W PRZEDMIOCIE OBLICZANIA REZERWY PREMIOWEJ OD UBEZPIECZEŃ ŻYCIOWYCH.

Podał

B. Danielewicz.

W poprzednich zeszytach „Wiadomości matematycznych“ podaliśmy wzory na system grupowy obliczania rezerwy od ubezpieczeń z terminem stałym oraz na dożycie ze zwrotem premij w razie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej [1]).

Sposoby grupowego obliczania rezerwy od innych rodzajów ubezpieczeń pominęliśmy; są to bowiem rzeczy względnie dobrze znane i bywają w niektórych podręcznikach więcej lub mniej obszernie traktowane.

Na zeszłorocznym wszakże zjeździe matematyków ubezpieczeniowych w Petersburgu, p. E. Gamza przedstawił obecnym bardzo zręcznie pomyślaną przeróbkę, za pomocą której różne wzory dla różnych kombinacyj dają się sprowadzić do postaci identycznej dla wszystkich kombinacyj, o ile te kombinacye odnoszą się do ubezpieczeń pośmiertnych, mieszanych i częściowo mieszanych, w których warunki ubezpieczeniowe, zarówno pod względem premij jak i ubezpieczonych kapitałów, przez cały czas trwania umowy nie ulegają zmianie. Uważam za właściwe sposób ten przedstawić czytelnikom „Wiadomości matematycznych“, interesującym się sprawami asekuracyi życiowej.

Ogólnym wzorem na rezerwę po ν latach, od wszelkiego rodzaju ubezpieczeń, zawartych przez osobę x letnią, jest [2])

---

[1]) „Wiadomości matematyczne“. T II, str. 216 i T. III, str. 275.

[2]) A. B. Danielewicz „Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych“. Warszawa 1896, str. 272.

(1) Rez (x, ν)

$$= \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (m_{x+\nu} \cdot M_\nu + m_{x+\nu+1} \cdot M_{\nu+1} + \ldots + m_{x+N-1} \cdot M_{N-1})$$

$$+ \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (v_{x+\nu} \cdot V_\nu + v_{x+\nu+1} \cdot V_{\nu+1} + \ldots + v_{x+N} \cdot V_N)$$

$$- \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (v_{x+\nu} \cdot p_\nu + v_{x+\nu+1} \cdot p_{\nu+1} + \ldots + v_{x+n-1} \cdot p_{n-1}) ,$$

gdzie $v_{x+\nu}$, $v_{x+\nu+1}$, ... są liczby zdyskontowane osób żyjących w wieku lat $x+\nu$, $x+\nu+1$, ...; $m_{x+\nu}$, $m_{x+\nu+1}$, ... liczby zdyskontowane osób zmarłych w ciągu $(x+\nu+1)$-go, $(x+\nu+2)$-go... roku życia; M_ν, $M_{\nu+1}$, ... kapitały ubezpieczone na przypadek śmierci zaszłej w ciągu $(\nu+1)$-go, $(\nu+2)$-go, ... roku — licząc od chwili zawarcia umowy; V_ν, $V_{\nu+1}$, ... kapitały ubezpieczone na przypadek pozostawania przy życiu na początku $(\nu+1)$-go, $(\nu+2)$-go, ... roku od chwili zawarcia ubezpieczenia; p_ν, $p_{\nu+1}$, ... roczne premie netto za rzeczone ubezpieczenie, płatne z góry na początku roku $(\nu+1)$-go, $(\nu+2)$-go, ... licząc również od chwili zawarcia umowy. Wreszcie n oznacza liczbę lat przez jaką mają być płacone premie, a N liczbę lat przez jaką ma trwać ubezpieczenie $(n \leqq N)$.

Jeżeli warunki ubezpieczeń mają się nie zmieniać przez cały czas trwania umowy, to we wzorze (1) trzeba założyć

(2) $M_\nu = M_{\nu+1} = \ldots = M_{N-1} =$ stałemu kapitałowi, ubezpieczonemu na przypadek śmierci, który oznaczmy przez k, oraz

(3) $p_\nu = p_{\nu+1} = \ldots = p_{n-1} =$ stale wnoszonej rocznie z góry premii netto ${}^n p_x k$, gdzie ${}^n p_x$ jest roczną premią netto od jednostki kapitału.

Podstawiwszy (2) i (3) w (1), otrzymujemy

(1') Rez (x, ν)

$$= \frac{k}{v_{x+\nu}} \cdot (\Sigma\, m_{x+\nu} - \Sigma\, m_{x+N}) - \frac{{}^n p_x k}{v_{x+\nu}} (\Sigma\, v_{x+\nu} - \Sigma\, v_{x+n})$$

$$+ \frac{1}{v_{x+\nu}} \cdot (v_{x+\nu} \cdot V_\nu + v_{x+\nu+1} \cdot V_{\nu+1} + \ldots + v_{x+N} \cdot V_N) .$$

Jeżeli następnie, dla objęcia wzorem wszelkiego rodzaju ubezpieczeń mieszanych, założymy jeszcze, że z chwilą gdy się kończy płacenie premij, t. j. po upływie n lat, wypłaca się pozostającym wówczas przy życiu a część ubezpieczonego kapitału k i wszystkim pozostającym przy życiu w chwili gdy się kończy ubezpieczenie, t. j. po upływie N lat, wypłaca się całkowity kapitał k, to, dla otrzymania odpowiadającego takiemu ubezpieczeniu wzoru, należy w (1′) założyć:

$$V_\nu = V_{\nu+1} = \ldots = V_{n-1} = 0\,;\quad V_n = a\,.\,k\,;$$

$$V_{n+1} = V_{n+2} = \ldots = V_{N-1} = 0\,;\quad V_N = k\,.$$

Skutkiem takich założeń wzór (1′) przechodzi na

$$(1'') \qquad \mathrm{Rez}\,(x,\nu)$$

$$= \frac{k}{v_{x+\nu}}\left\{(\Sigma m_{x+\nu} - \Sigma m_{x+N}) + a.v_{x+n} + v_{x+N}\right\} - \frac{{}^{n}p_x k}{v_{x+\nu}}(\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n})\,.$$

Ażeby ten wzór stosował się

1-o do zwyczajnych ubezpieczeń pośmiertnych z dożywotnią opłatą premij; należy założyć $x + N = x + n =$ granicy życia ludzkiego, a więc $\Sigma\, m_{x+N} = 0$, $v_{x+n} = v_{x+N} = 0$, $\Sigma\, v_{x+n} = 0$,

2-o dla ubezpieczeń pośmiertnych z czasową opłatą premij, tylko $x + N =$ granicy życia ludzkiego, więc $\Sigma\, m_{x+N} = 0$, $v_{x+N} = 0$ oraz $a = 0$.

3-o dla ubezpieczeń mieszanych $N = n$ i $a = 0$,

4-o dla półmieszanych, $N = n$, $v_{x+N} = \frac{1}{2}\Sigma m_{x+n}$ oraz $a = \frac{1}{2}$,

5-o gdy po śmierci wypłaca się zawsze całkowity kapitał, a oprócz tego w razie przeżycia n lat, jeszcze pół kapitału, należy założyć $x + N =$ granicy życia ludzkiego, a więc $\Sigma\, m_{x+N} = 0$, $v_{x+N} = 0$ i $a = \frac{1}{2}$.

Widzimy więc, że istotnie wzorem (1″) są objęte wszystkie kombinacye ubezpieczeń pośmiertnych, mieszanych i częściowo mieszanych, w których warunki ubezpieczeń nie ulegają zmianie przez cały czas ich trwania. Nie obejmuje ten wzór ani ubezpieczeń z terminem stałym, ani na dożycie ze zwrotem premij, lecz wzory na grupowe obliczanie rezerwy dla tych ostatnich kombinacyj podaliśmy już w „Wiadomościach matematycznych“.

Wzorowi (1'') można nadać następującą postać:

$$(1''') \qquad \text{Rez}\,(x, \nu)$$

$$= \frac{\Sigma\, m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} \,.\, k - \frac{\Sigma\, v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} \,.\, {}^{n}p_x k + \frac{k}{v_{x+\nu}} \,.\, \Big\{ (v_{x+N} - \Sigma\, m_{x+N})$$

$$+ a \,.\, v_{x+n} + {}^{n}p_x \,.\, \Sigma v_{x+n} \Big\} \,,$$

gdzie $\frac{\Sigma\, m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = P_{x+\nu}$ jest jednorazową premią netto za zwyczajne ubezpieczenie jednostki kapitału pośmiertnego, a $\frac{\Sigma\, v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = R_{x+\nu}$ wartością jednostki renty dożywotniej, płatnej z góry rocznie. Gdy te oznaczenia wprowadzimy do (1'''), wzór przybierze postać

$$(\text{I}) \qquad \text{Rez}\,(x, \nu)$$

$$= P_{x+\nu} \,.\, k - R_{x+\nu} \,.\, {}^{n}p_x k + \frac{k}{v_{x+\nu}} \,.\, \Big\{ (v_{x+N} - \Sigma\, m_{x+N})$$

$$+ a \,.\, v_{x+n} + {}^{n}p_x\, \Sigma v_{x+n} \Big\} \,.$$

To znaczy, że rezerwa każdego rodzaju powyżej określonych ubezpieczeń równa się rezerwie obliczonej jakby od zwyczajnych ubezpieczeń pośmiertnych z dożywotnią opłatą istotnie wnoszonych premij netto, p l u s $\frac{k}{v_{x+\nu}}$ pomnożone przez jakąś ilość

$$(4) \qquad v_{x+N} - \Sigma\, m_{x+N} + a \,.\, v_{x+n} + {}^{n}p_x \,.\, \Sigma\, v_{x+n} = l \,,$$

o którą różnego rodzaju ubezpieczenia się od siebie różnią.

Skutkiem oznaczenia (4) wzór (I) przechodzi na

$$(\text{I}') \qquad \text{Rez}\,(x, \nu) = P_{x+\nu} \,.\, k - R_{x+\nu} \,.\, {}^{n}p_x k + \frac{l \,.\, k}{v_{x+\nu}} \,.$$

Z wyrażenia (4) okazuje się wyraźnie, że ilość l nie zależy od ν, czyli od lat, po ilu obliczamy rezerwę, jest więc stałą i niezmienną przez cały czas trwania ubezpieczeń. Natomiast zależy od rodzaju ubezpieczeń i od terminów ubezpieczeniami określonych; może więc być z góry, zaraz przy zawieraniu umowy, określoną. Gdy to uskutecznimy i liczbę l przez każdy oddzielnie wzięty kapitał pomnożymy, mieć będziemy liczby stałe lk, które, po podzieleniu przez $v_{x+\nu}$, corocznie dawać nam będą ilości, jakie dodawać trzeba do rezerwy, obliczonej jakby dla zwyczajnych ubezpieczeń pośmiertnych z dożywotnią opłatą premij, aby otrzymać rezerwę po ν latach od danego ubezpieczenia.

Dla tego właśnie ilość lk nazwano liczbą pomocniczą, albowiem rzeczywiście pomaga nam do przejścia od rezerwy, obliczonej jakby dla zwyczajnych ubezpieczeń pośmiertnych, do rezerwy od ubezpieczeń każdego innego rodzaju.

Ponieważ we wzorze (I'): k (kapitał ubezpieczony), ${}^{n}p_x k$ (opłacana premia netto od kapitału k) oraz liczba pomocnika lk, przez cały czas trwania umowy nie ulegają zmianie, zatem, pogrupowawszy ubezpieczenia według jednakowego wieku w chwili obliczania rezerwy, bez względu na kombinacye i terminy, gdy dla każdego oddzielnie zapiszemy do księgi: k, ${}^{n}p_x k$ i lk, w przeznaczonych na ten cel kolumnach, otrzymamy na rezerwę, dla całej grupy łącznie, wyrażenie

$$\text{(a)} \quad \Sigma \,\text{Rez (dla } x+\nu=y \text{ letnich)} = P_y \,.\, \Sigma k - R_y \,.\, \Sigma\, {}^{n}p_x k + \frac{\Sigma\, lk}{v_y}\,;$$

albo, gdy za rezerwę na końcu roku rachunkowego (31 grudnia) zgodzimy się przyjąć średnią z rezerwy na początku i końcu roku ubezpieczeniowego

$$\text{(A)} \qquad \Sigma \,\text{Rez (dla } y - {}^{1}/_{2} \text{ letnich)}$$

$$= \frac{P_{y-1}+P_y}{2} \,.\, \Sigma k - \frac{R_{y-1}+R_y}{2} \,.\, \Sigma\, {}^{n}p_x k + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}} + \frac{1}{v_y}\right) . \,\Sigma\, lk\,,$$

gdzie czynniki ze znaczkami y corocznie się zmieniają, lecz znajdują się w tablicach posiadanych przez towarzystwa, zaś Σk, $\Sigma\, {}^{n}p_x k$, $\Sigma\, lk$ są sumami odpowiednich kolumn, mieszczących się w księgach rezerwowych. Przy tem oczywiście, księgi rezerwowe można dzielić na różne kombinacye ubezpieczeniowe, albo nawet wszystkie kombinacye łączyć ze sobą.

Cała więc rzecz sprowadza się do obliczenia, dla każdego pojedynczego ubezpieczenia oddzielnie, ilości l z wyrażenia (4) i tak też dotąd czyniono, wyprowadzając dla każdej kombinacyi inny wzór na l.

Otóż p. E. G a m z a nadał wszystkim dotąd różnym od siebie wyrażeniom na l postać jednakową przy pomocy następującej przeróbki.

Ze wzoru (4)

$$(4) \qquad l = v_{x+N} - \Sigma m_{x+N} + a v_{x+n} + {}^n p_x \, \Sigma v_{x+n}$$

$$= {}^n p_x \, \Sigma v_x - {}^n p_x \, (\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}) + v_{x+N} - \Sigma m_{x+N} + a \, . \, v_{x+n} \, .$$

Lecz wyrażeniem na ${}^n p_x$, jako na roczną premię netto za dane, w najogólniejszej formie, ubezpieczenie jest:

$$(5) \qquad {}^n p_x = \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+N} + a v_{x+n} + v_{x+N}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}} \, ,$$

co podstawiwszy w drugi wyraz przekształconego wyrażenia (4) mamy:

$$(4') \qquad l = {}^n p_x \, . \, \Sigma v_x - \Sigma m_x + \Sigma m_{x+N} - a v_{x+n} - v_{x+N}$$

$$+ v_{x+N} - \Sigma m_{x+N} + a v_{x+n} = {}^n p_x \, . \, \Sigma \; {}_x - \frac{\Sigma m_x}{\Sigma v_x} \, . \, \Sigma v_x \, .$$

$\frac{\Sigma m_x}{\Sigma v_x}$ jest dożywotnią roczną premią netto za ubezpieczenie jednostki kapitału pośmiertnego. Gdy tę premię oznaczymy przez p_x, t. j. gdy położymy $\frac{\Sigma m_x}{\Sigma v_x} = p_x$, otrzymamy:

$$(6) \qquad l = ({}^n p_x - p_x) \, . \, \Sigma v_x \, ,$$

gdzie $({}^n p_x - p_x)$ jest różnicą pomiędzy rzeczywiście za dane ubezpieczenie płaconą, od jednostki kapitału, roczną premią netto ${}^n p_x$, a premią netto p_x, jaką ta sama osoba rocznie opłacaćby musiała, gdyby się ubezpieczyła nie według danej kombinacyi, lecz na przypadek śmierci z dożywotnią opłatą premij.

Po podstawieniu (6) w (A) wypadnie

$$(A') \qquad \Sigma \text{ Rez (dla } y - {}^1/_2 \text{ letnich)}$$

$$= \frac{P_{y-1} + P_y}{2} \Sigma k - \frac{R_{y-1} + R_y}{2} \Sigma'' p_x k + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}} + \frac{1}{v_y}\right) \Sigma k ('' p_x - p_x) \Sigma v_x$$

dla wszelkiego rodzaju kombinacyj pośmiertnych, mieszanych i częściowo mieszanych o niezmiennych, przez cały czas trwania umowy, warunkach.

Zasługa p. E. Gamzy polega właśnie na tem, że liczbom pomocniczym l, mającym różną postać dla różnych kombinacyj, nadał jednakową i bardzo prostą postać

$$(6) \qquad l = ('' p_x - p_x) \, . \, \Sigma v_x \, .$$

Prawidło to na obliczanie liczb pomocniczych zachowuje podobną postać i dla premij jednorazowych, dla których we wzorze (A) i (4) należy założyć $'' p_x = 0$. Uczyniwszy to, otrzymujemy z (A)

$$(B) \qquad \Sigma \text{ Rez (dla } y - {}^1/_2 \text{ letnich)}$$

$$= \frac{P_{y-1} + P_y}{2} \, . \, \Sigma k + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}} + \frac{1}{v_y}\right) . \, \Sigma lk \, ,$$

oraz z (4)

$$(7) \qquad l = v_{x+N} - \Sigma m_{x+N} + a \, . \, v_{x+n}$$

$$= \frac{(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+N}) + a v_{x+n} + v_{x+N} - \Sigma m_x}{v_x} \, . \, v_x$$

$$= \left(\frac{(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+N}) + a v_{x+n} + v_{x+N}}{v_x} - \frac{\Sigma m_x}{v_x} \right) . \, v_x \, .$$

Lecz $\dfrac{(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+N}) + a v_{x+n} + v_{x+N}}{v_x} = {}_n P_x$ jest jednorazową premią netto za dane ubezpieczenie, $\dfrac{\Sigma m_x}{v_x} = P_x$ jest jednorazową premią netto za zwyczajne ubezpieczenie kapitału pośmiertnego, więc

$$(7') \qquad l = ({}_nP_x - P_x) \,.\, v_x$$

tak, że wzór (B) przechodzi na

$$(\mathrm{B}') \qquad \Sigma \,\mathrm{Rez}\ (\text{dla } y - {}^1/_2 \text{ letnich})$$

$$= \frac{P_{y-1} + P_y}{2} \,.\, \Sigma k + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}} + \frac{1}{v_y}\right) . \,\Sigma k({}_nP_x - P_x) v_x ,$$

t. j. posiada kształt podobny do (A′) tylko zastosowany do premij jednorazowych.

Dodać się tu godzi, że dla ułatwienia pracy można dla każdej kombinacyi ułożyć z góry tablicę różnic ${}^np_x - p_x$ resp. ${}_nP_x - P_x$ i tym sposobem mieć gotowy materyał do obrachowywania liczb pomocniczych.

Korzystając ze sposobności nadmienimy tu jeszcze o innym sposobie grupowego obliczania rezerwy premiowej dla tego samego rodzaju ubezpieczeń co wyżej, w którym również rezerwa może być liczona albo dla każdej kombinacyi oddzielnie, albo dla wszystkich razem.

Jeżeli mianowicie ubezpieczenia pogrupujemy według lat, w których zawarte zostały, i według wieku polisowego osób ubezpieczonych, to na każdym oddzielnym rachunku w księdze rezerwowej mieć będziemy rówieśników w wieku lat $x + \nu$, dla których czas trwania ubezpieczeń ν jest zawsze jednaki.

Według wzoru (277), podanego na str. 270 w książce wymienionej poprzednio w przypisku, ogólnym wzorem na rezerwę po ν latach jest także:

$$(8) \qquad \mathrm{Rez}\,(x, \nu)$$

$$= \frac{1}{v_{x+\nu}} \,.\, (v_x p_0 + v_{x+1} p_1 + v_{x+2} p_2 + \ldots + v_{x+\nu-1} p_{\nu-1})$$

$$- \frac{1}{v_{x+\nu}} \,.\, (m_x M_0 + m_{x+1} M_1 + m_{x-2} M_2 + \ldots + m_{x+\nu-1} M_{\nu-1})$$

$$- \frac{1}{v_{x+\nu}} \,.\, (v_{x+1} V_1 + v_{x+2} V_2 + v_{x+3} V_3 + \ldots + v_{x+\nu-1} V_{\nu-1}) \,.$$

Gdy w tym wzorze założymy stałe premie roczne i stałe kapitały, będzie $p_0 = p_1 = p_2 = \ldots = p_{\nu-1} = {}^np_x k$,

$$M_0 = M_1 = M_2 = \ldots = M_{\nu-1} = k\,;$$

gdy, oprócz tego, $\nu <$ od n i od N, jest jeszcze

$$V_1 = V_2 = V_3 = \ldots = V_{\nu-1} = 0 .$$

Skutkiem tych założeń wypada

$$(8') \quad \mathrm{Rez}(x,\nu) = \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} \cdot {}^n p_x k - \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} \cdot k .$$

Albo, po zsumowaniu wszystkich pozycyj tego samego rachunku,

$$(C) \quad \Sigma\,\mathrm{Rez}(x,\nu) = \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} \Sigma\, {}^n p_x k - \frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} \Sigma k,$$

a dla premij jednorazowych

$$(D) \quad \Sigma\,\mathrm{Rez}(x,\nu) = \frac{v_x}{v_{x+\nu}} \Sigma\, {}_n P_x k - \frac{\Sigma m_\nu - \Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} \cdot \Sigma k .$$

Gdybyśmy za rezerwę na końcu roku rachunkowego przyjęli połowę sumy rezerwy na początku i końcu roku ubezpieczeniowego, należałoby oddzielnie obliczyć Rez $(x, \nu-1)$ i Rez (x, ν) i wziąć połowę ich sumy

$$\frac{\mathrm{Rez}(x, \nu-1) + \mathrm{Rez}(x, \nu)}{2},$$

Czynniki $\frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}}$ resp $\frac{v_x}{v_{x+\nu}}$ i $\frac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}}$ zmieniają się z roku na rok i otrzymują się z tablic zasadniczych; księgi rezerwowe potrzebują dać nam tylko sumę kapitałów Σk i sumę płaconych premij netto $\Sigma\, {}^n p_x k$ resp. $\Sigma\, {}_n P_x k$. Liczby pomocnicze są tu więc niepotrzebne i to stanowi stronę dodatnią omawianego sposobu. Stronę ujemną przedstawia potrzeba otwarcia bardzo wielu oddzielnych rachunków, co — zwłaszcza, jeżeli mamy prowadzić oddzielną dla każdej kombinacyi księgę — jest rzeczą nadzwyczaj utrudniającą pracę i dla tego sposób poprzedni uważać można za korzystniejszy dla praktyki.