G. Loria

UWAGI O SPÓŁRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH. [1]

Za spółrzędne biegunowe punktu M płaszczyzny, uważa się zwykle dwie liczby: promień wodzący ϱ i anomalię ω. Pierwsza z nich jest liczbą dodatnią, mierzącą odległość punku M od punktu stałego — bieguna; druga wyraża kąt, w zwrocie oznaczonym liczony pomiędzy półprostą OM a półprostą stałą, wychodzącą z punktu O — osią biegunową. W tym układzie każdy punkt, podobnie jak to ma miejsce w układzie Descartes'a, jest przecięciem dwu linij, a mianowicie koła o środku w punkcie O i prostej, przez punkt O przechodzącej.

Definicya taka jest zupełnie logiczną i nie przedstawia wcale niedogodności, o ile mamy do czynienia z punktami odosobnionemi; przyjmują ją też wszystkie podręczniki geometryi analitycznej. Zasadność jej stwierdza jeszcze związek, zachodzący pomiędzy tak określonemi spółrzędnemi biegunowemi a spółrzędnemi prostokątnemi, których początek przypada w punkcie O, a prosta a jest osią odciętych. Wreszcie zaznacza się i to, że gdy liczby zespolone przedstawiamy za pomocą punktów płaszczyzny, to pierwsza z powyżej określonych spółrzędnych biegunowych jest modułem lub wartością bezwzględną liczby zespolonej, druga zaś jej amplitudą.

Posługując się tą definicyą spółrzędnych biegunowych, łatwo rozwiązać można wszystkie zagadnienia zasadnicze analizy nieskończonostkowej krzywych płaskich, jak: kreślenie stycznej, obliczanie pola, wyznaczanie koła ściśle stycznego; słowem wszystkie pytania, w których wystarcza rozważanie małego łuku krzywej. Lecz gdy idzie o rozważanie i badanie całej krzywej, wtedy po-

---

[1]) Artykuł ten, ogłoszony w czasopiśmie „Periodico di Matematica" 15, lipiec i sierpień 1899, oraz po francusku (z pewnemi uzupełnieniami) w „l'Enseignement mathématique 1, Nr. 5 z 15 sierpnia 1899 podajemy tu w przekładzie za zgodą Autora. S. D.

wstaje poważna trudność. W samej rzeczy, jak w spółrzędnych Descartes'a wyrażamy krzywą za pomocą równania postaci $\varphi(x, y) = 0$, podobnie w układzie biegunowym należy stosować równanie postaci

$$(1) \qquad f(\varrho, \omega) = 0 .$$

Otóż jest jasnem, że gdy zmieniać będziemy ω od $-\infty$ do $+\infty$, to w ogólności zajdzie tu okoliczność, iż w pewnych przedziałach otrzymamy ϱ dodatnie, jak być powinno, w innych ϱ mieć będzie wartości ujemne, co jest w rażącej sprzeczności z definicyą, z którejśmy wyszli. Fakt ten nie uszedł uwagi lepszych autorów, którzy zajmowali się metodą spółrzędnych; lecz nie zgłębiwszy go, poradzili tylko zwalczanie wskazanej przeszkody przez przechodzenie do układu spółrzędnych prostokątnych. Jest to wszakże ucieczka, wywołująca w umysłach uczniów wrażenie, iż układ biegunowy jest narzędziem mniej potężnem od układu prostokątnego, od którego pierwszy jakby niewolniczo jest zawisły. Z drugiej strony jest to błąd metodologiczny; logika bowiem nakazywać zwykła, by przedmiot, który rozpoczęto traktować przy pomocy pewnego układu spółrzędnych, był do samego końca według tegoż układu badany. Lecz gorszem jeszcze jest to, iż nakaz powrotu do spółrzędnych prostokątnych nie pozwala często na wyzyskanie wszystkich korzyści, wynikających z prostoty i elegancyi równań biegunowych; nie pozwala na badanie równoczesne wszystkich krzywych tej samej rodziny, gdy dla pewnych wartości parametru krzywa odpowiednia jest algebraiczną, dla innych przestępna [1]).

Otóż można uniknąć wszystkich tych niedogodności przez zastosowanie płodnej w geometryi zasady znaków, a to przy pomocy prostej modyfikacyi definicyi, podanej na wstępie. Pokażemy to w niniejszym artykule.

Weźmy na płaszczyznie punkt stały O i półprostą a, wychodzącą z tego punktu; wyobraźmy sobie, że półprosta r obraca się

---

[1]) Jako przykład służyć mogą spiralne sinusojdalne $\rho^n = a^n \cos n\omega$, gdzie n jest parametrem.

około punktu O, począwszy od położenia a, w zwrocie, przyjętym za dodatni lub w zwrocie przeciwnym. Dla każdego z tych położeń znajdziemy na półprostej r nieskończenie wiele punktów (które oznaczać będziemy literą M) i tyleż punktów na przedłużeniu półprostej r, które nazywać będziemy półprostą dopełniającą r (punkty na tej ostatniej oznaczać będziemy przez $\overline{M}$). Otóż dla wyznaczenia położenia punktu M bierzemy dwie liczby ϱ i ω — pierwszą zawsze dodatnią — określone za pomocą równości:

$$\varrho = + \text{ długość } OM \ , \ \omega = \text{kąt } (ar) ,$$

położenie zaś punktu $\overline{M}$ wyznaczają dwie liczby analogiczne, z których pierwsza jest ujemna, określone za pomocą związków:

$$\varrho = - \text{ dlugość } O\overline{M} \ , \ \omega = \text{kąt } (ar) .$$

Tym sposobem wszystkie punkty jednej półprostej będą miały spółrzędną ϱ dodatnią, gdy wszystkie punkty półprostej dopełniającej będą miały tęż spółrzędną ujemną; i odwrotnie: punkt należy do półprostej lub do jej dopełniającej, stosownie do tego, czy jego spółrzędna ϱ jest dodatnia lub ujemna. Co się tyczy spółrzędnej ω, to ona będzie jednakowa dla wszystkich punktów półprostej; będzie zaś dodatnią lub ujemną stosownie do tego, czy prosta ruchoma dla dojścia do uważanego położenia wykonała obrót w zwrocie dodatnim czy w ujemnym.

Z tych definicyj i umów widać, że: 1-o gdy półprosta r_0 tworzy z półprostą a w zwrocie oznaczonym kąt ω_0, to półprosta dopełniająca r_0 tworzy z tąż osią a i w tymże zwrocie kąt równy $\omega_0 \pm \pi$; 2-o można przyjąć, iż półprosta r, by dojść do położenia r_0, wykonywa obrót zawsze w zwrocie dodatnim. Wynika stąd, że dla wyznaczenia położenia punktu przez nasze spółrzędne biegunowe można by używać zawsze dwóch liczb dodatnich, zamiast tych liczb, do których prowadzą powyższe uwagi. Lecz takie podstawienie sztuczne jest przeciwnie naturze rzeczy, podobnie jak jest niem uważanie logarytmu głównego, którego przyjęcie zaproponował Cauchy, a którego nikt dziś nie używa.

Podstawienie takie mogłoby być użytecznem, gdyby szło o punkty odosobnione, lub gdyby porzucając spółrzędne biegunowe, przechodzilibyśmy do spółrzędnych prostokątnych. Lecz w ogóle komplikuje ono badanie pytań, odnoszących się do linij krzywych zwłaszcza wtedy, gdy idzie o zagadnienie bardzo doniosłe dla geometrów i zapoznawane przez pierwszych pracowników w geometryi analitycznej, a mianowicie o zagadnienie o wyznaczaniu postaci linii krzywej, określonej przez równanie typu (1). Z poprzedzających rozważań wynika następująca metoda rozwiązania tego zagadnienia albo konstrukcyi linii krzywej (używał jej już mutatis mutandis Archimedes w badaniach swych nad krzywemi, noszącemi jego imię). Wyobraźmy sobie, że półprosta r, wychodząc naprzykład z położenia a, obraca się około bieguna O, raz w zwrocie oznaczonym, następnie w zwrocie przeciwnym; niechaj ω_0 oznacza kąt, jaki tworzy oś a z jednem z położeń r zupełnie dowolnem; równanie $f(\varrho, \omega_0) = 0$ da nam na ϱ pewną liczbę wartości dodatnich $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ oraz pewną liczbę wartości ujemnych $-\overline{\varrho_1}, -\overline{\varrho_2}, \ldots$ Pierwszym odpowiadają punkty M_1, M_2, półprostej r_0 takie, że że $OM_1 = \varrho_1$, $OM_2 = \varrho_2, \ldots$, drugim punkty $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \ldots$ półprostej dopełniającej takie, że $O\overline{M}_2 = \varrho_1$, $O\overline{M}_1 = \varrho_2, \ldots$; wszystkie te punkty $M_1, M_2, \ldots \overline{M_1}, \overline{M_2}, \ldots$ należą do krzywej (1). Rozważając wszystkie możliwe położenia półprostej r, otrzymamy wszystkie punkty krzywej (1). Należy zauważyć, że obrót prostej r może w ogóle uskuteczniać się bez końca w obu zwrotach, gdy idzie o krzywą przestępną; lecz gdy krzywa (1) jest algebraiczna, wtedy ruch można przerwać po pewnej liczbie obrotów, gdyż prowadząc go w dalszym ciągu, wpadlibyśmy na punkty krzywej, już wykreślone.

Aby z całą jasnością stwierdzić powyższe spostrzeżenia, podamy kilka przykładów.

Rozpocznijmy od przypadku bardzo prostego. Niechaj będzie równanie

$$\varrho = 2\,R \sin \omega\,; \tag{2}$$

widać z niego, że gdy $0 < \omega < \pi$, jest $\varrho > 0$; gdy $\pi < \omega < 2\pi$ jest $\varrho < 0$; dalej, że wartościom $\omega = \omega_0$ i $\omega = \omega_0 + 2\pi$ odpowiada jedna i taż sama wartość ϱ. Stąd wynika, że, aby otrzymać krzywą, przedstawioną przez równanie (2), wystarcza wykonać z półprostą r jeden obrót całkowity; dla każdego położenia półprostej tworzącej, należącego do pierwszego półobrotu, otrzymujemy punkt krzywej, dla każdego zaś położenia półprostej w drugim półobrocie mamy punkt na półprostej dopełniającej [1]. Można dodać uwagę, że wartości $\omega = \omega_0$ i $\omega = \pi - \omega_0$ dają na ϱ wartości równe. A zatem krzywa składa się z jednego łuku na półpłaszczyznie ponad osią biegunową, łuku symetrycznego względem prostej, prostopadle do osi z bieguna poprowadzonej. Łatwo to stwierdzić, zauważywszy, że krzywa (2) jest kołem o promieniu R, stycznem do osi biegunowej i ze środkiem ponad tą osią.

Krzywa, przedstawiona przez równanie (2), należy do klasy „róż“ („rhodoneae“) G. Grandi'ego, których równaniem ogólnem jest $\varrho = 2\,R \sin n\omega$. Otóż klasa ta (obejmująca krzywe algebraiczne i krzywe przestępne i niełatwe do zbadania przy pomocy spółrzędnych Descartes'a) może służyć do wykazania użytku nowych spółrzędnych biegunowych; stanowić ona będzie drugi przykład do rozważań poprzednich.

Niechaj będzie $n = \frac{1}{2}$; wtedy mamy krzywą

$$\varrho = 2\,R \sin \frac{\omega}{2}\,. \tag{3}$$

Wartościom $\omega = \omega_0$ i $\omega = \omega_0 + 4\pi$ odpowiada taż sama wartość ϱ, a więc dwa obroty prostej tworzącej wystarczają do zupełnego opisania krzywej. Nadto z równania tego widać, że gdy $0 < \omega < 2\pi$, to $\varrho > 0$; gdy $2\pi < \omega < 4\pi$ jest $\varrho < 0$. Pokazuje to, że dla każdej półprostej pierwszego obrotu istnieje punkt krzywej; miejscem geometrycznem tych punktów jest łuk zamknięty $OBDA'D_1B_1O$, styczny do osi biegunowej (fig. 1). Przeciwnie na żadnej półprostej drugiego obrotu nie ma punktu krzywej, lecz istnieje on na dopełniającej każdej z tych prostych; wszystkie te nowe punkty tworzą inny łuk zamknięty $OB'_1D_1ADB'O$ (symetryczny względem punktu O do poprzedniego), który uzupełnia krzywą. Krzy-

---

[1] Jest to zresztą punkt znaleziony już w pierwszym półobrocie.

wa ta ma dwa punkty podwójne D i D_1, a w biegunie punkt styczności obu gałęzi; ma dwie osi symetryi wzajemnie prostopadłe, gdyż wartościom ω, takim, jak ω_0, $2\pi-\omega_0$, $2\pi+\omega_0$, odpowiadają arytmetycznie równe wartości promieni wodzących. Jako sprawdzenie służyć może to, że spółrzędnych prostokątnych równanie (3) przyjmuje postać:

$$(x^2+y^2)^3-4R^2(x^2+y^2)^2+4R^4x^2=0$$

i że dyskusya tego równania doprowadza do tych samych wniosków o postaci krzywej.

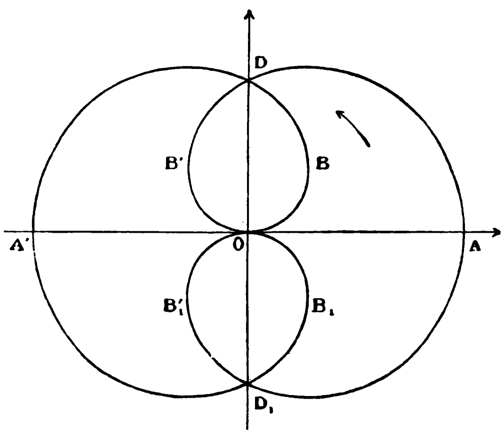

Fig 1.

Przykłady podobne możnaby mnożyć bez końca; dwa powyższe niechaj wystarczą dla celu, który sobie założyliśmy. Lecz uważamy za właściwe dodać jeszcze uwagę o krzywych spiralnych dobrze znanych, z której wyniknie, że dotychczasowe pojęcie o postaci tych krzywych jest z naszego punktu widzenia niezupełne, jeżeli nie błędne.

Zwykłe określenie spiralnej Archimedesa prowadzi do równania:

(4) $$\varrho = a\omega\ ;$$

można tu przyjąć, że $a > 0$; gdyż w razie przeciwnym napisalibyśmy $\varrho = -a(-\omega)$ i zmieniając zwrot dodatni kątów, powrócilibyśmy do założenia $a > 0$. Zmieniając ω od 0 do $+\infty$, widzimy, że krzywa wychodzi z bieguna, około którego wykonywa nieskończenie wiele obrotów i oddala się od niego bez granic; dochodzimy tym sposobem do łuku, nakreślonego linią wyciągniętą na fig. 2. Uważa się zwykle, że jest to cała krzywa, przedstawiona przez równanie (4). Lecz gdy teraz zmieniać będziemy ω od 0 do $-\infty$, to na przedłużeniu każdej półprostej otrzymamy

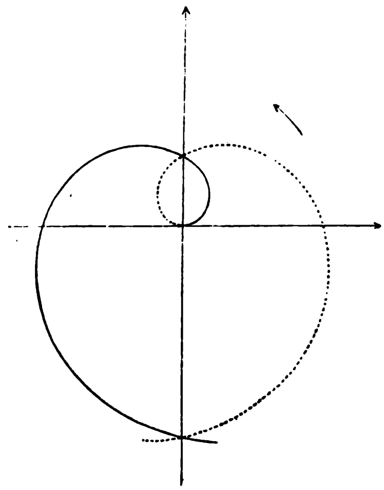

Fig 2

punkt krzywej i wszystkie te nowe punkty utworzą nową gałąź symetryczną do poprzedzającej względem osi biegunowej d r u g o r z ę d n e j (tak przez skrócenie nazywamy półprostą, stanowiącą w zwrocie dodatnim kąt prosty z osią biegunową); jest to gałąź, oznaczona linią kropkowaną na fig. 2-ej. Otóż widoczna, że jeżeli mamy pozostawić kątowi zmiennemu ω wszelką swobodę zmieniania się, to należy zmieniać go od $-\infty$ do $+\infty$, a stąd w przeciwieństwie do tego, jak się zwykle uważa, wynika: ż e p r z e dstawieniem geometrycznem zupełnem równania (4) jest układ dwu krzywych, nakreślonych na fig. 2. Widzimy tedy, że spiralna Archimedesa posiada nieskończenie wiele punktów podwójnych, położonych na osi biegunowej drugorzędnej; odpowiadają one wartościom ϱ równym $(2k+1)\frac{\pi}{2}a$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią lub zerem.

W podobny sposób stwierdzić można, że pomiędzy spiralnemi o równaniu $\varrho = a\omega^n$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, spiralne, odpowiadające wartościom n parzystym, są symetryczne względem osi biegunowej, pozostałe są symetryczne względem osi drugorzędnej; pierwsze mają w biegunie punkt przegięcia, a na osi biegunowej ∞^1 punktów podwójnych, drugie mają ∞^1 punktów podwójnych na osi drugorzędnej.

Pozostawiamy czytelnikowi zbadanie odnośnych własności krzywych, przedstawionych przez równanie $\varrho^m = a^m\omega^n$, gdzie m i n są liczby całkowite dodatnie lub ujemne, oraz sprawdzenie, że spiralna logarytmowa $\varrho = ae^{b\omega}$, prócz zwykle rozważanej gałęzi ciągłej, posiada jeszcze drugą gałąź punktową, analogiczną do gałęzi dobrze znanej, stanowiącej część krzywej logarytmowej.

Rozważania powyższe, jakkolwiek bardzo proste i elementarne, stanowią wszakże punkt zasadniczy w geometryi analitycznej krzywych płaskich. Zbyteczną prawie jest wzmianka, że badania analogiczne możnaby przeprowadzić i dla krzywych w przestrzeni.