borel otrzymał warunek dopełniający, który w znacznej liczbie przypadków, pozwala już na otrzymanie jednej tylko funkcyi, określonej przez powyższy szereg rozbieżny.

3. Wszystkie wymienione przezemnie prace pokazują, jaką żywą działalność rozwinęli w najnowszych czasach analiści w badaniu ogólnych własności funkcyj analitycznych jednej zmiennej. Teorya ogólna funkcyj wielu zmiennych postępuje mniej szybko: kwestye, jakie się tu nasuwają, są znacznie trudniejsze, tak same

przez się, jak i z powodu braku odpowiedniego przedstawienia obrazowego. Bieg zmiennej zespolonej możemy ślędzić na płaszczyźnie; lecz mając dwie zmienne, znajdujemy się już w przestrzeni czterowymiarowej, gdzie nadto rozmaite spółrzędne nie przedstawiają się symetrycznie. Zamiast dwu równań, mamy teraz cztery równania o pochodnych cząstkowych, którym winny czynić zadość dwie funkcye o czterech zmiennych. Eliminacya jednej z tych funkcyj prowadzi do układu czterech równań o pochodnych cząstkowych dla funkcyi drugiej, zastępującego równanie Laplace'a w przypadku funkcyi jednej zmiennej. Układu tego nie badano dotąd bezpośrednio, jak to uczyniono dla równania Laplace'a. Zdaje się, że dla tego układu nie możnaby postawić żadnego zagadnienia analogicznego do zagadnienia Dirichleta i Riemanna: nie znajdujemy tu żadnej analogii pomiędzy przypadkiem jednej zmiennej a przypadkiem dwu zmiennych.

Z innego punktu widzenia, rozwinięcie Taylora funkcyi o dwóch zmiennych służyć może do określenia elementu funkcyi, lecz nie zachodzi tu nic analogicznego do koła zbieżności. Jakie są obszary zbieżności dla takiego rozwinięcia? Należałoby rozważać powierzchnie w nadprzestrzeni o czterech wymiarach; lecz nie znając żadnego pod tym względem prawidła, ograniczamy się na rozważaniu dwóch kół dostatecznie małych w płaszczyznach dwu zmiennych, kół, wewnątrz których szereg jest zbieżny.

Nielicznemi są twierdzenia ogólne o funkcyach analitycznych dwu zmiennych zespolonych. Spostrzeżenie często użyteczne uczynił był dawno Weierstrass; ma ono niejako na celu uwidocznienie w funkcyi n zmiennych, holomorficznej w blizkości $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ i znikającej dla tych wartości zmiennej, tej części funkcyi, która znika. Weierstrass wykazuje, że w okolicy $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ funkcya daje się przedstawić jako iloczyn dwu czynników holomorficznych, z których jeden nie znika w początku spółrzędnych, drugi zaś jest wielomianem zależnym od jednej ze zmiennych. Inne twierdzenie, którego dowód jest bardzo subtelny, zawdzięczamy Poincarému; ma ono na celu uogólnienie twierdzenia Weierstrassa, odnoszącego się do funkcyj jednowartościowych jednej zmiennej, mających w odległości skończonej tylko bieguny i dających się przedstawić w postaci ilorazu dwóch funkcyj całkowitych. Otóż, według twierdzenia Poincarégo, funkcya dwu zmiennych, mająca dla wszystkich wartości skończonych zmiennej charakter funkcyi wymiernej, daje się przedstawić w postaci ilorazu dwu funkcyj całkowitych. Piękne to twierdzenie uogólnił na innej zupełnie drodze p. Cousin, rozciągając je na funkcye o jakiejkolwiek liczbie zmiennych.

Poincarému zawdzięczamy też inny wynik bardzo uderzający: mówię tu o rozciągnięciu na całki podwójne twierdzenia zasadniczego Cauchy'ego, odnoszącego się do całek pojedyńczych, wziętych po obwodzie. Nietrudno określić całkę podwójną funkcyi $F(x$ i $y)$ dwu zmiennych zespolonych x i y:

$$\iint F(x, y)\, dx\, dy\,,$$

rozciągniętą na kontynuum o dwu wymiarach, położone w nadprzestrzeni czterowymiarowej, odpowiadającej dwóm zmiennym zespolonym. Jeżeli to kontynuum jest zamknięte i jeżeli daje się zredukować do linii lub do punktu i jeżeli przytem funkcya F pozostaje wciąż ciągłą, wtedy całka jest zerem. Wynik ten pozwala na postawienie rozmaitych zagadnień. Jeżeli F jest funkcyą ciągłą, wtedy rozważamy pozostałości (rezydua) całki podwójnej; pozostałości te wyrażają się przez peryody całek abelowych zwyczajnych. Jeżeli F jest funkcyą algebraiczną zmiennych x i y, wtedy należy rozważać peryody całki podwójnej, co otwiera przed nami rozległe pole poszukiwań. Przekonywamy się atoli prędko, że lubo utrzymują się tu pewne analogie do przypadku jednej zmiennej, to zato jest bardzo wiele przypadków, w których te analogie zupełnie znikają. Całki, wzięte po obwodzie, pozwoliły Cauchy'emu na wyznaczenie pierwiastków równania, zawartych wewnątrz obwodu. Lecz w zagadnieniu odpowiedniem, odnoszącem się do liczby pierwiastków wspólnych dwóm równaniom jednoczesnym, całki podwójne nie odgrywają żadnej roli; występują tu całki potrójne, rozciągnięte na pewne kontynuum trójwymiarowe.

Mówiłem dopiero co o dysymetryi, która z punktu widzenia rzeczywistego występuje w teoryi funkcyj dwóch zmiennych zespolonych. Byłoby rzeczą interesującą zbadać, czy nie jest możliwem uogólnienie dwóch równań o pochodnych cząstkowych, należących do teoryi funkcyj jednej zmiennej. Zagądnienie to jest oczywiście nieoznaczonem: wszystko zależy od własności równań, na które skierowujemy naszą uwagę. Można stanąć na stanowisku takiem: znaleść wszystkie układy równań o pochodnych cząstkowych, odnoszące się do n funkcyj n zmiennych niezależnych i takie, że gdy $u_1, u_2, \ldots, u_n$ oraz $v_1, v_2, \ldots, v_n$ oznaczają dwa jakiekolwiek rozwiązania, to rozwiązania v, uważane jako funkcye rozwiązań u, czynią zadość temu samemu układowi; własność taką mają oczywiście równania:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial x}.$$

Szukanie tych układów uskutecznić można metodą regularną i wypływa ono ze znajomości pewnych grup rzędu skończonego; i tak wszystkie układy typu poprzedzającego równań o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego dają się otrzymać przy pomocy grup liniowych i jednorodnych o n zmiennych. Być może, że pomiędzy temi układami są takie, które przedstawiają interes szczególny, i przy pomocy których możnaby zbudować teoryę więcej lub mniej analogiczną do teoryi funkcyj jednej zmiennej zespolonej. Przypadek $n = 3$ nie daje nic godnego uwagi. Dla $n = 4$ możnaby najprzód wziąć grupę liniową, dającą początek kwaternionom; grupie tej odpowiada układ równań różniczkowych, przedstawiający być może pewien interes.

Nie jest to wszakże jedyne uogólnienie teoryi funkcyj jednej zmiennej. Volterra szukał uogólnienia na innej drodze: mianowicie, rozważał on funkcye linij, co doprowadziło go do ciekawych związków różniczkowych i do pewnych zagadnień analogicznych z zagadnieniem Dirichleta. Przyszłość pokaże, czy te uogólnienia są tylko ciekawostkami, czy też mogą mieć pewne znaczenie ogólne.

4. Porzućmy rozważania ogólne i zajmijmy się niektóremi funkcyami specyalnemi. Pomiędzy niemi najwięcej badano funkcye algebraiczne jednej zmiennej. Puiseux w sławnej rozprawie o funkcyach algebraicznych, zwrócił uwagę na ważność rozwa-

żania zmiennej zespolonej. Dziś trudno przedstawić sobie, że wówczas zdawało się dziwnem, iż $\sqrt{x}$ i $-\sqrt{x}$ można uważać za dwie gałęzie tej samej funkcyi. W tejże rozprawie poraz pierwszy wskazano źródło peryodyczności.

Teorya funkcyj algebraicznych stała się zbiornikiem, w którym spotykają się najróżnorodniejsze pojęcia: każdy, stosownie do upodobań, może tu znaleść punkty widzenia, które przekłada nad inne. W metodach Weierstrassa napotka charakteryzujące szkołę tego badacza nadzwyczajną ścisłość oraz nieprzerwaną dbałość o to, aby do teoryi funkcyj nie wprowadzać żadnych obcych rozważań, chociażby to miało stać się kosztem wywodów długich i nużących. Kto lubi język i formy rozumowania geometryi analitycznej, pójdzie za Brillem i Nötherem w ich teoryi tak płodnej grup punktowych. Szukający wreszcie szerokich widnokręgów z zadowoleniem czytać będzie Riemanna, który przy pomocy swojego pięknego pomysłu powierzchni, noszącej dziś jego imię, unaocznia wprost najdelikatniejsze punkty teoryi. Lecz byłoby poglądem ciasnym chcieć uważać piękny pomysł Riemanna jedynie za metodę upraszczającą. Dla Riemanna punktem zasadniczym jest pojęcie a priori powierzchni spójnej, utworzonej z ograniczonej liczby liści, oraz fakt, że takiej powierzchni, wziętej w całej jej ogólności, odpowiada pewna klasa krzywych algebraicznych. Co więcej, można rozważać powierzchnie Riemanna i o nieskończonej liczbie liści, a prace Poincarégo pokazały użytek takich powierzchni w badaniu funkcyj niejednopostaciowych. Wiemy także, jak ważne znaczenie miało dla Riemanna zagadnienie o odwzorowaniu podobnem. Przypadek odwzorowania podobnego pól o wielokrotnej spójności badał w pięknej rozprawie Schottky, który ukazuje się w niej jako uczeń Weierstrassa, nawiązujący swoje badania sposobem naturalnym do pomysłów Riemanna. W polu płaskiem o ϱ otworach, o dwóch stronach wierzchniej i spodniej, odpowiada krzywa algebraiczna rodzaju ϱ; pytanie przeto o odwzorowaniu podobnem dwóch pól sprowadza się do odpowiedniości pomiędzy punktami dwu krzywych algebraicznych.

Z krzywemi algebraicznemi wiążą się funkcye jednej zmiennej, wielce godne uwagi; są to funkcye, które Poincaré nazywa funkcyami Fuchsa, Klein zaś oznacza nazwą funkcyj automorficznych. Dla krzywych rodzajów zero i jeden można ich spółrzędne wyrazić przez funkcye jednowartościowe jednego parametru, meromorficzne w całej płaszczyźnie (funkcye wymierne i funkcye podwójnie peryodyczne). Otóż powstało, naturalnie, pytanie, dotyczące przedstawienia parametrowego przez funkcye jednowartościowe dla krzywych rodzaju wyższego niż jeden. Czyniono prawdopodobnie różne usiłowania w celu otrzymania szukanego wyrażenia przy pomocy funkcyj przestępnych, mających bieguny tylko w odległości skończonej. Usiłowania te — rozumiemy to dziś dobrze — musiały pozostać bezskutecznemi, gdyż można dowieść, iż pomiędzy dwiema funkcyami jednowartościowemi w sąsiedztwie punktu, który dla każdej z nich jest punktem istotnie osobliwym, nie może istnieć związek algebraiczny rodzaju wyższego niż jeden. Stąd wynika, że funkcye przestępne, mogące znaleść zastosowanie w zagadnieniu, o którem mowa, są natury daleko bardziej skomplikowanej. Jedne z nich mają za kres okrąg koła, poza który nie mogą być przeprowadzone analitycznie; inne są określone dla całej płaszczyzny, ale na pewnym okręgu koła mają nieskończenie wiele punktów istotnie osobliwych, tworzących, według terminologii G. Cantora, mnogość doskonałą, która nie jest ciągłą. Sławne rozprawy Poincarégo o funkcyach Fuchsa i piękne badania Kleina o tymże przedmiocie stanowią jeden z najpiękniejszych rozdziałów teoryi funkcyj, jakie napisano w ostatnich latach dwudziestu. Funkcye automorficzne stanowią wielce rozległe i ważne uogólnienie funkcyj modułowych, badanych przez Hermite'a w teoryi funkcyj eliptycznych, oraz funkcyj, rozważanych przez Schwarza przy odwróceniu stosunku dwóch rozwiązań równania hypergeometrycznego. Z drugiej strony cała ta teorya jest ściśle związana z teoryą równań różniczkowych liniowych; jednym z najbardziej uderzających rezultatów, otrzymanych przez Poincarégo, jest ten, że przy pomocy funkcyj przestępnych, analogicznych do funkcyj Fuchsa, można całkować równania różniczkowe liniowe o spółczynnikach algebraicznych, mających tylko punkty osobliwe regularne (w znaczeniu, przyjętem przez Fuchsa). Pomiędzy funkcyami przestępnemi, wiążącemi się z funkcyami algebraicznemi, wymieniamy jeszcze całki funkcyj z mnożnikami (fonctions à multiplicateurs) które badał szczegółowo Appell. Są to funkcye, które na powierzchni Riemanna mają tylko bieguny albo punkty osobliwe logarytmowe i których różne gałęzie wyprowadzają się z jednej z pomiędzy nich za pomocą podstawień postaci $(u, au + b)$. Są to funkcye, uogólniające całki abelowe, dla których ilości a są równe jedności. Appell doszedł do pięknego wyniku, że funkcye te występują w badaniu spółczynników funkcyj abelowych dwóch zmiennych wtedy, gdy rozwijamy je na szeregi trygonometryczne. Szukano także przypadków, w których odwrócenie całki funkcyj z mnożnikami prowadzi do funkcyi jednowartościowej. Wynik był ujemny, to znaczy, że w tym przypadku krzywa algebraiczna jest koniecznie rodzaju 0 albo 1, a funkcya jednowartościowa sprowadza się do funkcyj przestępnych znanych.

5. Równania różniczkowe są niewyczerpaną kopalnią funkcyj specyalnych. I tak równania liniowe doprowadziły do funkcyj, mających dobrze określone własności. Co się tyczy równań nieliniowych, to Fuchs pierwszy zwrócił uwagę na równania algebraiczne rzędu pierwszego o punktach krytycznych stałych i pokazał, w jaki sposób można poznać, kiedy ten przypadek zachodzi. Następnie Poincaré wykazał, że przypadek ten daje się sprowadzić do kwadratur albo do równań Riccati'ego. Painlevé rozwinął te wyniki, rozważając równania rzędu pierwszego, których całki mają tylko skończoną liczbę wartości wokoło ogółu punktów krytycznych ruchomych. Jednym z wniosków tej teoryi jest ten, że całka z założenia przestępna każdego równania algebraicznego, czyniąca zadość poprzedzającemu warunkowi, jest funkcyą algebraiczną całki równania Riccati'ego, którego spółczynniki zależą algebraicznie od spółczynników równania danego. Można postawić podobne zagadnienia dla równań różniczkowych algebraicznych rzędu wyższego nad pierwszy. Ale wtedy powstają poważne trudności. Jedna z nich wiąże się z faktem następującym: wtedy gdy każde przekształcenie dwujednoznaczne krzywej algebraicznej na samą siebie (z osobliwościami odosobnionemi) jest koniecznie dwuwymiernem, to przeciwnie zdarzyć się może,

iż przekształcenie dwujednoznaczne powierzchni algebraicznej na samą siebie nie jest dwuwymiernem. Inna, nie mniej poważna, trudność wynika z możliwego istnienia osobliwości istotnych ruchomych. Poprzednio wspomniałem już o rozróżnieniu, jakie pod tym względem czyni Painlevé pomiędzy klasą ogólną równań, nie posiadających takich punktów, a klasą osobliwą.

Przy usiłowaniach rozciągnięcia na równania rzędu 2-go o punktach krytycznych stałych metody, którą Poincaré stosował z powodzeniem do równań rzędu pierwszego, mających tę własność, napotkano odrazu pierwszą ze wspomnianych wyżej trudności. Jedynie w przypadku, w którym zakładamy, że całka ogólna równania zależy algebraicznie od dwóch stałych całkowania, można prowadzić dalej badanie bez wielkich trudności; wtedy wszakże dochodzimy do funkcyj przestępnych już znanych. Painlevé zbadał całkowicie inne przytrafić się mogące przypadki: całka ogólna może być także funkcyą algebraiczną jednej ze stałych, albo wreszcie zależyć sposobem przestępnym od dwóch stałych (bez względu na to, jak je obierzemy). Ostatni jedynie przypadek nie da się przywieść do funkcyj przestępnych klasycznych, t. j. do kwadratur i do równań liniowych. Ten przypadek zresztą faktycznie zachodzi, i Painlevé utworzył wyraźnie wszystkie równania rzędu 2-go postaci

$$y'' = R(y, y', x),$$

gdzie R jest funkcyą wymierną względem y', algebraiczną względem y i analityczną względem x. Dają się one sprowadzić do dwunastu typów kanonicznych bardzo prostych. Wskażę tu tylko dwa takie równania, dla których całka ogólna jest jednoznaczna:

$$y'' = 6y^2 + x \quad ; \quad y'' = 2y^3 + xy + a$$

(a stała liczbowa).

Całka ogólna jednego i drugiego równania jest funkcyą jednowartościową i meromorficzną zmiennej x w całej płaszczyźnie, i całka ta jest funkcyą przestępną istotnie nową. Te przykłady pokazują, jak daleko doprowadził Painlevé swoje głębokie poszukiwanie.

Co do równań rzędu trzeciego, to wspomnę tylko, że ich całka ogólna może mieć linie punktów osobliwych istotnych. Łatwo otrzymać na to przykłady, rozważając równanie różniczkowe algebraiczne rzędu 3-go, któremu czyni zadość funkcya automorficzna jednej zmiennej.

6. Dziedzina funkcyj specyalnych większej liczby zmiennych, dotychczas w pewnej mierze zbadanych, jest dość ograniczona. Teorya funkcyj abelowych była przedmiotem licznych prac klasycznych, nad któremi zatrzymywać się nie mam potrzeby; rozprawy Riemanna i Weierstrassa, badania Hermite'a nad przekształceniem funkcyj abelowych znane są wszystkim. Po przeprowadzeniu badań nad funkcyami Fuchsa jednej zmiennej, było wskazanem, oczywiście, szukanie podobnych funkcyj przestępnych w przypadku dwu zmiennych; należało tu najprzód zapytać, czy istnieją grupy nieciągłe, zawarte w grupie liniowej o dwóch zmiennych

$$\left(u, v; \frac{a'u + b'v + c'}{au + bv + c}, \frac{a''u + b''v + c''}{au + bv + c}\right).$$

Nasunął się jedyny i bardzo użyteczny przykład takiej grupy, mianowicie grupy o czterech peryodach, ale nie udało się napotkać żadnego przykładu analogicznego do grupy modułowej. I pod tym względem nie można było niczego oczekiwać od teoryi funkcyj abelowych, przynajmniej w jej postaci klasycznej. Czemby można tu zastąpić warunek, stosowany do podstawień grupy fuchsowej, mianowicie warunek zachowania pewnego koła? Badanie form kwadratowych trójkowych z nieoznaczonemi sprzężonemi pozwoliło utworzyć wielką liczbę szukanych przykładów. Hermite dawno już wykazał był ważność z punktu widzenia arytmetycznego form kwadratowych dwójkowych z nieoznaczonemi sprzężonemi; formy trójkowe nieokreślone prowadziły do licznych grup postaci wyżej wypisanej, nieciągłych wewnątrz pewnej nadpowierzchni w przestrzeni o czterech wymiarach. Powierzchnia ta zastępuje okrąg koła teoryi grup fuchsowych. Grupy typu poprzedniego nazwano hyperfuchsowemi. Rozumiemy, że badanie ich ogólne, podobnie jak dla grup fuchsowych, stanowi jedynie problemat natury algebraicznej; lecz ponieważ nie dopisuje tu żadne przedstawienie geometryczne, więc wszelkie badanie bezpośrednie byłoby tak nużącem, że w istocie rzeczy praktycznie niewykonalnem. Zresztą przykłady, dostarczone przez rozważania arytmetyczne, są nadzwyczaj cennemi. Grupom hyperfuchsowym odpowiadają funkcye jednowartościowe, pozostające niezmiennemi przy stosowaniu podstawień grupy.

Przykładów funkcyj hyperfuchsowych innej natury dostarczyć mogą szeregi hypergeometryczne o dwu zmiennych. Taki szereg, jako funkcya zmiennych x, y, zależna od czterech parametrów dowolnych λ, μ, b_1, b_2 czyni zadość układowi trzech równań liniowych o pochodnych cząstkowych rzędu drugiego, mającemu trzy rozwiązania wspólne liniowo — niezależne. Jeżeli oznaczymy te rozwiązania przez $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, to będzie można zapytać, w jakich przypadkach ilorazy

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u \quad , \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

dają na x i y funkcye jednowartościowe zmiennych u i v. Warunki są bardzo proste: jeżeli weźmiemy dwa którekolwiek z pomiędzy czterech parametrów λ, μ, b_1, b_2, to różnica $\lambda + b_1 - 1$ powinna być odwrotnością liczby całkowitej dodatniej; i podobnie: jeżeli weźmiemy trzy którekolwiek z pomiędzy tych parametrów np. λ, μ, b_1, to różnica $2 - \lambda - \mu - b_1$ powinna też być równa odwrotności liczby całkowitej dodatniej. Wymienię przykład $\lambda = \mu = b_1 = b_2 = {}^3/_5$, dla którego wielościan zasadniczy grupy znajduje się całkowicie wewnątrz nadpowierzchni granicznej.

Można uogólnić funkcye fuchsowe, rozważając grupy nieciągłe, odmienne od grup hyperfuchsowych. Podstawienie dwuwymierne pomiędzy dwiema zmiennemi u i v nie jest koniecznie liniowem, i byłoby zadaniem ciekawem, lubo trudnem, utworzenie wszystkich grup nieciągłych przynajmniej w pewnej dzielnicy nadprzestrzeni (u, v) podstawień dwuwymiernych. Poza grupami liniowemi (hyperfuchsowemi) rozważano dotąd jedynie grupy, utworzone z podstawień postaci:

$$\left(u, \frac{au+b}{cu+d}\right), \left(v, \frac{a'v+b'}{c'v+d'}\right)$$

i z podstawień, w których u zastąpiono funkcyą liniową zmiennej v, i odwrotnie. Są to grupy hyperabelowe, należące oczywiście do typów podstawień kwadratowych; mamy w tym razie dwa obszary, stanowiące ograniczenie. Bez wątpienia w bardzo rozległej dziedzinie grup nieciągłych podstawień dwuwymiernych i odpowiadających im funkcyj (o ile istnieją, jak w przypadku funkcyj hyperfuchsowych i hyperabelowych) pozostaje do uczynienia w przyszłości niejedno jeszcze ważne odkrycie.

7. Wspomnieliśmy wyżej o świetnym rozwoju teoryi funkcyj algebraicznych jednej zmiennej; w dziedzinie dwu zmiennych atoli postęp był znacznie powolniejszy. Jest to przedmiot, będący obecnie w pełni opracowania i badany ze stron rozmaitych. Clebsch ze stanowiska geometryi analitycznej wypowiedział pierwszy, że dla powierzchni algebraicznej stopnia m-tego pewne powierzchnie rzędu $m-4$ powinny odgrywać tę samą rolę, jaką mają krzywe dołączone rzędu $m-3$ dla krzywej algebraicznej stopnia m. Badanie tych powierzchni rzędu $m-4$ podjął Noether w bardzo ważnej rozprawie. Z punktu widzenia teoryi funkcyj źródło tych powierzchni jest następujące: Jeżeli szukamy całek

$$\iint R(x, y, z)\, dx\, dy \;, \qquad (f(x, y, z)) = 0$$

pozostających zawsze skończonemi, całek, które nazywamy podwójnemi gatunku pierwszego, znajdujemy, że są one postaci:

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'(z)} ,$$

gdzie Q jest wielomianem rzędu $m-4$. Liczba p_g tych wielomianów liniowo-niezależnych stanowi rodzaj geometryczny powierzchni; liczba taka jest oczywiście niezmiennikiem. Do tej pory mamy jeszcze zupełną analogię z teoryą krzywych: istnieją całki podwójne gatunku pierwszego, podobnie jak istnieją całki abelowe gatunku plerwszego. Lecz otóż ujawnia się pierwsza różnica. Idzie o wyznaczenie liczby stałych dowolnych, zachodzących w wielomianach Q rzędu $m-4$, tak odniesionych do punktów wielokrotnych powierzchni, aby całka pozostała skończona. Możemy znaleść wzór dokładny na liczbę tych warunków, ale jedynie dla wielomianu stopnia dostatecznie wysokiego N; jeżeli przeto we wzorze rzeczonym uczynimy $N=m-4$, zajść może ta okoliczność, iż znajdziemy liczbę różną od p_g. Oznaczamy tę nową liczbę, którą daje wzór wspomniany przez p_n, i nazywamy ją *rodzajem liczbowym* powierzchni. Przypadkiem najogólniejszym jest ten, w którym $p_g=p_n$; jeżeli ta równość nie zachodzi, mamy wtedy $p_n<p_g$ i powierzchnia nazywa się *nieregularną*; zowiemy ją *regularną*, gdy $p_n=p_g$. Cayley pierwszy zwrócił uwagę na tę ciekawą okoliczność. Zeuthen i Noether wykazali następnie niezmienność liczby p_n, gdy ta nie równa się p_g. Powierzchnie prostoliniowe dają przykład powierzchni nieregularnych; jeżeli π oznacza rodzaj dowolnego przecięcia płaskiego tych powierzchni, mamy $p_n=-\pi$, $p_g=0$.

Dla danej powierzchni mamy wielomiany dołączone wszelkiego rzędu. Można je łatwo określić z punktu widzenia przestępnego. Jeżeli powierzchnia ma położenie dowolne względem osi, wielomian $P(x, y, z)$ będzie dołączonym, jeżeli całka

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'(z)}$$

pozostaje skończoną w odległości skończonej; powierzchnia $P=0$ jest powierzchnią dołączoną. Enriques podał godną uwagi interpretacyę geometryczną różnicy p_g-p_n. Powierzchnie dołączone rzędu $m-4+r$ wycinają na przekroju płaskim, oznaczonym ale zresztą dowolnym, szereg liniowy grup punktów, który może nie być zupełny, jeżeli liczba r jest dość mała. Niechaj ω oznacza *niedomiar* tego szeregu liniowego odnośnie do szeregu zupełnego; mamy wtedy:

$$p_g-p_n=\sum_{r=1}\omega_r\,,$$

gdzie suma po stronie drugiej zawiera ograniczoną liczbę wyrazów, gdyż ilości ω są z pewnością zerami, począwszy od pewnej dostatecznie wielkiej wartości r. Wzór ten jest zasadniczym w badaniu rodzaju liczbowego.

Mówiliśmy wyżej o całkach podwójnych gatunku pierwszego, odnoszących się do danej powierzchni. Można też rozwinąć teoryę całek podwójnych gatunku drugiego, których definicya jest następująca: Są to całki, stające się nieskończonemi, podobnie jak całka:

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx\, dy \,,$$

gdzie U, V są funkcyami wymiernemi zmiennych x, y, z, związanych równaniem $f(x, y, z) = 0$. Liczba całek gatunku drugiego różnych, t. j. całek, których żadna kombinacya liniowa nie jest postaci powyższej, jest skończona; jest to niezmiennik powierzchni. Lecz gdy dla linij krzywych liczba różnych całek abelowych gatunku drugiego była równa $2p$, to tu nowy niezmiennik klasy powierzchni algebraicznych zdaje się nie być związany z rodzajem, ani geometrycznym ani liczbowym.

Rozważanie całek podwójnych nie jest jedynem w teoryi, o której mówimy. Można także rozważać całki różniczek zupełnych postaci:

$$\int P\,(x, y, z)\, dx + Q\,(x, y, z)\, dy \,,$$

gdzie funkcye P i Q są wymiernemi względem x, y, z; i tu można mówić o całkach gatunku pierwszego i drugiego. Lecz tu takie całki nie istnieją w ogólności, t. j. dla powierzchni wziętej dowolnie; zbadanie, czy dla danej powierzchni poza funkcyami wymiernemi istnieją całki gatunku drugiego, stanowi pytanie bardzo subtelne.

I pytania, dotyczące spójności, są wielce ważnemi w teoryi funkcyj algebraicznych dwu zmiennych niezależnych, ale tu poczynić należy pewne zastrzeżenia konieczne. Dla danej oznaczonej powierzchni, postępując według metody ściśle określonej, można otrzymać dwie liczby, odpowiadające spójności liniowej i spójności dwuwymiarowej; pierwsza z nich p_1 jest prawdziwym niezmiennikiem dla każdego przekształcenia dwuwymiernego, gdy na drugą p_2 może wpływać obecność punktów zasadniczych odpowiedniości dwuwymiernej. Wielce ciekawym jest rezultat, że liczba $p_1 - 1$ przedstawia liczbę odnoszących się do powierzchni różnych całek gatunku drugiego różniczek zupełnych. Dla powierzchni, obranej dowolnie, nie ma całki gatunku drugiego i jest $p_1 = 1$.

Widzimy tedy, że w badaniu powierzchni algebraicznej znajdujemy punkty widzenia tak geometryi analitycznej, jak i teoryi funkcyj oraz geometryi położenia, ale nie należy dowierzać analogiom z teoryą krzywych. W tej nowej dziedzinie wszystko przedstawia się nam w sposób bardziej skomplikowany.

Oto jeszcze jeden przykład tej komplikacyi. Krzywe rodzaju zero tworzą klasę bardzo ograniczoną krzywych jednobieżnych; przeciwnie powierzchnie, których rodzaj geometryczny $p_g = 0$, są nadzwyczajnie rozmaite, tak że w tym razie można wprowadzić nowy niezmiennik, odkryty przez Enriquesa i nazwany przez niego dwurodzajem (bigenre). Można ten niezmiennik określić łatwo dla przypadku, w którym powierzchnia f stopnia m-tego ma tylko jednę linię podwójną. W tym celu rozważamy układ powierzchni rzędu $2m - 8$ (nie składający się z powierzchni f i z powierzchni rzędu $m - 8$), mający jako linię podwójną krzywą podwójną powierzchni f; dwurodzaj P jest wymiarem tego układu powiększonym o jedność. Pojęcie to pozwoliło p. Castelnuovo wyprowadzić twierdzenie niezmiernie interesujące. Idzie o podanie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby powierzchnia była jednobieżną. Możnaby mniemać, że warunki te będą bardzo skomplikowane i nie dadzą się wyrazić w formie prostej. Tymczasem rzecz ma się zupełnie inaczej: warunki te bowiem sprowadzają się do dwu równań $p_n = 0, P = 0$. Nie mogę dłużej zatrzymywać się nad tym przedmiotem i wymieniam tylko piękną rozprawę Humberta o powierzchniach hypereliptycznych, stanowiących ciekawy przykład powierzchni nieregularnych, dla których $p_n = -1, p_g = 1$.

8. Skończyłem, panowie, mój pobieżny rzut oka na kilka gałęzi nauki matematycznej. Mogliście niejednokrotnie spostrzedz moje zakłopotanie, gdym stosując się do koniecznych warunków

niniejszego wykładu, usiłował klasyfikować niektóre teorye. W samej rzeczy, wzajemne przenikanie się rozmaitych gałęzi nauki jest dziś faktem kapitalnym i z dniem każdym stawać się będzie źródłem coraz płodniejszem ważnych odkryć naukowych. Pod tym względem istnieje wielka różnica pomiędzy epoką naszą a czasami nieco dawniejszemi. Dziś z trudnością zrozumielibyśmy pewne zdarzenia, w których geometrowie pogardzali analistami, i odwrotnie; dziś czujemy, że era szkół zamkniętych i ściśle przywiązanych do jednego punktu widzenia minęła na zawsze. Jest prawdopodobnem, że i erudycya odgrywać będzie w matematyce większą niż dawniej rolę. Matematycy stracą może przywilej wczesnej dojrzałości umysłowej, która zadziwia tylu ludzi, i zbliżą się bardziej do fizyków i przyrodników, którzy w ogóle później rozpoczynają swoje prace samodzielne.

Kończąc, pozwolę sobie udzielić rady studentom matematyki, którzy uczynili mi zaszczyt, słuchając mego wykładu: poleciłbym im nie zapuszczać się zbyt szybko w poszukiwania specyalne. Należy uprzednio zdobyć poglądy ogólne na różne części naszej nauki, bez tych bowiem poglądów poszukiwania mogą być bezpłodnemi i wymagać będą później daleko większych wysiłków.

IX-ty Zjazd lekarzy i przyrodników polskich w Krakowie

(21 — 25 lipca r. b.).

Zjazd przyrodników i lekarzy, odbyty w lipcu r. b. w Krakowie, przewyższył wszystkie poprzedzające zjazdy tak liczebnością uczestników, jak i bogactwem i różnorodnością prac przedstawionych. To świetne powodzenie należy w znacznej części przypisać doskonałej organizacyi oraz pracy komitetu gospodarczego, prowadzonej energicznie i systematycznie, począwszy od r. 1898. Na czele komitetu gospodarczego