Z TEORYI UŁAMKÓW CIĄGŁYCH

napisał

W. Lewicki.

Rozważamy tu ułamki ciągłe postaci

$$Uz = -\cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cdot \cdot \cdot - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_1 + z}}}};$$

$$Uz = a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \cdot \cdot \cdot - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_1 + z}}}},$$

mające zastosowania w teoryi podstawień grup modułowych [1]).

Jeżeli w szczególności $a_1 = a_2$ i $= \ldots = a_n = a$, będzie:

$$Uz = -\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cdot \cdot \cdot - \cfrac{1}{a + z}}}}.$$

Oznaczmy ten ułamek przez $-\varphi_n(z)$.

[1]) Por. Lewicki: Wstęp do teoryi funkcyj eliptycznych modułowych „Prace matem.-fizyczne“, t. VIII, str. 13.

Połóżmy:

$$\frac{1}{\varphi_n \varphi_{n-1} \varphi_{n-2} \ldots \varphi_1} = F_n(z);$$

będzie więc:

$$\frac{1}{\varphi_{n+1} \varphi_n \varphi_{n-1} \ldots \varphi_1} = F_{n+1}(z) = \frac{F_n(z)}{\varphi_{n+1}(z)}.$$

Załóżmy, że

$$F_n(z) = C a^n \beta^z,$$

gdzie C, a, β są na razie nieoznaczone.

Atoli:

$$\varphi_{n+1}(z) = \frac{1}{a - \varphi_n(z)},$$

lub

$$a\varphi_{n+1} - \varphi_{n+1}\varphi_n = 1,$$

nadto:

$$\frac{1}{\varphi_{n+1} \varphi_n \varphi_{n-1} \ldots \varphi_1} = F_{n+1}(z).$$

Pomnóżmy przez siebie te równania, to otrzymamy:

$$\frac{a}{\varphi_n \varphi_{n-1} \ldots \varphi_1} - \frac{a}{\varphi_{n-1} \ldots \varphi_1} = F_{n+1}(z),$$

czyli:

$$a F_n(z) - F_{n-1}(z) = F_{n+1}(z).$$

Zastosujmy podstawienia:

$$F_n(z) = C a^n \beta^z; \quad F_n(z) = C a^n \beta^z; \quad F_{n+1}(z) = C a^{n+1} \beta^z,$$

znajdziemy:

$$a\,\alpha - 1 = \alpha^2 \; ; \; \alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}.$$

Możemy wtedy ogólnie napisać:

$$(1) \qquad F_n(z) = C\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n \beta^z + C'\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n \beta^z.$$

Wzór ten posłuży nam do wyznaczenia ilości C, C', β.

Weźmy $n = 1$, to:

$$F_1(z) = \frac{1}{\varphi_1} = a + z,$$

albo według (1):

$$(2) \qquad a + z = \frac{a}{2}\beta^z(C+C') + \frac{\beta^z}{2}\sqrt{a^2-4}\,(C - C').$$

Dla $n = 2$ mamy:

$$F_2(z) = \frac{1}{\varphi_2\varphi_1} = \frac{1}{\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a+z}}\cdot\dfrac{1}{a+z}} = a(a+z) - 1$$

czyli według (1):

$$a(a+z) - 1 = \frac{a^2}{4}\beta^z(C+C') + \frac{a\sqrt{a^2-4}}{2}\beta^z(C-C') + \frac{a^2-4}{4}\beta^z(C+C')$$

lub:

$$(3) \qquad a(a+z) - 1 = \frac{a^2}{2}\beta^z(C+C') - \beta^z(C+C')$$

$$+ \frac{a}{2}\sqrt{a^2-4}\,\beta^z(C-C').$$

Z równań (2) i (3) wynika:

$$C + C' = \frac{\begin{vmatrix} a+z & \frac{\beta^z}{2}\sqrt{a^2-4} \\ a(a+z)-1 & \frac{a}{2}\sqrt{a^2-4}\,\beta^z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{a}{2}\beta^z & \frac{\beta^z}{2}\sqrt{a^2-4} \\ \left(\frac{a^2}{2}-1\right)\beta^z & \frac{a}{2}\sqrt{a^2-4}\,\beta^z \end{vmatrix}}$$

skąd po wykonaniu działań otrzymujemy β^{-z}.

Analogicznie otrzymamy:

$$C - C' = \frac{(a+2z)\beta^{-z}}{\sqrt{a^2-4}},$$

skąd wynika:

$$(4) \quad \begin{cases} C = \dfrac{\beta^{-z}}{2}\left(1 + \dfrac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right) \\ C' = \dfrac{\beta^{-z}}{2}\left(1 - \dfrac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right). \end{cases}$$

A więc:

$$(5) \quad \begin{aligned} F_n(z) = {} & \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n \\ & + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Wzór ten ma znaczenie tylko dla $a > 2$. Przypadek $a = 2$ będziemy przeto musieli rozebrać osobno.

Mamy:

$$\frac{1}{\varphi_n} = \frac{F_n(z)}{F_{n-1}(z)}, \quad \varphi_n = \frac{F_{n-1}(z)}{F_n(z)},$$

a zatem:

$$\varphi_n(z) = -\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cdot \cfrac{\cdot}{\cdot - \cfrac{1}{a+z}}}}$$

$$(6) = -2\,\frac{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n-1} + (\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^{n-1}}{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n} + (\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^{n}}\,.$$

Analogicznie będzie:

$$Uz = a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cdot \cfrac{\cdot}{\cdot - \cfrac{1}{a+z}}}} = a - \varphi_{n-1}(z)$$

$$(7) = a - 2\,\frac{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n-2} + (\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^{n-2}}{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n-1} + (\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^{n-1}}\,.$$

Wzory (6) i (7) można stosować z pomyślnym skutkiem w teoryi ułamków ciągłych przy ich źwijaniu.

---

[1]) Formy (6) i (7) dają podstawienia grupy modułowej, złożone z podstawień zasadniczych:

$$\overset{a}{S}z = z + a \quad \text{i} \quad Tz = -\frac{1}{z}$$

w postaci możliwie najprostszej.

Dla lim $n = \infty$, t. j. dla nieskończenie-krotnej iteracyi mamy:

$$\lim_{n=\infty} Uz = -\lim_{n=\infty} \varphi(z) = 0\,,$$

$$\lim_{n=\infty} Uz = \lim_{n=\infty} \{a - \varphi(z)\} = a\,,$$

t. j. że wszystkie podstawienia rozważanych typów grupują się koło punktów 0 i a, gdzie a jest liczbą całkowitą dowolną: grupa modułowa traci przeto na osi odciętych charakter nieciągły. Zjawisko dobrze znane w teoryi tej grupy.

Np. mamy obliczyć wartość ułamka:

$$x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1+z}}}}\,;$$

zwijając go, dostaniemy kolejno:

$$x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1+z}{z}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z}{z-1-z}} = \frac{1}{1+z}\,.$$

Według wzoru (13) dostaniemy:

$$x = 2\,\frac{(\sqrt{-3}+1+2z)(1+\sqrt{-3})^3 + (\sqrt{-3}-1-2z)(1-\sqrt{-3})^3}{(\sqrt{-3}+1+2z)(1+\sqrt{-3})^4 + (\sqrt{-3}-1-2z)(1-\sqrt{-3})^4}$$

co po obliczeniu daje:

$$x = \frac{-32\sqrt{-3}}{-32\sqrt{-3}(1+z)} = \frac{1}{1+z}\,,$$

wynik najzupełniej zgodny z poprzednim.

Niechaj będzie:

$$x = \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3+z}} = \frac{3+z}{8+3z}\,;$$

według wzoru znajdujemy:

$$x = 2\,\frac{(\sqrt{5}+3+2z)(\sqrt{5}+3) + (\sqrt{5}-3-2z)(3-\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+3+2z)(\sqrt{5}+3)^2 + (\sqrt{5}-3-2z)(3-\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{8\sqrt{5}(3+z)}{8\sqrt{5}\,(8+3z)} = \frac{3+z}{8+3z}\,,$$

jak poprzednio.

Pozostaje jeszcze przypadek $a = 2$, t. j. gdy

$$Uz = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cdots - \cfrac{1}{2+z}}}}$$

gdzie podstawienie $F_n(z) = C\alpha^n \beta^z$, jak widzieliśmy, chybia celu.

Wychodząc z wzoru ogólnego:

$$a\, F_n(z) - F_{n-1}(z) = F_{n+1}(z)$$

otrzymamy:

$$2\, F_{n-1} - F_{n-2} = F_n\,;\quad 2\, F_{n-2} - F_{n-3} = F_{n+1}\,;\quad 2\, F_2 - F_1 = F_3$$

Pomnożywszy te równania, od drugiego począwszy, przez 2 i dodawszy je, otrzymamy:

$$F_{n-2} + 2\, F_2 - 2\, F_1 = F_n\,.$$

Lecz

$$2\,(F_2 - F_1) = 2\,(1 + z)\,;$$

przeto:

$$F_{n-2} + 2\,(1 + z) = F_n$$

Ponieważ

$$2\, F_{n-1} - F_{n-2} = F_n\,,$$

będzie:

$$F_{n-2} + 2\,(1 + z) = 2\, F_{n-1} - F_{n-1}\,,$$

a więc:

$$F_{n-2} + (1+z) = F_{n-1}\,;\ F_{n-3} + (1+z) = F_{n-2} \ldots F_2 + (1+z) = F_3$$

Dodawszy te równania, otrzymamy:

$$F_2 + (n - 3)\,(1 + z) = F_{n-1}$$

Analogicznie:

$$F_2 + (n - 2)\,(1 + z) = F_n$$

czyli:

$$F_n = 2\,(2 + z) - 1 + (n - 2)\,(1 + z)\,.$$

A więc:

$$\varphi_n(z) = \frac{2(2+z) - 1 + (n-3)(1+z)}{2(2+z) - 1 + (n-2)(1+z)},$$

po wykonaniu zaś działań:

$$\varphi_n(z) = \frac{(n-1)z + n}{nz + (n+1)}. \tag{8}$$

A zatem:

$$Uz = -\varphi_n(z) = -\frac{(n-1)z + n}{nz + (n+1)}\text{[1]}.$$

Na podstawie wzoru (8) łatwo zwijać ułamki ciągłe. Np.

$$x = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2+z}}}}$$ daje przez kolejne zwijanie:

$$x = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{3+z}{3+2z}}} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{3+2z}{4+3z}} = \frac{3z+4}{4z+5},$$

a według wzoru (8) wypadnie odrazu:

$$x = \frac{3z+4}{4z+5},$$

wynik zgodny z poprzednim.

---

[1]) I tu przy lim $n = \infty$ mamy:

$$\lim_{n=\infty} Uz = -1,$$

t. j., powyższe podstawienie przeprowadza dowolny punkt z w otoczenie punktu -1 przez nieskończenie — krotną iteracyę; podstawienie to, jak łatwo spostrzedz, jest dla $n = \infty$ eliptycznem, gdyż spełnia warunek:

$$(a-d)^2 + 4bc < 0,$$

gdzie

$$a = -(n-1),\ b = -n,\ c = n,\ d = (n+1).$$