KONSTRUKCYE GEOMETRYCZNE.

NAPISAŁ

M. Feldblum.

WSTĘP.

Matematycy greccy posiłkowali się przy konstrukcyach geometrycznych cyrklem i liniałem, bez jakiegokolwiek ograniczania swobody w używaniu tych narzędzi. Podrzędną dla nich było rzeczą, czy pewna część konstrukcyi wykonana została przy pomocy liniału lub cyrkla; szło im głównie o to, aby do całkowitej konstrukcyi użyć jaknajmniej wykreśleń elementarnych: dbano zatem jedynie o teoretyczną prostotę konstrukcyi. Tymczasem konstrukcya, w teoryi bardzo prosta, może okazać się w zastosowaniu praktycznem bardzo uciążliwą, a nawet niekiedy niewykonalną. Wskutek tego powstała później dążność do takiego zmodyfikowania konstrukcyj geometrycznych, aby je można było w praktyce wykonywać z większą łatwością i dokładnością, choćby kosztem prostoty teoretycznej. Pierwszym, który zwrócił uwagę na doniosłość prostoty praktycznej konstrukcyj geometrycznych, był, zdaje się, Lambert; twierdzi on, że należy zbadać „jak daleko możnaby rozwinąć teoryę perspektywy i geometryę, gdyby wykluczyć cyrkiel i posiłkować się jedynie liniałem“ [1]. Wykonanie konstrukcyi za pomocą samego liniału, jeżeli tylko jest możliwe, jest zawsze

[1] J. H. Lambert's Freie Perspective oder Anweisung, jeden perspectivischen Aufriss von freien Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen“ 2 wyd. Zurych 1774, 2 część, str. 161 i nast.

dla geometry i technika dogodniejsze, choćby wymagało większej liczby wykreśleń elementarnych, niż przy użyciu cyrkla. Dziedzinę geometryi, obejmującą zagadnienia, rozwiązywalne przy użyciu samego liniału, nazwał L a m b e r t „geometryą liniału" (Linealgeometrie—géométrie de la règle); „geometria liniału" została następnie bardzo rozwinięta przez matematyków szkoły francuskiej, głównie dzięki pracom S e r v o i s'a [1]), B r i a n c h o n a [2]) i P o n c e l e t a [3]).

Za pomocą samego liniału daje się rozwiązać tylko część tych zagadnień, które są rozwiązalne przy pomocy liniału i cyrkla; natomiast mogą wszystkie owe zagadnienia być rozwiązane za pomocą samego liniału, skoro tylko dane jest jedno wykreślone koło i jego środek. Ideę tych konstrukcyj znajdujemy też już u L a m b e r t a w wyżej cytowanem dziele, gdzie na str. 171 prowadzi się prostopadła do danej prostej, dzieli się kąt dany na dwie części równe, a to wszystko za pomocą samego tylko liniału, przy posiłkowaniu się kołem wykreślonem i jego środkiem. P o n c e l e t [4]) rozwinął myśl, że tą drogą można w s z y s t k i e te zagadnienia rozwiązać, które zwyczajnie wymagają użycia cyrkla [5]). W całej zupełności konstrukcye te wykonane zostały przez S t e i n e r a [6]). P o n c e l e t i S t e i n e r zwracają uwagę na doniosłość owych konstrukcyj dla geometryi praktycznej.

Dla innych celów, mianowicie dla zastosowań w mechanice, zmodyfikował konstrukcye geometryczne matematyk włoski M a s c h e r o n i, który w dziele: „Geometria del compasso" (Pavia,

---

[1]) „Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique" 1805.

[2]) „Les applications de la théorie des transversales" 1818.

[3]) Różne ustępy dzieła: „Traité des propriétés projectives des figures" 2 wyd. Paryż 1865.

[4]) „Traité" t. I, str. 181 i nast.

[5]) **B a l z e r twierdzi w swojej „Analytische Geometrie" (Lipsk 1882, str. 78(, że spostrzeżenie to poczynił był jeszcze C a r d a n o, wszakże nie znajdujemy u B a l t z e r a odnośnej cytaty.**

[6]) **„Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises", Berlin 1833; w Zbiorze dzieł t. I, str. 461 i nast.**

1797) [1]) wykazuje, jak za pomocą samego cyrkla można wykonać wszystkie konstrukcye, wykonywalne przy pomocy cyrkla i liniału. Mascheroni wskazuje na ważne zastosowanie swoich konstrukcyj przy wyrobie przyrządów astronomicznych i geodezyjnych [2]).

W rozprawie niniejszej zbadany jest nowy rodzaj konstrukcyj geometrycznych. Najprzód rozpatrywane są konstrukcye takie, które mogą być wykonane, jeżeli przyjąć, że umiemy prowadzić linie proste i przenosić dane dowolne odcinki prostych [3]), albo też, że umiemy prowadzić linie proste i dzielić kąty dane dowolne na dwie równe części; okazuje się, że obydwie te pary konstrukcyj elementarnych są zupełnie równoważne. Konstrukcye te, poniekąd teoretycznie ciekawe, nie pozbawione są zapewne wartości przy pracach geometrycznych na ziemi, gdyż dają się wykonać za pomocą łańcucha mierniczego albo miary taśmowej. Do tej klasy zagadnień należą wszystkie te, które przy rozwiązywaniu analitycznem prowadzą do wyrażeń, w skład których wchodzić mogą, oprócz czterech działań arytmetycznych, jeszcze wyciąganie pier-

---

[1]) Istnieją przekłady francuski i niemiecki. Czytanie oryginału jest uciążliwe; zaleca się bardzo przystępny wyciąg z niego, napisany przez Hutta: „Die Mascheroni'schen Constructionen" Halla 1880. Wspominamy jeszcze o dziełku Frischaufa: „Die geometrischen Constructionen von L. Mascheroni und J. Steiner", Graz 1869.

[2]) Konstrukcye Mascheroni'ego zostały niedawno bardzo ładnie wykonane przez Aug. Adlera w rozprawie: „Zur Theorie der Mascheroni'schen Constructionen" (Berichte der Wiener Akademie, t. 99, str. 910 i nast.); autor opiera je na jednej zasadzie, mianowicie na inwersyi. W innej rozprawie: „Ueber die zur Ausführung geometrischer Constructionsaufgaben zweiten Grades notwendigen Hilfsmittel" (tamże str. 846 i nast.) wykazuje Adler, że do rozwiązania wszystkich zagadnień rozpatrywanej tu klasy wystarcza każde z następujących narzędzi oddzielnie: 1) liniał, uważany jako 2 proste równoległe, w stałej odległości od siebie się znajdujące; 2) kąt prosty; 3) kąt ukośny stały. W końcu przeglądu niniejszego wspomnę jeszcze o rozprawie A. Wittinga: „Geometrische Constructionen, insbesondere in begrenzter Ebene" (Drezno 1899), mającą na celu praktyczną prostotę konstrukcyj geometrycznych.

[3]) Co się tyczy znaczenia zasadniczego tego rodzaju konstrukcyj, por.: Hilbert: „Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen" 1899.

wiastka kwadratowego z sumy kwadratów. Następnie rozpatrują się konstrukcye, które wykonywane być mogą przy pomocy liniału i przez dzielenie kąta na trzy równe części; konstrukcye te pozwalają rozwiązać klasę zagadnień takich, których nie można rozwiązać przy pomocy liniału i cyrkla, a mianowicie: zagadnień, prowadzących do równań 3-go rzędu o wyróżniku dodatnim. Jako przykład, podane jest wykreślenie siedmiokąta foremnego i trzynastokąta foremnego. Wreszcie w dodatku opisana jest zasada przyrządu, służyć mogącego do dzielenia kąta na części równe.

ROZDZIAŁ I.

Konstrukcye przez prowadzenie prostych i przenoszenie odcinków, oraz przez prowadzenie prostych i dzielenie kątów na dwie równe części.

§ 1. *O rozwiązalności zagadnienia na konstrukcye przez prowadzenie prostych i przenoszenie odcinków.*

Rozwiązanie wszelkiego zadania konstrukcyjnego przy użyciu cyrkla i liniału sprowadza się do kolejnego rozwiązania następujących trzech zadań elementarnych:

a) Znaleść punkt przecięcia dwóch prostych, z których każda dana jest przez 2 punkty.

b) Znaleść punkty przecięcia prostej, danej przez dwa punkty, i koła, danego przez środek i długość promienia.

c) Znaleść punkty przecięcia dwóch kół, danych przez ich środki i długości promieni.

Do wykreślenia zadania a) wystarcza liniał. Zadania b) i c) wysłowimy inaczej w sposób następujący:

b′) Na danej prostej a znaleść drogą wykreślenia punkt X, którego odległość od danego punktu A ma daną wielkość r.

c') Znaleść przez wykreślenie punkt X, którego odległości od dwóch punktów danych A i A' mają odpowiednio wielkości r i r'.

Zobaczmy, o ile zadania b') i c') mogą być rozwiązane środkami, któremi rozporządzamy.

Co się tyczy zagadnienia b'), to jeden szczególny przypadek bezpośrednio rozwiązać możemy, mianowicie: kiedy punkt A leży na prostej a; przez przeniesienie odcinka r na prostej a od punktu A w obie strony otrzymujemy dwa położenia punktu X.

W ogólności niech punkt A nie leży na prostej a.

Musimy tu zastosować pewne prawdy, których dowodzenie znajdzie się w paragrafie następnym; twierdzimy mianowicie, że przez prowadzenie prostych i przenoszenie odcinków można wykonać wykreślenia następujące: wykreślić prostopadłą do danej prostej przez punkt, dany na niej lub zewnątrz niej; znaleść środek danego odcinka; wykreślić do trzech odcinków danych czwarty proporcyonalny.

Zajmijmy się ogólnym przypadkiem zadania b'). Spuśćmy z punktu A (fig. 1) prostopadłą AP na prostą a i oznaczmy $AP = h$; odcinek h, jakoteż położenie punktu P są nam wiadome; aby znaleść punkt X, wyznaczamy odcinek PX. Mamy:

$$PX = \sqrt{r^2 - h^2},$$

albo

$$PX = \sqrt{uv},$$

jeżeli wykreślimy odcinki:

$$u = r + h, \quad v = r - h.$$

Bez użycia wszakże koła nie możemy, ograniczając się do naszych środków pomocniczych, wykreślić odcinka $\sqrt{r^2 - h^2}$, lub równoważnego dla nas: $\sqrt{uv}$; nie możemy tedy znaleść punktu X.

Zagadnienie c') daje się z łatwością sprowadzić do ogólnego przypadku zagadnienia b'). Jakoż niech X (fig. 2) będzie punktem szukanym, tak że $AX = r$, $A'X = r'$; niech dalej XP będzie prostopadła do AA'; oznaczmy $AA' = d$. Jeżeli O jest środkiem odcinka AA', to znajdujemy:

$$OP = \frac{r^2 - r'^2}{2d} = \frac{(r+r')(r-r')}{2d};$$

odcinek OP może zatem być wykreślony, jako czwarty odcinek proporcyonalny do odcinków $r+r'$, $r-r'$ i $2d$. Znając zaś OP, możemy wykreślić i prostą PX i tym sposobem rzeczywiście sprowadzamy zagadnienie c') do ogólnego przypadku zagadnienia b'); przy naszych środkach zagadnienie c') jest przeto dla nas nierozwiązalnem.

Z rozważania powyższego wyciągamy wnioski następujące: Jeżeli zadanie konstrukcyjne, rozwiązalne za pomocą liniału i cyrkla, nie może być rozwiązane przez prowadzenie prostych i przenoszenie odcinków, to przyczyna tego tkwi w tem, że przy rozwiązywaniu nie można ominąć wykreślenia wyrażenia $\sqrt{x^2 - y^2}$ albo równoważnego mu wyrażenia $\sqrt{xy}$, gdzie odcinki x i y są dane lub wykreślone. Skoro zaś, przeciwnie, udaje się rozwiązaniu nadać postać taką, aby nie okazała się potrzeba wykreślenia wyrażenia $\sqrt{x^2 - y^2}$ albo $\sqrt{xy}$, to użycie cyrkla do kreślenia koła nie jest koniecznem i rozwiązanie może być naszemi środkami wykonane. Biorąc pod uwagę zasadę jednorodności wyrażeń analitycznych w geometryi, przekonać się możemy, że wszelkim wyrażeniom, dającym się przy zastosowaniu naszych środków wykreślić, nadać można postać taką, aby w skład ich wchodziło 5 działań, przytoczonych we wstępie.

Zauważyć wypada, że skoro jeden punkt X, czyniący zadość warunkom zagadnienia b') lub c') jest wiadomy, to drugi takiż punkt Y znajdujemy z łatwością, Y bowiem jest symetryczny z X względem prostej AP (fig. 1) lub odp. względem prostej AA' (fig. 2).

Przechodzimy teraz do konstrukcyj, mających znaczenie podstawowe; między innemi rozwiążemy też zagadnienia, na które poprzednio się powoływaliśmy.

§ 2. *Konstrukcye zasadnicze, wykonane przez prowadzenie prostych i przenoszenie odcinków.*

1. Przez punkt A poprowadzić równoległą do prostej a (fig. 3).

Przez A prowadzimy jakąkolwiek prostą, przecinającą prostą a w punkcie B, i odcinamy $BC=AB$, przez C prowadzimy znowu jakąkolwiek prostą, która niech przetnie prostą a w punkcie D; odcinamy $DE=CD$ i łączymy A z E; prosta AE jest wtedy równoległa do a.

Konstrukcya ta wymagała 5 wykreśleń elementarnych (przez „wykreślenie elementarne“ rozumiemy tu poprowadzenie jednej prostej albo przeniesienle jednego odcinka).

Zauważmy, że przy tej konstrukcyi nie jest koniecznem, aby prosta a była nakreślona; dość jest znać 2 jej punkty, które wtedy przyjmujemy za punkty B i D.

Skoro umiemy prowadzić równoległe, to łatwo wtedy, według metod podawanych w podręcznikach, możemy dzielić odcinek dany na dwie części w danym stosunku; możemy dzielić odcinek na dowolną liczbę części równych (w szczególności na dwie); dalej możemy wykreślić figurę, podobną do danej figury, złożonej z linij prostych i punktów, przyczem zarówno środek podobieństwa, jako też stosunek podobieństwa mogą być dowolnie dane. Możemy również do trzech danych odcinków wykreślić czwarty proporcyonalny, i w ogóle jesteśmy w stanie wykreślić wszelkie wyrażenia wymierne, o ile tylko ich spółczynniki liczbowe są wymierne.

2. Wykreślić jakikolwiek kąt prosty z wierzchołkiem w danym punkcie A (fig. 4).

Prowadzimy przez jakąkolwiek prostą A i nadto inną prostą, przecinającą poprzednią w jakimś punkcie B. Na tej drugiej prostej odcinamy długość AB od punktu B w obie strony; niech będzie: $BD=BC=BA$. Połączywszy punkt A z punktem C i z punktem D, otrzymamy kąt prosty CAD.

Konstrukcya ta wymagała 5 wykreśleń elementarnych.

Umiejąc kreślić kąty proste, umiemy też, na zasadzie twierdzenia Pytagorasa wykreślać wyrażenia kształtu $\sqrt{x^2+y^2}$, gdzie

x i y są odcinki wiadome. Przez wielokrotne stosowanie kreślenia równoległych i kątów prostych, możemy wykreślać wszelkie wyrażenia, zawierające pierwiastki kwadratowe z sum kwadratów wyrażeń takich, które wykreślić umiemy; (jeżeli np. chcemy wykreślić odcinek $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, to kreślimy najprzód $u=\sqrt{x^2+y^2}$, następnie odcinek $w=\sqrt{u^2+z^2}$)

Zbytecznem chyba jest dodać, że wyrażenia, które wykreślić chcemy, muszą być jednorodne pierwszego wymiaru; gdyby było inaczej, można je do takiej formy sprowadzić przez odpowiedni dobór jednostki długości.

Co się tyczy spółczynników liczbowych, to zbytecznem jest teraz ograniczenie, aby były wymiernemi; mogą one być liczbami niewymiernemi kształtu $\sqrt{m}$ (gdzie m jest liczbą wymierną), albo, ogólniej, liczbami niewymiernemi, powstałemi z liczb wymiernych przez wielokrotne stosowanie pięciu działań: $x+y$, $x-y$, xy, $x:y$, $\sqrt{x^2+y^2}$. Dla uzasadnienia tego twierdzenia wystarczy pokazać, że można wykreślić wyrażenie kształtu $a\sqrt{n}$, gdzie a jest odcinkiem danym, a n liczbą naturalną; bardziej skomplikowane przypadki sprowadzają się do tego przez kolejne kreślenie równoległych i stosowanie twierdzenia P y t a g o r a s a. Że zaś $a\sqrt{n}$ wykreślone być może, jest zupełnie jasnem, napisać bowiem możemy $a\sqrt{n}=\sqrt{a^2+a^2+\ldots\ldots+a^2}$, gdzie suma pod znakiem pierwiastka składa się z n dodajników. Oczywiście nie potrzeba wykreślać wszystkich odcinków: $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, ..., $a\sqrt{n-1}$, aby otrzymać odcinek $a\sqrt{n}$; jeżeli np. chcemy wykreślić odcinek $a\sqrt{5}$, to dość jest wykreślić trójkąt prostokątny z bokami a i $2a$; jego przeciwprostokątna będzie $a\sqrt{5}$. Jako przykład bardziej złożony weźmy odcinek $a\sqrt{33-12\sqrt{2}}$. Znajdziemy z łatwością, że $33-12\sqrt{2}=4^2+(2\sqrt{2}-3)^2$, a więc: $a\sqrt{33-12\sqrt{2}}=\sqrt{(4a)^2+(2a\sqrt{2}-3a)^2}$. Kreślimy najprzód trójkąt równoramienny prostokątny o bokach, równych $2a$; jego przeciwprostokątna jest $2a\sqrt{2}$; następnie znajdujemy odcinek $2a\sqrt{2}-3a$ i kreślimy trójkąt prostokątny o bokach $4a$ i $2a\sqrt{2}-3a$; przeciwprostokątna tego trójkąta przedstawia odcinek żądany..

Jeżeli wyniki niniejszego artykułu zestawimy z poprzednim, to dojdziemy do wniosku, że do rozwiązania wszystkich w ogóle zadań, jakie za pomocą naszych środków pomocniczych mogą być rozwiązane, wystarczają w zupełności dwie konstrukcye, podane w artykule niniejszym. Pomimo to podamy tu jeszcze rozwiązania kilku prostych zagadnień, noszących również charakter zadań podstawowych, a to w celu wyłożenia najprostszego sposobu ich wykreślenia.

3. Spuścić z punktu A prostopadłą na prostą a (fig. 5).

Kreślimy jakikolwiek kąt prosty z wierzchołkiem w A (zag. 2); ramiona jego niech przetną prostą a w punktach B i C. Odcinamy następnie $BD=BA$ i prowadzimy przez D równoległą do CA (zag. 1); równoległa ta przetnie prostą BA w punkcie E; odcinamy tedy $BF=BE$ i łączymy A z F; prosta AF jest szukaną prostopadłą.

Konstrukcya ta wymagała 12 wykreśleń elementarnych.

4. Wykreślić prostopadłą do prostej a w punkcie A.

Prowadzimy jakąkolwiek równoległą (zag. 1) i spuszczamy z A prostopadłą na tę równoległą (zag. 3), albo też kreślimy jakąkolwiek prostopadłą do a (zag. 3) i prowadzimy przez A równoległą do tej prostopadłej (zag. 1).

Do każdej z tych konstrukcyj potrzeba 17 wykreśleń elementarnych.

5. Przenieść kąt dany.

Niech dany będzie kąt MON (fig. 6) i niech wymaganem będzie wykreślić kąt, jemu równy, tak, aby ramię jego znajdowało się na prostej a i miało określony kierunek, i aby wierzchołek był w punkcie A. Kreślimy jakąkolwiek prostopadłą do ON (zag. 3) i tworzymy w ten sposób trójkąt prostokątny POQ; następnie odcinamy na prostej a w oznaczonym kierunku odcinek $AB=OP$, kreślimy prostopadłą do a w punkcie B (zag. 4), odcinamy na niej $BC=PQ$ i łączymy A z C; kąt BAC jest wtedy kątem żądanym (32 wykreślenia elementarne).

6. Podzielić kąt dany na dwie części równe.

Kąt dany niech będzie MAN (fig. 7). Na jednem ramieniu np. na AM, obierzmy dwa punkty dowolne: B i D, na drugiem zaś odetnijmy $AC=AB$, $AE=AD$; połączmy następnie B z E, C z D i wreszcie punkt A z punktem F, w którym się przecinają BE i CD, prosta AF dzieli wtedy kąt MAN na dwie równe części (5 wykreśleń elementarnych).

Zaznaczamy tu, iż przez prowadzenie prostych i przenoszenie odcinków można podzielić na dwie części równe każdy kąt dany, czy to ukośny (zag. 6), czy też półpełny (zag. 4) [1]. Zobaczymy poniżej, że można też, odwrotnie, przez prowadzenie prostych i dzielenie kątów na dwie równe części przenosić dowolny odcinek w sposób oznaczony, tak że dwa te wykreślenia: przenoszenie odcinków i dzielenie kątów na dwie części równe okażą się (obok konstrukcyj liniowych) równoważnemi.

Zastosujemy teraz wykreślenia artykułu niniejszego do rozwiązania zagadnień bardziej złożonych.

§ 3. *Przykłady na rozwiązywanie zagadnień konstrukcyjnych przez prowadzenie prostych i przenoszenie odcinków.*

1. K r e ś l e n i e t r ó j k ą t ó w.

Przez proste zastosowanie zagadnienia 5 (§ 2) można w y k r e ś l i ć t r ó j k ą t, z n a j ą c d w a j e g o b o k i i k ą t m i ę d z y n i e m i z a w a r t y. Przez dwukrotne zastosowanie tegoż zagadnienia można w y k r e ś l i ć t r ó j k ą t, z n a j ą c j e g o b o k i k ą t y p r z y l e g ł e. Nie jesteśmy w stanie w y k r e ś l i ć t r ó j k ą t a, k t ó r e g o t r z y b o k i s ą d a n e (por. zag. 2, § 1). Przez zastosowanie zagadnień 3 i 5 (§ 2) możemy w y k r e ś l i ć t r ó j k ą t p r o s t o k ą t n y, z n a j ą c p r z e c i w p r o s t o k ą t n ą i k ą t o s t r y.

2. W y z n a c z y ć k o ł o (t.j. jego środek i promień), w p i s a n e w t r ó j k ą t d a n y.

Środkiem koła szukanego jest punkt przecięcia prostych, dzielących dwa kąty trójkąta na dwie części równe (zag. 6, § 2); pod-

[1] Kątem „półpełnym" nazywamy kąt 180°, mniejszy zaś kąt nazywamy „ukośnym".

stawy prostopadłych, spuszczonych ze środka na boki trójkąta (zag. 3, § 2), są punktami styczności koła wpisanego.

3. Kreślenie rozmaitych elementów koła.

Aby wyznaczyć środek koła, danego przez trzy punkty jego okręgu A, B, C, prowadzimy prostopadłe do dwóch z odcinków AB, BC, CA w ich środkach, punkt przecięcia tych prostopadłych jest środkiem szukanym. Wyznaczywszy środek, możemy z łatwością wykreślić styczne do koła w punktach danych. Chcąc jeszcze wykreślić styczną, równoległą do danej prostej a, spuszczamy ze środka O prostopadłą na prostą a, na tej prostopadłej odcinamy od O odcinek równy OA i przez koniec odcinka prowadzimy równoległą do prostej a, która to równoległa jest styczną żądaną.

Można też z łatwością wykreślić biegunową punktu M względem poprzedniego koła (fig. 8). W tym celu łączymy punkt M z dwoma punktami danemi, np. z A i B i spuszczamy z O prostopadłe OP i OQ na MA, odp. MB; następnie odcinamy $PA'=PA$, $QB'=QB$ i prowadzimy proste AB, $A'B'$, AB', $A'B$; prosta, łącząca punkt przecięcia prostych AB i $A'B'$ z punktem przecięcia prostych AB' i $A'B$, jest biegunową punktu M względem koła, wyznaczonego przez punkty A, B, C.

Niech wyznaczone będą dwa koła, każde przez trzy punkty; niech mianowicie punkty A, B, C (fig. 9) wyznaczają jedno koło, a punkty A', B', C' — drugie; wspólnych stycznych wprawdzie wykreślić nie możemy, możemy natomiast wykreślić proste, łączące punkty styczności wspólnych stycznych. Znajdujemy przedewszystkiem środki O i O' obydwóch kół, łączymy O' z A' i prowadzimy przez O równoległą do $A'O'$; na tej równoległej odcinamy od punktu O w obie strony odcinek OA; niech będzie $OM=OM_1=OA$. Niech proste OO' i MA' przecinają się w punkcie S, a proste OO' i M_1A' — w punkcie S_1; punkty S i S_1 są środkami podobieństwa obydwóch kół, a biegunowe tych punktów są prostemi żądanemi. Jeżeli wypadnie, że jedna z tych biegunowych nie przecina koła odpowiedniego (co stwierdzamy przez wyznaczenie odległości środka koła do tej biegunowej), to odpowiednia para stycznych jest urojoną, a biegunowa w tym razie jest tak zw. „cięciwą idealną styczności."

Znaleść oś pierwiastną dwóch kół danych (przez trzy punkty okręgu, albo przez środki i promienie). Niech A, A' (fig. 2) będą środki kół, r, r' — ich promienie; oznaczmy $AA'=d$ i niech będzie $AO=OA'$; odległość punktu O od osi pierwiastnej jest wówczas: $OP=\frac{(r+r')(r-r')}{2d}$ (§ 1). Wykreśliwszy to wyrażenie, oznaczamy punkt O, następnie punkt P, prostopadła zaś do AA' w punkcie P jest osią pierwiastną kół danych.

4. Zadanie Apolloniusza: wyznaczyć koło, styczne do trzech kół danych.

Zadanie to nie może być, przy użyciu naszych środków, rozwiązane (trzy koła dane są naturalnie tylko przez odpowiednie elementy wyznaczone, nie zaś nakreślone, w przeciwnym bowiem razie zadanie może być rozwiązane przez zastosowanie konstrukcyj Steinerowskich). Niemożliwość rozwiązania rozpatrywanego zadania wykażemy w sposób geometryczny, dowodząc, że nawet pewien szczególny przypadek tego zadania nie daje się przez użycie naszych środków rozwiązać; szczególniejsze to zagadnienie brzmi: wyznaczyć koło styczne do danego koła i do dwóch danych prostych. Zadanie to uprościmy przez rozumowanie następujące: Niech O (fig. 10) będzie środek, a OK promień koła danego; dane proste niech będą AB i AC. Oznaczmy przez X środek koła szukanego; połączywszy X z O, weźmy $OP=OK$ i spuśćmy z punktu X prostopadłe XM, XN na AB odp. AC, wtedy będzie $XM=XN=XP$. Przedłużmy następnie XM, XN tak, aby było $MS=NR=OK$, wtedy będzie: $XO=XS=XR$. Jeżeli teraz przez S i R poprowadzimy równoległe do AB i odp. do AC i zauważymy, że te równoległe mogą być bezpośrednio wykreślone, to zobaczymy, że ostatnio wypowiedziane zadanie sprowadza się do następującego: wyznaczyć koło, przechodzące przez dany punkt i styczne do dwóch prostych danych. Nierozwiązalności zaś tego ostatniego zadania dowiedziemy w ten sposób, że wykażemy, iż jego rozwiązanie prowadziłoby do rozwiązania zadania b' § 1, w przypadku ogólnym, zadanie to zaś jest, jak wiemy, przy naszych środkach pomocniczych nierozwiązalne.

Przypuśćmy więc, że umiemy wyznaczyć koło, przechodzące przez dany punkt i styczne do dwóch prostych danych. Niech wymaganem będzie znaleść na danej prostej a (fig. 11) punkt, którego odległość od punktu A byłaby równą danemu odcinkowi l. Na prostej, dowolnie przez punkt A poprowadzonej, weźmy odcinek $AB=l$ i poprowadźmy przez B prostopadłą do AB (zag. 4, § 2), prostopadła ta przetnie prostą a w punkcie C; połączmy C z A i wykreślmy kąt $\angle ACD = \angle ACB$ (przez zastosowanie zagadnienia 3, § 2). Obierzmy następnie na prostej a dowolny punkt M i wyznaczmy środek koła, przechodzącego przez punkt M i stycznego do prostych CB i CD; według założenia znajdziemy przynajmniej jeden taki środek N (istnieją oczywiście dwa koła, czyniące zadość warunkom). Punkt N leży z pewnością na prostej CA; jeżeli teraz połączymy N z M i poprowadzimy przez A równoległą do NM, to przetnie ona prostą a w punkcie X takim, że $AX=l$. Rozumowanie to dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Również nierozwiązalnym jest dla nas następujący inny szczególny przypadek zadania Apolloniusza: w y z n a c z y ć k o ł o, p r z e c h o d z ą c e p r z e z d w a d a n e p u n k t y i s t y c z n e d o d a n e j p r o s t e j l u b d o d a n e g o (n i e n a k r e ś l o n e g o) k o ł a.

Jako przykład zadań na wyznaczenie koła, rozwiązywalnych przez prowadzenie prostych i przenoszenie odcinków, wskażemy zadanie następujące: w y z n a c z y ć k o ł o, s t y c z n e d o d w ó c h d a n y c h p r o s t y c h, a l b o d o d w ó c h d a n y c h (n i e n a k r e ś l o n y c h) k ó ł, a l b o t e ż d o d a n e j p r o s t e j i d a n e g o (n i e n a k r e ś l o n e g o) k o ł a, p r z y t e m d o j e d n e j z t y c h l i n i j w d a n y m p u n k c i e.

5. Zadanie M a l f a t t i'ego: w d a n y t r ó j k ą t w p i s a ć t r z y k o ł a t a k, a b y k a ż d e z n i c h b y ł o s t y c z n e d o d w ó c h k ó ł p o z o s t a ł y c h i d o d w ó c h b o k ó w t r ó j k ą t a.

Rozwiązanie syntetyczno geometryczne tego zagadnienia, dane przez Steinera [1]), jest bardzo piękne i proste, lecz wymaga użycia cyrkla; natomiast nasze środki pomocnicze wystarczają w zupełności do wykreślenia tego zadania według wzorów, które Malfatti sam otrzymał był drogą rachunku („Memoria sopra un problema stereotomico [2]) di Gianfrancesco Malfatti", ogłoszone w „Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle scienze", tom *X* część I, Modena 1803, str. 235 i nast.).

Niech dany trójkąt będzie ABC (fig. 12). Podzielmy każdy kąt jego na dwie części równe i niech O będzie punktem przecięcia dwusiecznych. Oznaczmy przez K, L, M środki kół szukanych i spuśćmy z tych punktów prostopadłe KP, LQ, MR na odpowiednie boki trójkąta: AB, BA CB. Oczywiście potrafimy znaleść punkty K, L, M, gdy znajdziemy punkty P, Q, R. Niech r będzie wspólną długością prostopadłych OD, OE, OF, spuszczonych z punktu O na boki trójkąta; oznaczamy jeszcze: $AE = s$, $BF = t$, $CD = u$. Odcinki r, s, t, u możemy z łatwością wykreślić. Nieznane nam odcinki AP, BQ, CR oznaczmy odpowiednio przez x, y, z. Celem wyznaczenia ilości x, y, z wyprowadza Malfatti równania następujące:

---

[1]) Rozwiązanie Steinerowskie podane było bez dowodzenia w r. 1826 w rozprawie: „Einige geometrische Betrachtungen" (Crelle's Journal, t. 1, str 161) i nast.; w Zbiorze dzieł t. I, str. 19 i nast.). Dowodzenie tego rozwiązania, oparte na rozumowaniach czysto-geometrycznych w duchu Steinera, podał r. 1874 Schröter: „Die Steiner'sche Auflösung der Malfatti'schen Aufgabe" (Crelle's Journal, t. 77, str. 230 i nast.). W pracy Schrötera znajduje się też przegląd krytyczno-historyczny literatury o zadaniu Malfatti'ego. Inne, zupełnie elementarne dowodzenie geometryczne rozwiązania Steinerowskiego daje J. Petersen w dziełku: „Metody i teorye rozwiązywania zadań geometrycznych konstrukcyjnych" (przekład polski K. Hertza, Warszawa 1881); jeszcze inne, również proste syntetyczne dowodzenie Harta podane jest w znanym podręczniku: Rouché i Comberousse: „Traité de géométrie" (Paryż, wyd. 6, 1891, t. 1 str. 295 i nast.).

[2]) Zadanie dane było Malfatti'emu, jako stereotomiczne; pierwotne jego brzmienie było następujące: „Dato un prisma retto triangolare di qualunque materia come di marmo, cavare da esso tre cilindri dell' altezza del prisma e della magior grossezza possibile correspettivamente, e in conseguenza col minor avanzo possibile di materia avuto riguardo alla voluta grossezza".

$$x + y + \frac{2r}{\sqrt{st}}\sqrt{xy} = s + t,$$

$$y + z + \frac{2r}{\sqrt{tu}}\sqrt{yz} = t + u,$$

$$z + x + \frac{2r}{\sqrt{us}}\sqrt{zx} = u + s$$

i podaje następujące rozwiązanie tego układu równań:

$$2x = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2},$$

$$2y = s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2},$$

$$2z = s + t + u - r - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2},$$

Na zasadzie tych wzorów znajdujemy odcinki AP, BQ, CR w ten sposób: kreślimy najprzód odcinek $OA + OB + OC = a$, potem odcinek $AC + BD = b$; z figury widzimy, że $a > b$; kreślimy następnie odcinek $a - b + OE = 2c$, wówczas jest: $AP = OA - c$, $BQ = OB - c$, $CR = OC - c$.

6. Wykreślenie trójkąta foremnego.

Niech dany będzie promień r koła opisanego; wtedy bok trójkąta jest $r\sqrt{3}$, a wysokość $\frac{3r}{2}$; na zasadzie tych wzorów mamy konstrukcyę następującą:

Wykreślamy trójkąt równoramienny prostokątny ABC (fig. 13) o bokach $\frac{r}{2}$; jego przeciwprostokątna jest $\frac{r}{2}\sqrt{2}$; w A prowadzimy prostopadłą do AC i odcinamy $AD = \frac{r}{2}$, wtedy będzie $DC = \frac{r}{2}\sqrt{3}$. Przedłużamy następnie CD i bierzemy $DE = CD$; w D prowadzimy prostopadłą do CE i odcinamy $DF = 3AB = \frac{3r}{2}$; połączywszy F z C i E otrzymamy żądany trójkąt CEF.

Wykreślimy jeszcze trójkąt foremny przy innych danych warunkach.

Wykreślić trójkąt foremny, którego bok AB jest dany (fig. 14).

Dzielimy odcinek AB na połowy w punkcie C, prowadzimy przez A do AB prostopadłą i bierzemy na niej $AD=AC$; łączymy następnie D i C, kreślimy w D prostopadłą do DC i odcinamy na niej $DE=AC$, potem kreślimy prostopadłą do AB w punkcie C i odcinamy $CF=CE$, wtedy jest ABF trójkątem żądanym.

Wykreślić trójkąt foremny z jednym wierzchołkiem w danym punkcie A i dwoma drugiemi, leżącemi odpowiednio na danych prostych a i b (fig. 15).

Spuszczamy z punktu A prostopadłą AC na prostą a i prowadzimy przez A równoległą do a; na równoległej odcinamy $AD=AC$, łączymy D z C kreślimy w D prostopadłą do DC; bierzemy na niej $DE=AC$ i następnie na prostej a odcinek $CF=CE$. Jeżeli połączymy F z A, to będzie $\angle FAC=60^0$. Na AF odcinamy $AG=AC$ i kreślimy w G prostopadłą do AF; niech ta prostopadła przetnie prostą b w punkcie K, wówczas K jest wierzchołkiem trójkąta szukanego. Trzeci wierzchołek L otrzymamy, biorąc na prostej a odcinek $CL=GK$.

Wykreślić największy trójkąt foremny, którego boki przechodzą odpowiednio przez trzy punkty dane: A, B, C (fig. 16).

Kreślimy najprzód trójkąt ABC i na każdym boku tego trójkąta kreślimy trójkąt foremny, leżący całkowicie zewnątrz trójkąta ABC (na fig. trzy te trójkąty nie są oznaczone): wyznaczamy następnie środki D, E, F tych 3-ch trójkątów foremnych; punkty D, E F są wierzchołkami również trójkąta foremnego. Wreszcie przez punkt A prowadzimy równoległą do prostej EF (prostej EF kreślić nie potrzeba—patrz zag. 1, § 2), przez B—równoległą do FD i przez C—równoległą do DE; trójkąt, utworzony przez te trzy równoległe, czyni zadość warunkom.

7. Wykreślenie pięciokąta foremnego.

Niech dany będzie promień r koła opisanego. Oznaczmy bok pięciokąta żądanego przez a_5, a promień koła wpisanego—przez ϱ_5, wtedy mieć będziemy:

$$a_5 = \frac{1}{2} r \sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad \varrho_5 = \frac{1}{4} r(\sqrt{5}+1).$$

Wystarczy opisać konstrukcyę długości a_5 i ϱ_5, gdyż mając te odcinki, możemy wykreślić trójkąt równoramienny o podstawie a_5 i wysokości ϱ_5; pozostanie wtedy tylko powtórzyć ów trójkąt. Dla otrzymania a_5 i ϱ_5 kreślimy trójkąt prostokątny ABC (fig. 17) o bokach: $AB = \frac{r}{2}$ i $BC = \frac{r}{4}$; przeciwprostokątna AC jest równą: $\frac{1}{4} r\sqrt{5}$. Przedłużamy następnie AC i odcinamy $CE = CD = \frac{r}{4}$; w D kreślimy prostopadłą do AC i bierzemy na niej $DF = \frac{r}{2}$; połączywszy A z F, mieć będziemy: $AF = \frac{1}{2} a_5$, $AE = \varrho_5$.

8. Wykreślenie dziesięciokąta foremnego.

Dziesięciokąt foremny łatwo jest otrzymać z pięciokąta foremnego, prostszą wszakże jest następująca konstrukcya niezależna. Oznaczamy przez a_{10}, ϱ_{10} i r odpowiednio: bok dziesięciokąta foremnego, promień koła wpisanego i promień koła opisanego; ten ostatni uważamy za dany i pragniemy wykreślić a_{10} i ϱ_{10}. Mamy oczywiście:

$$a_{10} = \frac{1}{2} r(\sqrt{5}-1), \quad \varrho_{10} = \frac{1}{4} r \sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Kreślimy trójkąt prostokątny ABC (fig. 18) o bokach: $AB = \frac{r}{2}$ i $BC = \frac{r}{4}$; przedłużamy przeciwprostokątną i odcinamy $CD = CE = \frac{r}{4}$; w D kreślimy prostopadłą do AD, bierzemy na niej $DF = \frac{r}{2}$ i łączymy A z F, wtedy jest $AE = \frac{1}{2} a_{10}$, $AF = \varrho_{10}$.

§ 4. ***Wykreślenia zasadnicze przez dzielenie kątów na dwie równe części; ich stosunek do wykreśleń przez przenoszenie odcinków.***

Zamierzamy teraz zbadać, jakie wykreślenia wykonać zdołamy, jeżeli za dostępne nam wykreślenia elementarne uważać będziemy prowadzenie prostych i dzielenie kątów na dwie części równe.

Dla ułatwienia zakładamy z góry, że nietylko kąty ukośne umiemy dzielić na połowy, lecz również kąt półpełny, t. j. że bezpośrednio możemy wykreślić prostopadłą do prostej danej w punkcie danym. Założenie to bądź co bądź nie ogranicza w niczem ogólności naszych rozumowań; wykażemy bowiem natychmiast, że z założenia, iż tylko kąty ukośne umiemy bezpośrednio dzielić na dwie części równe, wypływa możliwość takiegoż dzielenia i kąta półpełnego.

Jakoż, niech wymaganem będzie wykreślić prostopadłą do prostej AB w punkcie C (fig. 19). Poprowadźmy przez C jakąkolwiek prostą DE i podzielmy na dwie części równe kąt BCE, jakoteż przyległy do niego kąt BCD; dwusieczne niech będą CF i CG; oczywiście są one do siebie prostopadłe. Podzielmy następnie na połowy kąty BCF i FCE, oraz kąty, do nich przyległe; otrzymamy tedy proste CI i CH i prostopadłe do nich proste CL i CK. Uważajmy teraz pęk promieni $C(HFG)$ jako rzutowo pokrewny z pękiem $C(KGL)$, przyczem promieniom CH, CF, CI pierwszego pęku niech odpowiadają promienie CK, CG, CL drugiego pęku; ponieważ te dwa pęki mają 3 pary odpowiednich promieni do siebie prostopadłych, to każde dwa odpowiednie promienie tych pęków są do siebie prostopadłe. Wyznaczmy tedy w pęku $C(KGL)$ promień CX, odpowiadający promieniowi CB pęku $C(HFI)$, wówczas promień CX, jako prostopadły do CB, będzie rozwiązaniem naszego zadania. Promień CX wykreśla się za pomocą konstrukcyj liniowych, według metod, podawanych w każdym podręczniku geometryi rzutowej [1]).

---

[1]) Np. Steiner-Schröter: „Die Theorie der Kegelschnitte". Lipsk 1876 (2 wyd.) § 10. Chasles: „Traité de géométrie supérieure". Paryż 1880 (2 wyd.), str. 73 i nast. Von-Staudt: „Geometrie der Lage". Norymberga 1847, str. 53.

Nie jest to zatem żadne ograniczenie, skoro odrazu zakładamy, że możemy również kąty półpełne dzielić na dwie części równe; podział taki kąta półpełnego, t. j. wykreślenie prostopadłej do danej prostej w danym jej punkcie, uważamy za wykreślenie elementarne.

Wstępne wykreślenia zasadnicze poprowadzimy w takim porządku, aby najkrótszą drogą dojść do przenoszenia odcinków.

1. Podwoić dany odcinek AB (fig. 20).

W punkcie A kreślimy prostopadłą AC do prostej AB i dzielimy kąt prosty CAB na połowy, tworząc kąt $DAB = 45^0$; w B kreślimy do prostej AB prostopadłą, przecinającą prostą AD w punkcie E: wreszcie w punkcie E kreślimy kąt $BEX = 45^0$, którego bok przecina przedłużenie prostej AB w punkcie X takim, że $AB = BX$.

Do konstrukcyi tej użyto 5 wykreśleń elementarnych.

2. Przez dany punkt poprowadzić równoległą do danej prostej.

Można zadanie to rozwiązać zupełnie tym samym sposobem, jak zadanie 1 w § 2, gdyż na mocy zadania poprzedniego można będzie wyznaczyć odcinek $BC = AB$ (fig. 3), oraz odcinek $DE = CD$. Konstrukcya ta wymagałaby 13 wykreśleń elementarnych. Prostszą, bo wymagającą tylko 11 wykreśleń elementarnych, jest konstrukcya następująca, oparta na własnościach harmonicznych czworokąta zupełnego.

Niech żądanem będzie poprowadzenie równoległej do prostej a przez punkt A (fig. 21). Obierzmy na a dowolny odcinek BC i podwójmy go, tak że $CD = BC$. Następnie wykreślmy proste AB i AD, potem dowolnie obrany na prostej AB punkt E połączmy z punktami C i D, proste EC i AD przetną się w pewnym punkcie F; poprowadźmy prostą BF, która przetnie prostą ED w punkcie G; prosta AG jest tedy żądaną równoległą do a.

3. Dany odcinek przenieść równolegle.

Mamy wykreślić odcinek, równy odcinkowi AB, równoległy do niego i jednakowo z nim skierowany, przyczem początkowy punkt C jest dany. W tym celu prowadzimy prostą AC, przez B kreślimy równoległą do AC, a przez C równoległą do AB; niech te dwie równoległe przetną się w D; wtedy CD jest żądanym odcinkiem (23 wykr. elem.).

4. Obrócić dany odcinek około jednego z końców.

Niech dany odcinek będzie AB (fig. 22); przez A niech dany będzie promień AC; należy na AC od punktu A odciąć długość równą odcinkowi AB. Prowadzimy w tym celu przez B prostą BD, równoległą do AC, i dzielimy kąt ABD na połowy; dwusieczna przetnie prostą AC w pewnym punkcie E, wówczas będzie AE żądanym odcinkiem (12 wykr. elem.).

5. Odciąć odcinek dany na danej prostej od danego punktu w danym kierunku.

Załóżmy, że odcinek AB (fig. 23) należy odciąć na prostej a od punktu C w kierunku, wskazanym strzałką. Wykreślamy w tym celu odcinek CD, równy odcinkowi AB i doń rownoległy (zag. 3) i następnie kreślimy na prostej a w danym kierunku odcinek CE, równy CD (zag. 4), (35 wykr. elem.).

Dowiedliśmy tym sposobem to, do czego zmierzaliśmy, mianowicie, że przez kreślenie prostych i dzielenie kątów na dwie części równe można przenosić odcinki dowolne. Wiadomo nam jest, jak można, odwrotnie, podzielić na dwie części równe kąt dowolnie dany przez kreślenie prostych i przenoszenie odcinków. Dwie te konstrukcye: przenoszenie odcinków i dzielenie kątów na dwie części równe są więc pod pewnym względem równoważne: wszystkie konstrukcye, jakie mogą być wykonane przy użyciu jednego z tych wykreśleń elementarnych (naturalnie, obok kreślenia prostych), są także wykonywalne przy użyciu drugiego. Wszystko, co w § 1 powiedziano o możliwości (odp. niemożliwości) rozwiązania zadania konstrukcyjnego przez kreślenie prostych i przenoszenie odcinków, stosuje się zarówno i do tego przypadku, gdy zamiast możliwości przenoszenia odcinków założymy możliwość dzielenia kątów na dwie części równe; wszystkie zagadnienia, które rozwiązane zostały w § 2 i § 3, dają się też rozwiązać przez dzielenie kątów na dwie części równe; te zaś, które się tam okazały nierozwiązalnemi, nie mogą też być rozwiązane przez rzeczone dzielenie kątów.

ROZDZIAŁ II.

Konstrukcye z zastosowaniem dzielenia kątów na trzy równe części.

§ 1. *Konstrukcye zasadnicze, wykonane przez kreślenie prostych i dzielenie kątów na trzy równe części.*

Jeżeli zestawimy dwie dziedziny zagadnień: 1) rozwiązywalnych za pomocą kreślenia prostych i dzielenia kątów na trzy równe części, oraz 2) rozwiązywalnych przy użyciu wykreśleń elementarnych poprzedniego rozdziału, to okaże się, że żadna z nich nie stanowi odłamu drugiej, lecz obie posiadają część wspólną. W artykule niniejszym zajmiemy się właśnie zagadnieniami tej części wspólnej. Że rzeczywiście żadna z dwóch wymienionych dziedzin zagadnień nie stanowi odłamu drugiej, jest rzeczą widoczną, gdyż z jednej strony niemożliwość podzielenia kąta na trzy równe części przy użyciu liniału i cyrkla jest faktem dobrze znanym [1]), a zadania poprzedniego rozdziału stanowią wszak część zadań, rozwiązywalnych przy użyciu liniału i cyrkla; z drugiej strony przez trysekcyę kątów nie można osiągnąć podzielenia dowolnie danego kąta na dwie części równe, albowiem dzielenie kąta na dwie części równe jest analitycznie równoważne rozwiązaniu równania kwadratowego, dzielenie zaś kąta na trzy równe części, jest, jak zobaczymy w artykule następującym, równoważne wykreśleniu pierwiastka nieprzywiedlnego równania 3-go stopnia, a równanie kwadratowe nie może stać się przywiedlnem przez dołączenie pierwiastka nieprzywiedlnego równania 3-go stopnia [2]).

Uważamy zatem teraz za wykreślenia elementarne: kreślenie prostej i trysekcyę dowolnego kąta. W szczególności, zakładamy, że możemy również kąt półpełny rozdzielić na trzy części równe.

---

[1]) Patrz np. F. Klein: „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie". Lipsk 1895, str. 12.

[2]) Por. H. Weber: „Lehrbuch der Algebra", t. I, wyd. 2. Brunświk 1898, § 164, str. 558.

t. j. że przy danej prostej w danym punkcie możemy jednem wykreśleniem elementarnem wyznaczyć kąty 60^0 i 120^0. Przez rozumowanie, zupełnie analogiczne do tego, jakie przeprowadziliśmy w § 4 poprzedniego rozdziału, stwierdzić możemy, że założenie to wcale nie ogranicza ogólności naszych badań, wykazać bowiem można, że umiejąc dzielić na trzy równe części kąty ukośne, możemy tem samem wykonać trysekcyę kąta półpełnego.

1. Podwoić dany odcinek AB (fig. 24).

Kreślimy przy A kąt $BAC = 60^0$ i wykonywamy całkowitą trysekcyę kąta półpełnego z wierzchołkiem B; niech będzie: $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBF = 60^0$. Niech punkt przecięcia prostych AC i BD będzie G; kreślimy przy BG w punkcie G kąt 60^0, którego drugie ramię przetnie prostą BE w punkcie H. Wreszcie kreślimy przy BH w punkcie H kąt 60^0, którego drugie ramię przetnie prostą AF w punkcie I, wówczas jest $BI = AB$ (4 wykr. elem.).

2. Podzielić odcinek AB na dwie części równe (fig. 25).

Z obydwóch stron prostej AB kreślimy przy niej w A i w B kąty, równe 60^0; otrzymane tym sposobem punkty przecięcia C i D łączymy prostą; ta ostatnia przetnie odcinek AB w jego środku E; zarazem CD będzie prostopadła do AB, przytem $CE = ED$ (5 wykr. elem.).

3. Poprowadzić równoległą do danej prostej a przez dany punkt A (fig. 21).

Na zasadzie zag. 1 niniejszego artykułu zadanie to rozwiązuje się podobnie, jak zadanie 2 § 4 poprzedniego rozdziału; wystarcza wszakże teraz 10 wykreśleń elementarnych. Jeżeli na prostej, do której chcemy kreślić równoległą, mamy skądinąd dwa przyległe odcinki równej długości, to konstrukcya wymaga tylko 6 wykreśleń elementarnych.

4. Wykreślić prostopadłą do prostej a w danym na niej punkcie A (fig. 26).

Przez trysekcyę kąta półpełnego przy prostej a z wierzchołkiem A otrzymamy: $\angle(a, AB) = \angle BAC = 60^0$; podobnież otrzymamy: $\angle ADE = \angle EDF = \angle FDB = 60^0$. Niech proste AC i DE przecinają się w punkcie G; wykreślmy wtedy przy prostej DE

w punkcie G kąt 60^0; którego drugie ramię spotka prostą DF w punkcie H; jeżeli teraz połączymy H z A, to AH będzie prostopadłą żądaną; przytem jest $AI = IH$ (4 wykr. elem.).

5. Z punktu A spuścić prostopadłą na prostą a (fig. 27).

Wykreślamy najprzód prostopadłą do a w jakimkolwiek jej punkcie B (4 wykr. elem.), wtedy będzie zarazem $BC = CD$. Przez punkt A kreślimy następnie równoległą do BD, jak pokazuje figura (według zag. 3); potrzeba do tego w tym razie 6 wykreśleń elementarnych, tak że cała konstrukcya wymaga dziesięciu wykreśleń elementarnych. Jeżeli punkt przecięcia prostych AD i a nie jest zbyt oddalony, to wygodnie jest obrać go za punkt E, który w ogóle jest zupełnie dowolny; wtedy oszczędzamy jedno wykreślenie elementarne, gdyż prosta BE zlewa się wówczas z daną prostą a. Zresztą jest rzeczą widoczną, że przy kreśleniu prostopadłej BD można zawsze postarać się, aby punkt D wypadł dość blizko prostej a, albo dość daleko od niej, ażeby można było punkt E obrać na prostej a.

6. Przy danej prostej a w punkcie D wykreślić kąt, równy kątowi danemu ABC (fig. 28).

Kreślimy, jak wskazuje figura, kąt $CBF = 60^0$, oraz kąt $CBG = \frac{1}{3} \angle CBF = 20^0$. Podobnież kreślimy kąt $MDH = 60^0$ i kąt $MDI = 20^0$. Uważamy następnie pęk promieni $D\,(HIM)$ jako rzutowo pokrewny z pękiem $B\,(FGC)$ tak, aby promieniom BF, BG, BC pęku B odpowiadały promienie DH, DI, DM pęku D. Przez konstrukcye liniowe wyznaczamy w pęku D promień DK, odpowiadający promieniowi BA pęku B, wtedy otrzymujemy żądany kąt KDM.

Innych konstrukcyj rozpatrywać nie będziemy, lecz przejdziemy do pewnego zastosowania trysekcyi kątów.

§ 2. *Rozwiązanie graficzne równań trzeciego stopnia o wyróżniku dodatnim.*

W artykule niniejszym chcemy wykazać, jak można wykreślić pierwiastki równania stopnia 3-go o wyróżniku dodatnim, jeżeli za dostępne dla nas wykreślenia elementarne uważać będziemy kreślenie prostych oraz dzielenie kątów na dwie i na trzy części równe. Wyjaśni się zarazem samo przez się, dlaczego tylko równania o wyróżniku dodatnim tą drogą rozwiązane być mogą.

Za punkt wyjścia posłuży nam wzór goniometryczny:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg}^3 \varphi}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi} .$$

Jeżeli 3φ będzie kątem danym a ($a < 180^0$), to przez trysekcyę znajdziemy jedno rozwiązanie równania (1), mianowicie:

$$\varphi = \frac{1}{3} a = \varphi_1 ,$$

tak, że związek:

$$\text{(2)} \qquad \frac{3 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg}^3 \varphi}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \operatorname{tg} a$$

dla $\varphi = \varphi_1$ spełniony będzie tożsamościowo. Dodając do kąta φ_1 kąt 60^0, otrzymamy kąt $\varphi_1 + 60^0 = \varphi_2$, również czyniący zadość równaniu (2), albowiem mamy:

$$\frac{3 \operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg}^3 \varphi_2}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_2} = \operatorname{tg} 3\varphi_2 = \operatorname{tg}(3\varphi_1 + 180^0) = \operatorname{tg} 3\varphi_1 = \operatorname{tg} a .$$

Trzeciem rozwiązaniem równania (2) jest kąt $\varphi_3 = \varphi_2 + 60^0 = \varphi_1 + 120^0$. Oprócz rozwiązań $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nie posiada równanie (2) żadnego innego (w przedziale od 0^0 do 180^0).

Podamy teraz interpretacyę geometryczną równania (2) oraz jego rozwiązań, następnie wyrazimy je algebraicznie.

Przyjęliśmy kąt a, jako mniejszy od 180^0. Załóżmy najprzód, że jest on mniejszy od 90^0. Wykreślmy jakikolwiek trójkąt prostokątny ABC (fig. 29) z kątem ostrym ACB, równym a. Oznaczmy: $AB = a$, $AC = b$, wtedy będzie: $\operatorname{tg} a = \frac{a}{b}$. Niech następnie będzie:

$$\angle ACD = \frac{1}{3} \angle ACB = \frac{1}{3} a ,$$

będziemy wówczas mieli: $\angle ACD = \varphi_1$. Oznaczmy AD przez z_1, tak że $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{z_1}{b}$. Z obydwóch stron prostej CD wykreślmy teraz przy punkcie C kąt 60^0: $\angle DCE = \angle DCF = 60^0$, wtedy punkty E i F wypaść muszą z różnych stron względem punktu D, albowiem kąt ACE jest z pewnością ostry, gdyż mamy:

$$\angle ACB < 90^0, \quad \angle ACD < 30^0, \quad \angle ACE = 60^0 + \angle ACD < 90^0 .$$

Z łatwością znajdziemy:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\angle ACE = \frac{\overline{AE}}{b},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \operatorname{tg}(\angle ACD + 120^0) = \operatorname{tg}(180^0 - \angle ACF) = -\operatorname{tg}\angle ACF = \frac{-\overline{AF}}{b}$$

Oznaczmy: $\overline{AE} = z_2$, $-\overline{AF} = z_3$. Spostrzegamy, że z wielkości z_1, z_2, z_3 każda jest dodatnią lub ujemną stosownie do tego, czy oznaczony przez nią odcinek, poczynając od punktu A, jest tak samo skierowany jak odcinek AB, czy też wprost przeciwnie. Mamy zatem: $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{z_2}{b}$, $\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{z_3}{b}$. Dla kąta ogólnego φ wprowadźmy oznaczenie: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{b}$. Kładąc w równaniu (2) zamiast $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\varphi$ ich wartości, nadamy równaniu temu postać następującą:

$$z^3 - 3\,az^2 - 3\,b^2z + ab^2 = 0 . \tag{3}$$

Równaniu (3) czynią zadość, jak z poprzedniego rozważania wynika, wielkości z_1, z_2, z_3. Chcąc odwrotnie wykreślić pierwiastki równania (3), musimy zbudować trójkąt prostokątny ABC o bokach a i b i wykonać konstrukcye, wskazane na figurze 29; otrzymamy wtedy pierwiastki z_1, z_2, z_3 co do wielkości bezwzględnej i znaków.

Założyliśmy powyżej, że kąt α mniejszy jest od 90^0. Gdybyśmy obrali $\alpha > 90^0$, to wykreślilibyśmy trójkąt prostokątny ABC (fig. 29), w którym $\angle ACB = 180^0 - \alpha$, tak że kąt ACG byłby równy a. Mielibyśmy: $\operatorname{tg} a = -\frac{a}{b}$; kątem φ_1 byłby teraz $\angle ACF$, a więc:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\overline{AF}}{b}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{-\overline{AE}}{b}, \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{-\overline{AD}}{b}.$$

Różnica cała polegałaby na tem, że wszystkie odcinki, wykreślone na AB, byłyby mierzone w kierunku odwrotnym; chcąc zachować poprzedni kierunek dodatni, musielibyśmy w równaniu (3) podstawić $-a$ i $-z$ zamiast a i z, lecz podstawienie to pozostawia równanie (3) bez zmiany; założenie zatem $a < 90^0$ nie daje nic nowego.

Jeżeli równanie stopnia 3-go dowolnie dane pragniemy rozwiązać geometrycznie, to musimy je przez stosowne przekształcenie sprowadzić do kształtu (3), ze spółczynników przekształconego równania wyznaczyć wielkości a i b i wykonać konstrukcyę figury 29; z otrzymanych tą drogą trzech odcinków z_1, z_2, z_3 wykreślimy pierwiastki równania danego na zasadzie wzoru przekształcenia. Ażeby wzór ten mógł być przy konstrukcyi zastosowany, musi on być rzeczywisty; trzy rzeczywiste wielkości z_1, z_2, z_3 dadzą nam trzy pierwiastki rzeczywiste równania danego; wskutek tego niezbędnem jest, aby wyróżnik danego równania był dodatni; że ten warunek jest zarazem dostateczny, t. j. że każde równanie 3-go stopnia o wyróżniku dodatnim daje się podaną metodą geometrycznie rozwiązać, dowiedziemy w ten sposób, że istotnie przeprowadzimy całkowite rozwiązanie takiego równania ogólnego.

Ogólne równanie stopnia 3-go piszemy w postaci:

$$(4) \qquad x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0.$$

Wyróżnik D tego równania jest:

$$(5) \qquad D = 27\,(3p^2q^2 + 6pqr - 4q^3 - 4p^3r - r^2)$$

co też napisać możemy:

$$(5') \qquad \frac{1}{27} D = 4\,(p^2 - q)^3 - (3pq - 2p^3 - r)^2.$$

Zakładamy, że wyróżnik D jest dodatni, t. j.:

$$(6) \qquad 4(p^2 - q)^3 > (3pq - 2p^3 - r)^2 .$$

Po przekształceniu, które poniżej omówimy, niech równanie (4) przyjmie kształt następujący:

$$(7) \qquad y^3 + 3p'y^2 + 3q'y + r' = 0 .$$

Ażeby równanie (7) miało też postać co równanie (3), powinno możliwem być takie wyznaczenie liczb a i b, by zachodziły związki następujące:

$$(8) \qquad p' = -a , \quad q' = -b^2 , \quad r' = ab^2 .$$

Z dwóch pierwszych warunków wynika, że być musi:

$$(9) \qquad p' < 0 \quad , \quad q' < 0 ,$$

wtedy można a i b wyznaczyć z wzorów:

$$(10) \qquad a = -p' \quad , \quad b = \sqrt{-q'} ;$$

podstawiając wyrażenia (10) w ostatnie równanie (8), otrzymujemy następujące równanie warunkowe:

$$(11) \qquad p'q' = r' .$$

Spróbujmy zadość uczynić warunkom (9) i (11) przez przekształcenie całkowite liniowe:

$$(12) \qquad x = my + n .$$

Jeżeli równanie (4) sprowadzimy do postaci (7) przez przekształcenie (12), to spółczynniki p', q', r' mieć będą wyrażenia następujące:

$$(13) \qquad \begin{cases} p' = \dfrac{1}{m}(n + p) \\[2ex] q' = \dfrac{1}{m^2}(n^2 + 2pn + q) \\[2ex] r' = \dfrac{1}{m^3}(n^3 + 3pn^2 + 3qn + r) . \end{cases}$$

Najprzód postarajmy się spełnić warunek (11); warunek ten okazuje się od m niezależnym, dla wyznaczenia zaś spółczynnika n daje równanie:

$$(n+p)(n^2+2pn+q)=n^3+3pn^2+3qn+r,$$

z którego otrzymujemy:

$$n=\frac{r-pq}{2(p^2-q)}. \tag{14}$$

Licznik tego wyrażenia uważać możemy za różny od zera, gdyby bowiem było $r=pq$, to warunek (11) byłby już w samem równaniu (4) spełniony; byłoby wówczas $n=0$. Mianownik wyrażenia (14) jest różny od zera, a to na zasadzie związku (6). Wyrażenie (14) daje zatem na n wartość oznaczoną skończoną; podstawiając je w równania (13), otrzymamy następujące wzory na spółczynniki p', q':

$$\left\{\begin{aligned} p' &= \frac{r+2p^3-3pq}{2(p^2-q)m} \\ q' &= -\frac{D}{108(p^2-q)^2m^2} \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Widzimy stąd najprzód, że q' jest zawsze ujemne, niezależnie od m, tak że drugi warunek (9) spełniony jest sam przez się; aby i pierwszy warunek (9) spełnić, bierzemy $m=+1$, jeżeli $r+2p^3-3pq<0$, zaś $m=-1$, jeżeli jest $r+2p^3-3pq>0$ (mnożnik p^2-q w mianowniku wyrażenia na p' jest, jak wiadomo, dodatni).

Streszczając całe poprzednie rozumowanie, otrzymujemy rezultat poniższy.

Pragnąc rozwiązać geometrycznie równanie (4), przekształcamy je na zasadzie wzoru:

$$x=y+\frac{r-pq}{2(p^2-q)}, \tag{16}$$

albo wzoru:

(17) $$x = -y + \frac{r - pq}{2(p^2 - q)},$$

stosownie do tego, czy jest:

(18) $$r + 2p^3 - 3pq < 0,$$

czy też:

(19) $$r + 2p^3 - 3pq > 0.$$

Wtedy równanie (4) przechodzi na równanie (7) ze spółczynnikami:

(20) $$\begin{cases} p' = -\dfrac{|r+2p^3-3pq|}{2(p^2-q)} \\ q' = -\dfrac{D}{108(p^2-q)^2}, \\ r' = p'q' \end{cases}$$

gdzie D oznacza wyrażenie (5). Na zasadzie wzorów (10) i (20) wyznaczamy tedy a i b:

(21) $$\begin{cases} a = \dfrac{|r + 2p^3 - 3pq|}{2(p^2 - q)}, \\ b = \dfrac{\sqrt{3D}}{18(p^2 - q)}. \end{cases}$$

Wyznaczywszy odcinki a i b, kreślimy figurę 29, z której otrzymamy 3 odcinki z odnośnemi znakami: z_1, z_2, z_3; każdy z tych odcinków podstawiamy kolejno zamiast y we wzór (16) albo (17), zależnie od tego, który z nich był stosowany, i tym sposobem wykreślamy wszystkie trzy pierwiastki x równania (4).

Pozostaje jeszcze uczynić jedną uwagę uzupełniającą. Rozpatrując dwie alternatywy (18) i (19), uczyniliśmy milcząco założenie, że wyrażenie $r + 2p^3 - 3pq$ jest od zera różne; jeżeli wszakże będzie $r = 3\,pq - 2\,p^3$, to napiszemy stronę lewą równania (4) w postaci następującej:

$$x^3 + 3\,px^2 + 3\,qx + 3\,pq - 2\,p^3 = (x+p)^3 - 3\,p^2x - 3\,p^3 + 3\,qx + 3\,pq$$
$$= (x+p)^3 - 3\,(x+p)\,(p^2-q) = (x+p)\,[(x+p)^2 - 3\,(p^2-q)]\,,$$

skąd widzimy, że w tym razie równanie (4) rozwiązuje się bezpośrednio, gdyż rozpada się na równanie liniowe $x + p = 0$ i na równanie kwadratowe $(x+p)^2 - 3\,(p^2 - q) = 0$.

Rozwiniętą w artykule niniejszym teoryę zastosujemy teraz do wykreślenia niektórych wielokątów foremnych, nie dających się wykreślić przy pomocy liniału i cyrkla.

§ 3. *Wykreślenie siedmiokąta foremnego.*

Wyrazimy nasze zadanie algebraicznie i tak też je rozwiązywać będziemy, przyczem rozważaniom naszym damy kierunek taki, aby w rezultacie otrzymać rozwiązanie, któreby można było wykreślić przy użyciu środków, stosowanych w artykule poprzednim.

Uważajmy płaszczyznę za obraz obszaru liczb zespolonych $x + iy$. Środek siedmiokąta foremnego niech będzie w punkcie zero; jeden z wierzchołków obierzmy na osi liczb rzeczywistych, np. w punkcie 1, wówczas 6 wierzchołków pozostałych będą w punktach $e^{\frac{2k\pi i}{7}}$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Równanie, które wyznacza te 6 liczb, brzmi:

$$(22) \qquad \frac{x^7 - 1}{x - 1} = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0\,;$$

to t. zw. r ó w n a n i e p o d z i a ł u k o ł a jest równaniem abelowem nieprzywiedlnem; jeżeli jeden jego pierwiastek oznaczymy przez r, to wszystkie jego pierwiastki będą:

$$(23) \qquad r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ r^5,\ r^6\,.$$

Zadanie nasze pojmujemy teraz tak, że chcemy na r znaleść wyrażenie takie, aby jego część składowa rzeczywista i urojona mogły być wykreślone. Istotnie, skoro to nam się uda, to będziemy mogli znaleść punkt, będący obrazem liczby r; będzie to jeden wierzchołek siedmiokąta, różny od z góry obranego wierzchołka 1; wykreślenie pozostałych wierzchołków nie przedstawi wówczas trudności.

Zgodnie z ogólną teoryą Gaussa [1]) tworzymy następującą tablicę skaźników, obierając za podstawę liczbę 3, jako pierwiastek pierwotny liczby 7:

Ind. 0	1	2	3	4	5
Num. 1	3	2	6	4	5

Pierwiastki (23) grupujemy tak, aby ich wykładniki następowały w porządku liczb powyższej tablicy, a mianowicie:

$$\begin{array}{ccc} r\ , & r^3\ , & r^2 \\ r^6\ , & r^4\ , & r^5 \end{array}$$

i tworzymy następujące trzy peryody:

$$\eta_0 = r + r^6$$
$$\eta_1 = r^3 + r^4$$
$$\eta_2 = r^2 + r^5\,.$$

Aby wyznaczyć te peryody, spostrzegamy, że:

$$r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 = -1;\ r^7 = 1$$

i znajdujemy:

$$\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 = -1\,,$$
$$\eta_0\eta_1 + \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_0 = -2\,,$$

[1]) Gauss: „Disquisitiones arithmeticae“, sectio VII. **Obszerny i jasny wykład ogólnej teoryi Gaussa daje Bachmann w swem dziele: „Die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie“. Lipsk 1872.**

$$\eta_0\eta_1\eta_2 = 1,$$

tak że η_0, η_1, η_2 są pierwiastkami równania:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0. \tag{24}$$

Według metody, rozwiniętej w poprzednim artykule, możemy wykreślić pierwiastki tego równania. Mamy tym razem:

$$p = \frac{1}{3}, \quad q = -\frac{2}{3}, \quad r = -1,$$

Ponieważ zaś jest:

$$r + 2p^3 - 3pq = -\frac{7}{27},$$

to zachodzi związek (18), stosujemy przeto przekształcenie (16):

$$x = y - \frac{1}{2}. \tag{25}$$

Na zasadzie wzorów (21) otrzymamy: ($D = 49$)

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Wykreśliwszy te odcinki a i b, kreślimy figurę 29 i otrzymujemy trzy odcinki: z_1, z_2, z_3, z których ostatni bierzemy ujemnie; ze wzoru przekształcenia (25) wnioskujemy tedy, że równanie (24) posiada następujące pierwiastki: $z_1 - \frac{1}{2}, z_2 - \frac{1}{2}, z_3 - \frac{1}{2}$.

Strona lewa równania (24) posiada jednę przemianę znaku, wskutek tego jeden jego pierwiastek jest dodatni, dwa zaś ujemne; oznaczmy pierwiastek dodatni przez x_1, a ujemne — przez $-x_2$ i $-x_3$, wtedy x_1, x_2, x_3 są odcinki dodatnie, otrzymane z wykreślenia. Który z peryodów η_0, η_1, η_2 przedstawiony jest przez tę lub ową z wielkości $x_1, -x_2, -x_3$, zależy od tego, który pierwiastek równania (22) oznaczony został przez r. Dla usunięcia tej nieoznaczoności obierzmy z sześciu dowolnych wartości na $r: e^{\frac{2k\pi i}{7}}$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ jednę, a mianowicie: $r = e^{\frac{2\pi i}{7}}$, wówczas będzie:

$$\eta_0 = 2\cos\frac{2\pi}{7}, \eta_1 = 2\cos\frac{6\pi}{7}, \eta_2 = 2\cos\frac{4\pi}{7},$$

a więc η_0 jest pierwiastkiem dodatnim x_1, zaś η_1 i η_2 są ujemne; niech będzie: $\eta_2 = -x_2, \eta_1 = -x_3$, wtedy odcinek x_2 jest oczywiście mniejszy od odcinka x_3.

Otrzymaliśmy więc drogą wykreślenia wielkości η_0, η_1, η_2, jako pierwiastki równania (24). Gdybyśmy dalej chcieli kierować się metodą Gaussa, to musielibyśmy wyznaczyć r z równań następujących:

$$r + r^6 = x_1 \quad , \quad rr^6 = 1,$$

skąd otrzymalibyśmy:

$$r = \frac{x_1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{4 - x_1^2}.$$

Lecz odcinek $\frac{1}{2}\sqrt{4-x_1^2}$ nie może być wykreślony bez użycia cyrkla, musimy przeto użyć dalej innej metody.

Tworzymy t. zw. sumę Gaussa [1]):

$$(26) \qquad r + r^4 + r^2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{7}.$$

Wyrażenie (26) określa ciało liczbowe stopnia drugiego $(\sqrt{-7})$, ponieważ wszakże wyrażenie to jest funkcyą wymierną liczby r, to ciało liczbowe $(\sqrt{-7})$ jest dzielnikiem ciała liczbowego (r), okre-

[1]) Wzór (26) może też być otrzymany ze związków następujących:

$$(r + r^2 + r^4) + (r^3 + r^5 + r^6) = -1$$

$$(r + r^2 + r^4) \times (r^3 + r^5 + r^6) = 2.$$

ślonego przez równanie abelowe (22). Z drugiej zaś strony określa równanie abelowe (24) ciało liczbowe stopnia trzeciego (x), które również jest dzielnikiem ciała (r), gdyż pierwiastki równania (24) wyrażają się wymiernie przez r, jak wskazują wzory następujące:

$$(27)\qquad \begin{cases} r + r^6 = x_1 \\ r^2 + r^5 = -x_2 \, . \\ r^3 + r^4 = -x_3 \end{cases}$$

Z połączenia ciał $(\sqrt{-7})$ i (x) powstaje ciało stopnia szóstego, które jest podzielne przez ciało $(\sqrt{-7})$ i przez ciało (x), i które zarazem jest dzielnikiem ciała (r); ponieważ zaś jest ono tego samego stopnia, co ciało (r), to jest ono z nim identyczne [1]), r musi przeto dać się utworzyć z $\sqrt{-7}$ i z pierwiastków równania (24) przez cztery działania arytmetyczne, t. j., jeżeli oznaczymy:

$$r + r^4 + r^2 = \lambda \, , \ r + r^6 = \mu \, , \ r^2 + r^5 = \nu \, ,$$

a więc:

$$r^3 + r^5 + r^6 = -1 - \lambda \, , \ r^3 + r^4 + r^6 = -1 - \mu - \nu \, ,$$

to musi istnieć tożsamość kształtu:

$$r = R(\lambda, \mu, \nu) \, ,$$

gdzie R jest znakiem funkcyi wymiernej. Musimy teraz znaleść wyrażenie analityczne tej funkcyi.

Spostrzegamy przedewszystkiem, że pomiędzy λ, μ, ν zachodzą związki następujące:

$$(28)\quad \lambda^2 = -2 - \lambda \, , \ \mu^2 = 2 + \nu \, , \ \nu^2 = 1 - \mu - \nu \, , \ \mu\nu = -1 - \nu \, ,$$

wskutek czego funkcya R musi mieć postać następującą:

---

[1]) Patrz H. Weber: „Lehrbuch der Algebra", t. I, wyd. 2. Brunświk 1898, str. 505, twierdzenie 5-te.

$$R(\lambda, \mu, \nu) = \frac{L_1(\mu, \nu) + \lambda L_2(\mu, \nu)}{L_3(\mu, \nu) + \lambda L_4(\mu, \nu)},$$

gdzie L_1, L_2, L_3, L_4 są funkcyami całkowitemi liniowemi ilości μ i ν. Mnożąc licznik i mianownik ostatniego wyrażenia przez

$$L_3(\mu, \nu) - (1 + \lambda) L_4(\mu, \nu),$$

sprowadzimy funkcyę R do postaci

$$R(\lambda, \mu, \nu) = \frac{L(\mu, \nu) + \lambda L'(\mu, \nu)}{L''(\mu, \nu)},$$

gdzie znowu L, L', L'' są funkcyami całkowitemi liniowemi ilości μ, ν. Ponieważ jest: $\mu = x_1$, $\nu = -x_2$, to licznik ostatniego wyrażenia jest funkcyą liniową odcinków x_1 i x_2; możemy wskutek tego założyć, że mianownik redukuje się do wartości liczebnej, i przedstawić funkcye L, L', L'' w kształcie następującym:

$$L = \alpha\mu + \beta\nu + \gamma\ , \ L' = \alpha'\mu + \beta'\nu + \gamma'\ , \ L'' = \gamma'',$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \gamma''$ są spółczynnikami niewiadomemi, których stosunki mamy wyznaczyć. Stosunki te wyznaczamy z warunku, że związek:

$$R = \frac{L + \lambda L'}{L''},$$

czyli:

$$\gamma'' r = \alpha(r + r^6) + \beta(r^2 + r^5) + \gamma$$
$$+ (r + r^2 + r^4)[\alpha'(r + r^6) + \beta'(r^2 + r^5) + \gamma']$$

ma być spełniony tożsamościowo. Porównywając spółczynniki przy jednakowych potęgach r po obydwóch stronach, otrzymamy na 6 niewiadomych stosunków 7 zależności, z których wszakże jedna okazuje się wynikiem z dwóch innych; możemy przeto wyznaczyć niewiadome stosunki w sposób zupełnie oznaczony, znajdziemy mianowicie:

$$\alpha : \beta : \gamma : \alpha' : \beta' : \gamma' : \gamma'' = 4 : -1 : 1 : 1 : -2 : 2 : 7.$$

Jeżeli zatem weźmiemy pod uwagę wzory (26) i (27), to otrzymamy tożsamość:

$$r=\frac{1}{7}(4x_1+x_2+1)+\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{7}\right)(x_1+2x_2+2),$$

czyli:

$$r=\frac{x_1}{2}+\frac{i\sqrt{7}}{7}\left(1+\frac{x_1}{2}+x_2\right). \tag{29}$$

Ponieważ x_1 i x_2 są odcinkami już wykreślonemi, to możemy z łatwością wykreślić odcinek $\frac{x_1}{2}$, oraz odcinek $\frac{\sqrt{7}}{7}\left(1+\frac{x_1}{2}+x_2\right)$, i następnie, na zasadzie wzoru (29), wyznaczyć punkt, przedstawiający liczbę r. Przez to uważać możemy nasze zadanie za rozwiązane.

Wartość (29) na r nie może, oczywiście, różnić się istotnie od poprzednio otrzymanej wartości:

$$r=\frac{x_1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{4-x_1^2},$$

t. j. musi istnieć związek tożsamościowy:

$$\frac{1}{2}\sqrt{4-x_1^2}=\frac{\sqrt{7}}{7}\left(1+\frac{x_1}{2}+x_2\right).$$

Rzeczywiście, łatwo można przekonać się, że napisana zależność jest spełniona tożsamościowo. Jakoż, podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymamy po redukcyi:

$$2x_1^2+x_2^2+x_1x_2+x_1+2x_2-6=0;$$

zważywszy zaś, że jest $x_1=\mu$, $x_2=-\nu$ i wziąwszy pod uwagę wzory (28) na μ^2, ν^2, $\mu\nu$, zobaczymy, że ostatnio napisany związek jest istotnie tożsamością.

§ 4. *Wykreślenie trzynastokąta foremnego.*

Zadanie nasze sprowadza się do wykreślenia części składowych rzeczywistej i urojonej pierwiastka nieprzywiedlnego równania stopnia 12-go:

$$(30)\qquad \frac{x^{13}-1}{x-1} = x^{12} + x^{11} + \ldots + x + 1 = 0\,.$$

Rozumujemy podobnie, jak w paragrafie poprzednim.

Liczba 2 jest pierwiastkiem pierwotnym liczby 13; obierając tę liczbę 2 za podstawę tablicy skaźników, otrzymamy:

Ind.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Num.	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7.

Pierwiastki równania (30), które przez jeden jakikolwiek z nich r wyrażają się w sposób następujący:

$$(31)\qquad r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ r^5,\ r^6,\ r^7,\ r^8,\ r^9,\ r^{10},\ r^{11},\ r^{12}\,,$$

szykujemy podług kolei, w jakiej następują liczby tablicy, a to sposobem dwojakim, mianowicie:

$$\begin{array}{cccc} r & r^2 & r^4 & r^8 \\ r^3 & r^6 & r^{12} & r^{11} \\ r^9 & r^5 & r^{10} & r^7 \end{array}$$

oraz:

$$\begin{array}{ccc} r & r^2 & r^4 \\ r^8 & r^3 & r^6 \\ r^{12} & r^{11} & r^9 \\ r^5 & r^{10} & r^7\,. \end{array}$$

Podług pierwszego ugrupowania tworzymy 4 peryody trój-wyrazowe:

$$
(32) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\varepsilon_0 &= r + r^3 + r^9 \\
\varepsilon_1 &= r^2 + r^6 + r^5 \\
\varepsilon_2 &= r^4 + r^{12} + r^{10} \\
\varepsilon_3 &= r^8 + r^{11} + r^7
\end{aligned} \right.
$$

a podług drugiego — 3 peryody czterowyrazowe:

$$
(33) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\eta_0 &= r + r^8 + r^{12} + r^5 \\
\eta_1 &= r^2 + r^3 + r^{11} + r^{10} \\
\eta_2 &= r^4 + r^6 + r^9 + r^7
\end{aligned} \right. .
$$

Z łatwością wykrywamy następujące związki, zachodzące między tymi peryodami:

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -1$$

$$\varepsilon_0\varepsilon_1 + \varepsilon_0\varepsilon_2 + \varepsilon_0\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = 2$$

$$\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_0 + \varepsilon_3\varepsilon_0\varepsilon_1 = 4$$

$$\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 3$$

$$\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 = -1 \,, \quad \eta_0\eta_1 + \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_0 = -4 \,, \quad \eta_0\eta_1\eta_2 = -1 \,,$$

tak że peryody ε są pierwiastkami równania:

$$(34) \qquad x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = 0$$

a peryody η — pierwiastkami równania:

$$(35) \qquad x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Ażeby znaleść pierwiastki równania (34), uważamy, że możemy równanie to zastąpić przez dwa równania kwadratowe. Widzimy bowiem z wzorów (32), że $\varepsilon_0 + \varepsilon_2$ i $\varepsilon_1 + \varepsilon_3$ są sumami Gaussa, których wartości są:

$$(36)\qquad \begin{cases} \varepsilon_0 + \varepsilon_2 = + \dfrac{\sqrt{13}-1}{2} \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = - \dfrac{\sqrt{13}+1}{2} \end{cases}.$$

Wyliczając następnie $\varepsilon_0\varepsilon_2$ i $\varepsilon_1\varepsilon_3$, znajdziemy przy pomocy wzorów (36):

$$(37)\qquad \varepsilon_0\varepsilon_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}, \quad \varepsilon_1\varepsilon_3 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}.$$

Na zasadzie wzorów (36) i (37) znajdujemy:

$$(38)\qquad \begin{cases} \varepsilon_0, \varepsilon_2 = + \dfrac{\sqrt{13}-1}{4} \pm \dfrac{i}{4}\sqrt{26-6\sqrt{13}} \\ \varepsilon_1, \varepsilon_3 = - \dfrac{\sqrt{13}+1}{4} \pm \dfrac{i}{4}\sqrt{26+6\sqrt{13}} \end{cases}.$$

Ażeby określić znak części urojonej w $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, musimy na r wybrać jednę oznaczoną wartość z pośród 12-tu możliwych: $e^{\frac{2k\pi i}{13}}$ $(k = 1, 2, \ldots, 12)$; niech będzie $r = e^{\frac{2\pi i}{13}}$, wtedy spółczynnik przy i w ε_0 będzie:

$$\sin\frac{2\pi}{13} + \sin\frac{6\pi}{13} - \sin\frac{5\pi}{13},$$

a więc dodatni $\left(\sin\dfrac{2\pi}{13} > 0, \ \sin\dfrac{6\pi}{13} > \sin\dfrac{5\pi}{13}\right)$; również dodatnim okaże się spółczynnik części urojonej w ε_1:

$$\sin\frac{4\pi}{13} + \sin\frac{12\pi}{13} + \sin\frac{10\pi}{13},$$

mamy przeto na zasadzie wzorów (38) następujące wzory na pierwiastki równania (34):

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= +\frac{\sqrt{13}-1}{4}+\frac{i}{4}\sqrt{26-6\sqrt{13}}\\
\varepsilon_1 &= -\frac{\sqrt{13}+1}{4}+\frac{i}{4}\sqrt{26+6\sqrt{13}}\\
\varepsilon_2 &= +\frac{\sqrt{13}-1}{4}-\frac{i}{4}\sqrt{26-6\sqrt{13}}\\
\varepsilon_3 &= -\frac{\sqrt{13}+1}{4}-\frac{i}{4}\sqrt{26+6\sqrt{13}}
\end{aligned}\right.$$

Równanie (35) rozwiązujemy graficznie metodą, wyłożoną w § 2. Strona lewa tego równania ma 2 przemiany znaków, ponieważ zaś wszystkie trzy pierwiastki tego równania są rzeczywiste, to dwa z nich są dodatnie, a jeden ujemny. Aby rozpoznać, który z pierwiastków η_0, η_1, η_2 jest ujemny, piszemy na zasadzie wzorów (33):

$$\eta_0 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}\right)$$

$$\eta_1 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}\right)$$

$$\eta_2 = 2\left(\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13}\right),$$

skąd poznajemy, że η_2 jest pierwiastkiem ujemnym. Otrzymamy tedy po rozwiązaniu równania (35):

$$(40)\qquad \eta_0 = x_1,\ \eta_1 = x_2,\ \eta_2 = -x_3,$$

gdzie x_1, x_2, x_3 są odcinki dodatnie wiadome. Pisząc η_0 i η_1 w kształcie:

$$\eta_0 = 4\cos\frac{6\pi}{13}\cos\frac{3\pi}{13},\ \eta_1 = 4\cos\frac{5\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13},$$

widzimy, że η_0 jest mniejsze od η_1, z odcinków zatem x_1 i x_2 jest x_1 mniejszy.

Z równań abelowych (34) i (35) każde określa jedno ciało liczbowe, pierwsze — stopnia 4-go, drugie — 3-go. Związki (32) i (33) wykazują, że obydwa te ciała są dzielnikami ciała (r), określonego przez równanie (30); z połączenia poprzednich dwóch ciał otrzymamy ciało stopnia 12-go, będące również dzielnikiem ciała (r); ponieważ wszakże ciało złożone i ciało (r) są tego samego stopnia, to są one identyczne; wnioskujemy stąd, że r można wyrazić wymiernie przez pierwiastki równań (34) i (35), t. j. przez wielkości (39) i (40). Zauważywszy, że:

$$\varepsilon_3 = -1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \, , \; \eta_2 = -1 - \eta_0 - \eta_1 \, ,$$

możemy napisać:

$$r = R(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_0, \eta_1) \, ,$$

gdzie R jest znakiem funkcyi wymiernej. Lecz na zasadzie wzorów (32) i (33) znajdujemy związki następujące:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0^2 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \, , \; \varepsilon_1^2 = -2 - 2\varepsilon_0 - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \, , \; \varepsilon_2^2 = -1 + \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_0\varepsilon_1 = -1 - \varepsilon_2 \, , \; \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \, , \; \varepsilon_2\varepsilon_0 = 2 - \varepsilon_0 - \varepsilon_2 \\ \eta_0^2 = 2 - \eta_1 - 2\eta_0 \, , \; \eta_1^2 = 3 + \eta_0 - \eta_1 \, , \; \eta_0\eta_1 = -1 + \eta_1 \, , \end{array} \right.$$

z których wynika, że funkcya R jest liniowo zależną od $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ oraz liniowo zależną od η_0, η_1. Możemy R sprowadzić do mianownika rzeczywistego, a ponieważ licznik jest funkcyą liniową odcinków (40), to mamy prawo założyć, że mianownik rzeczywisty jest liczbą oderwaną, t. j. że jest on funkcyą rzeczywistą całkowitą liniową wielkości (39). W mianowniku zatem liczba ε_1 figurować nie będzie, gdyż sprzężona z nią liczba ε_3 została wyrugowana, liczby zaś ε_0 i ε_2 występować będą tylko w połączeniu $\varepsilon_0 + \varepsilon_2$. Ogólny kształt funkcyi R będzie zatem następujący:

$$R = \frac{a + b\eta_0 + c\eta_1 + (d + e\eta_0 + f\eta_1)\varepsilon_0 + (g + h\eta_0 + j\eta_1)\varepsilon_1 + (k + l\eta_0 + m\eta_1)\varepsilon_2}{n + p(\varepsilon_0 + \varepsilon_2)} \, .$$

Dla wyznaczenia 13 niewiadomych stosunków między spółczynnikami $a, b, \ldots, p$ otrzymamy 13 równań, jeżeli w związku:

$$[n + p(\varepsilon_0 + \varepsilon_2)]\, r = a + b\eta_0 + c\eta_1 + (d + e\eta_0 + f\eta_1)\, \varepsilon_0 +$$
$$+ (g + h\eta_0 + j\eta_1)\, \varepsilon_1 + (k + l\eta_0 + m\eta_1)\, \varepsilon_2$$

podstawimy zamiast $\eta_0, \eta_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ ich wyrażenia przez r podług wzorów (32) i (33), następnie wykonamy mnożenia i porównamy po obydwóch stronach spółczynniki jednakowych potęg r; znajdziemy wówczas:

$$a : b : c : d : e : f : g : h : j : k : l : m : n : p =$$
$$= 10 : -1 : 5 : -9 : 2 : -3 : 5 : 2 : 0 : 5 : 5 : -3 : -13 : 13\,,$$

tak, że wzór tożsamościowy na r brzmi:

$$r = \frac{10 - x_1 + 5x_2 - (9 - 2x_1 + 3x_2)\,\varepsilon_0 + (5 + 2x_1)\,\varepsilon_1 + (5 + 5x_1 - 3x_2)\,\varepsilon_2}{-13 + 13(\varepsilon_0 + \varepsilon_2)}$$

(zamiast η_0, η_1 podstawiliśmy x_1, x_2). Podstawiając wreszcie wartości $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ podług wzorów (39), otrzymamy ostatecznie:

$$r = A + Bi\,,$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$A = \frac{\sqrt{13}+3}{8}\left[3 - x_1 + 2x_2 - \frac{\sqrt{13}}{13}(9 - 5x_1 + 6x_2)\right]$$

$$B = \frac{\sqrt{13}+3}{104}\left[(5 + 2x_1)\sqrt{26 + 6\sqrt{13}} - (14 + 3x_1)\sqrt{26 - 6\sqrt{13}}\right].$$

Zauważywszy, że:

$$\sqrt{26 \pm 6\sqrt{13}} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{13} \pm 3)^2}\,,$$

oraz że x_1 i x_2 są odcinkami już wykreślonemi, widzimy jak mogą być wykreślone odcinki A i B [1]).

---

[1]) Teoretycznie dowiedzioną jest możliwość podziału koła na p równych części (p jest liczbą pierwszą) przez dzielenie kątów na równe części, wszakże zakłada się przytem, że koło dane jest nakreślone. Por. Bachmann „Kreisteilung", str. 83.

DODATEK.

Teorya przyrządu do podziału kąta na równe części.

Pomyślmy mechanizm ruchomy $Oabp$ (fig. 30), w którym jest $Oa = Ob$, $ap = bp$. Przy wszelkiem odkształcaniu mechanizmu, punkt p zostawać będzie na dwusiecznej kąta AOB. Jeżeli dołączymy do tego układu piąty pręcik OC, który obraca się swobodnie około punktu O, i po którym punkt p posuwać się może, to przez to nie zmniejszymy stopnia swobody całego układu i przy odkształcaniu przyrządu prosta OC będzie zawsze dwusieczną kąta AOB. Przyrząd taki może przeto służyć do dzielenia kąta na dwie równe części.

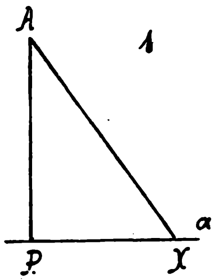
Do poprzedniego mechanizmu dołączmy teraz pręcik OD, obracający się około O (fig. 31), oraz dwa inne pręciki: cq i dq jednakowej długości, osadzone tak, że cq obracać się może około c, dq — około d, a staw q, łączący cq z dq posuwać się może po OB, przyczem $Oc = Od$. Będziemy mieli zawsze: $\angle COB = \angle BOD$. Cały układ posiada znowu jeden stopień swobody, i ponieważ zawsze jest $\angle AOC = \angle COB = \angle BOD$, to możemy ten przyrząd zastosować do podziału kąta na trzy równe części. Poprzedni przyrząd jest w tym zawarty, przeto możemy za pomocą tego ostatniego podzielić kąt na dwie równe części. Wreszcie, stosując ten przyrząd kilkakrotnie, możemy nim podzielić kąt dany na $2^m\,3^n$ równych części (m, n — liczby naturalne).

Oczywiście, na tej samej zasadzie pomyśleć możemy przyrządy coraz bardziej złożone, dla wykonywania coraz dalszych podziałów kąta. Np. figura 32 przedstawia przyrząd do podziału kąta na 7 równych części; jest w nim: $OI = OK = OL = OM$, $OR = OS = OT = OU$, $IN = NK$, $KP = PL$, $LQ = QM$, $RV = VS$, $SW = WT$, $TX = XU$; połączenia stawowe N, P, Q, V, W, X posuwać się mogą odpowiednio po pręcikach: OB, OD, OF, OC, OE, OG; za pomocą tegoż przyrządu można podzielić kąt na taką liczbę równych części, której czynniki pierwsze nie przewyższają liczby 7 [1]).

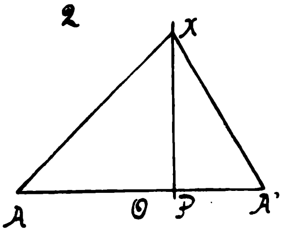
---

[1]) Kilka na innych zasadach opartych przyrządów opisane są w dziele: W. Dyck: „Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente“, Monachium 1892, str. 225 i nast., 316 i nast.

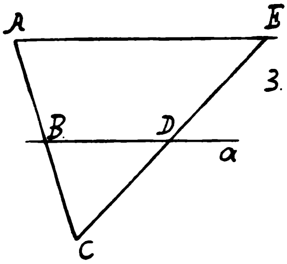
1



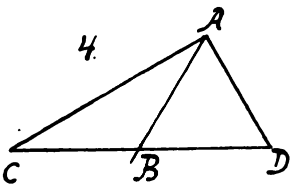
2



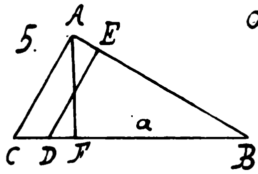
3



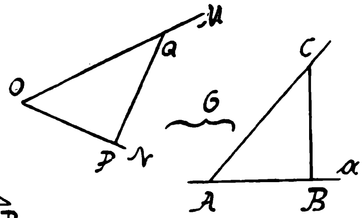
4



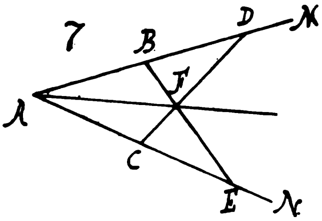
5



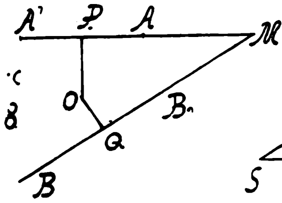
6



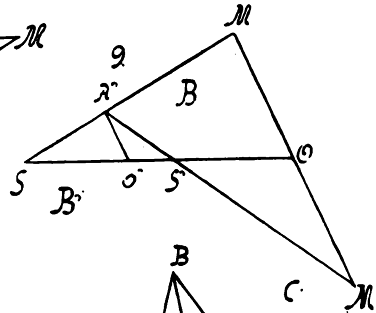
7



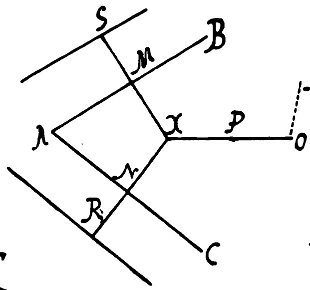
8



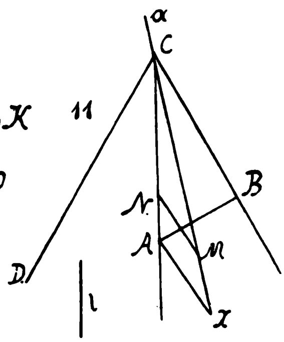
9



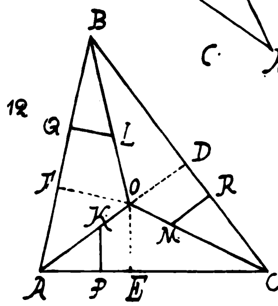
10



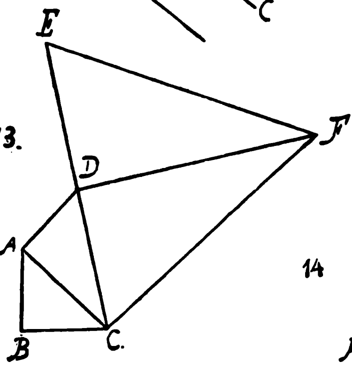
11



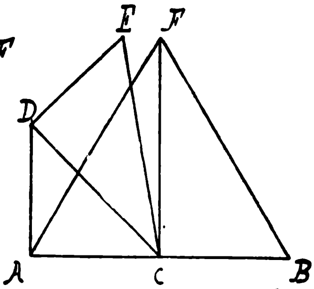
12



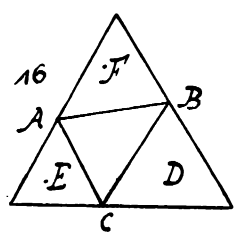
13.



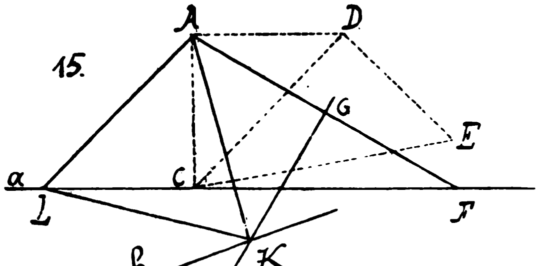
14



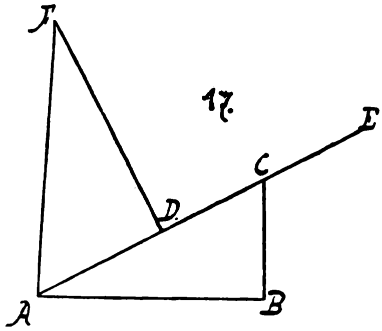
16

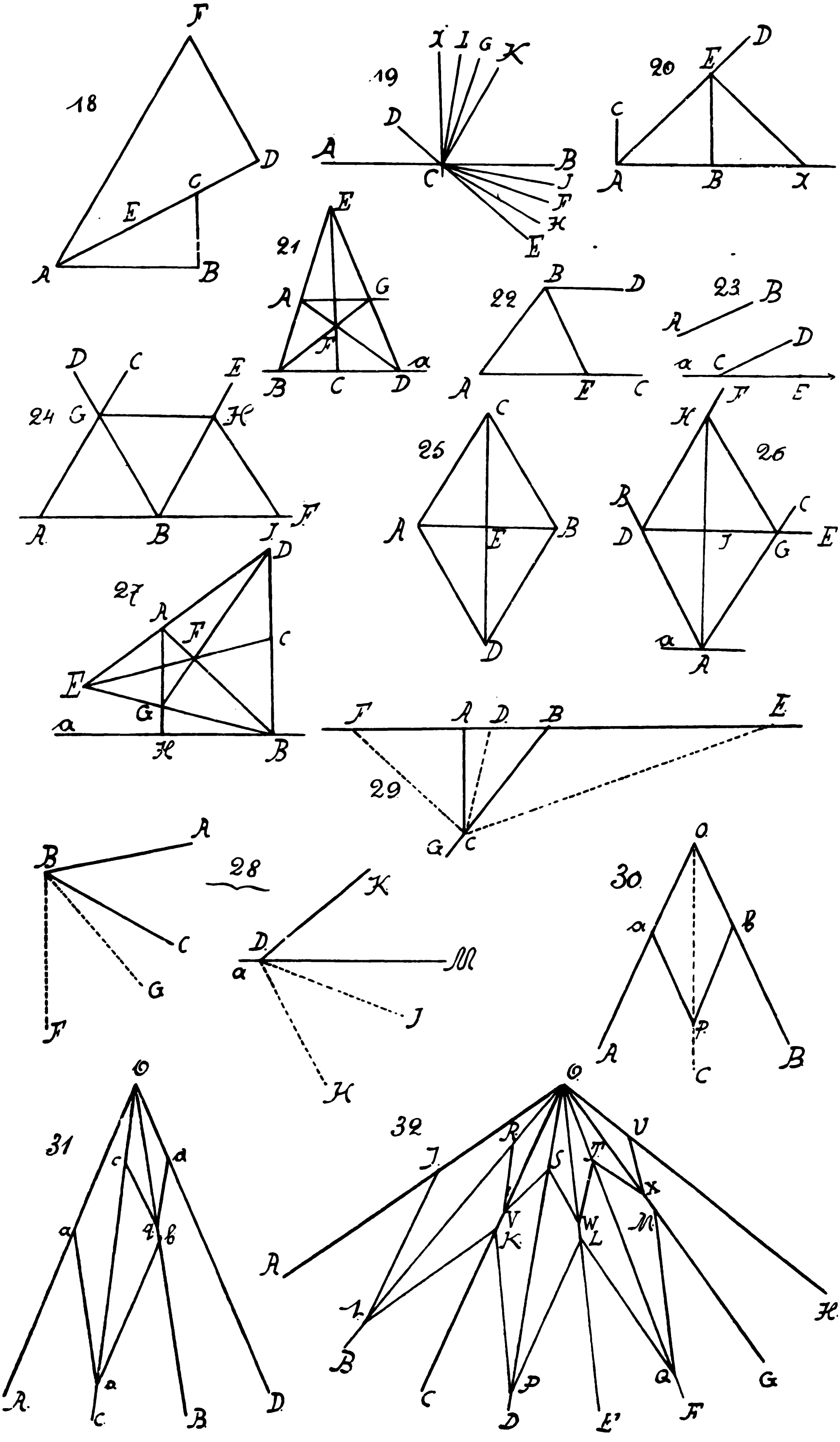


15.



17.




18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32