SYSTEMY GRUPOWE OBLICZANIA REZERWY OD UBEZPIECZEŃ NA DOŻYCIE ZE ZWROTEM PREMIJ.

Napisał

B. Danielewicz.

W jednym z poprzednich zeszytów „Wiadomości matematycznych" podałem niespotykany przezemnie w podręcznikach wzór na „System grupowy obliczania rezerwy od ubezpieczeń z terminem stałym". Obecnie czynię to samo dla ubezpieczeń na dożycie ze zwrotem premij, ponieważ odnośne wzory mało w ogóle są znane.

Niech x oznacza wiek, jaki, w chwili zawierania umowy, posiada osoba ubezpieczona w ten sposób, że jeżeli przeżyje n lat, otrzyma kapitał k; w razie zaś jej wcześniejszej śmierci, mające do tego prawo osoby otrzymają bezzwłocznie wszystkie premie brutto, jakie osoba ubezpieczona wniosła ratami rocznemi aż do chwili śmierci.

Niech następnie ${}^{n}p_x$ oznacza roczną premię netto za ubezpieczoną w powyższy sposób jednostkę kapitału, zaś q czynnik, zamieniający premię netto na brutto — tak, że osoba ubezpieczona płaci corocznie, przez lat n (ewentualnie do wcześniejszej swej śmierci) po $q \,.\, {}^{n}p_x \,.\, k$ i za to otrzyma kapitał k — jeżeli przeżyje n lat; gdyby zaś umarła wcześniej, np. po m latach ($m < n$), jej sukcesorom zostaną natychmiast po śmierci zwrócone wszystkie wniesione, w ilości $m \,.\, {}^{n}p_x \,.\, k$, premie.

Chodzi nam najprzód o rezerwę, jaką należy odłożyć na rachunek pomienionej osoby, po upływie ν lat ubezpieczeniowych.

Gdy przypuścimy, że pomieniona osoba została w ten sam sposób ubezpieczona nie na n, lecz na ν lat, wtedy roczną premią netto od jednostki kapitału za takie ubezpieczenie byłoby ${}^{\nu}p_x$, a szukaną rezerwą od jednostki ubezpieczonego kapitału na n lat, po latach ν, jak wiadomo, jest:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Rez}\,(x, \nu) = \frac{{}^{n}p_x}{{}^{\nu}p_x}\,;$$

rezerwą zaś od kapitału k jest wyrażenie:

$$(1') \qquad \frac{{}^{n}p_x}{{}^{\nu}p_x} \, . \, k \, .$$

Wzór na premię ${}^{\nu}p_x$ posiada kształt:

$$(2) \quad {}^{\nu}p_x = \frac{v_{x+\nu}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu} - q \, . \, r^{\frac{1}{2}} \, . \, (\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+\nu} - \nu \, \Sigma m_{x+\nu})} \, ,$$

gdzie wprowadzone głoski i znaczki mają zupełnie takie samo znaczenie, jak w naszych poprzednich pracach, pomieszczonych dotąd w „Wiadomościach matematycznych".

Podstawiwszy (2) w (1') otrzymujemy:

$$(a) \ \mathrm{Rez}\,(x, \nu) = {}^{n}p_x \, . \, \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu} - q r^{\frac{1}{2}} \, (\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+\nu} - \nu \, \Sigma m_{x+\nu})}{v_{x+\nu}} \, .$$

$$= {}^{n}p_x \, k \, \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} - (q \, . \, {}^{n}p_x k) \, . \, r^{\frac{1}{2}} \, . \, \frac{\Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+\nu} - \nu \, \Sigma m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}}$$

Jeżeli przez $R_{x+\nu}$ oznaczymy wartość jednostki renty dożywotniej, płatnej z góry osobie, mającej w chwili zawierania umowy lat $x + \nu$, to:

$$(b) \qquad \frac{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = \frac{\Sigma v_x}{v_{x+\nu}} - R_{x+\nu} = \frac{1}{v_{x+\nu}} \, . \, \Sigma v_x - R_{x+\nu} \, .$$

Dalej — wiadomo, że

$$\Sigma\Sigma m_x = \Sigma v_x - \frac{r-1}{r} \, \Sigma\Sigma v_x \, ,$$

$$\Sigma\Sigma m_{x+\nu} = \Sigma v_{x+\nu} - \frac{r-1}{r} \, \Sigma\Sigma v_{x+\nu} \, ,$$

skutkiem czego:

$$(c) \quad \Sigma\Sigma m_x - \Sigma\Sigma m_{x+\nu} = \Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu} - \frac{r-1}{r} \, (\Sigma\Sigma v_x - \Sigma\Sigma v_{x+\nu}) \, .$$

Gdy teraz (b) i (c) podstawimy w (a), wypada

$$(a') \quad \text{Rez}\,(x,\nu) = \frac{1}{v_{x+\nu}} \,.\, {}^n p_x k \sum v_x - {}^n p_x k R_{x+\nu} + \nu \,.\, r^{\frac{1}{2}} \,.\, \frac{\sum m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} \,.\, q\, {}^n p_x k$$

$$- q\, {}^n p_x k\, r^{\frac{1}{2}} \,.\, \left(\frac{\sum v_x - \sum v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} - \frac{r-1}{r} \,.\, \frac{\sum\sum v_x - \sum\sum v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} \right);$$

albo, uwzględniając raz jeszcze (b) oraz zauważywszy, że $\frac{\sum m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = P_{x+\nu}$ stanowi jednorazową premię netto za ubezpieczenie jednostki kapitału, płatnego na przypadek śmierci, przy końcu roku ubezpieczeniowego; zaś $\frac{\sum\sum v_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} = \overset{<}{R}_{x+\nu}$ jest wartością dożywotniej renty, rosnącej corocznie o jednostkę; gdy nadto wiek w chwili obliczania rezerwy, t. j. $x + \nu$ oznaczymy przez y, skutkiem czego $\nu = y - x$, to wyrażeniem na rezerwę przy końcu roku ubezpieczeniowego od kapitału k jest:

$$(d) \quad \text{Rez}\,(x+\nu=y) = \frac{1}{v_y} \,.\, (1 - q r^{\frac{1}{2}}) \,.\, {}^n p_x \,.\, k \sum v_x - R_y \,.\, (1 - q r^{\frac{1}{2}}) \,.\, {}^n p_x k$$

$$+ y \,.\, P_y \,.\, q\, r^{\frac{1}{2}}\, {}^n p_x k$$

$$+ \frac{1}{v_y} \,.\, \frac{q(r-1)}{r^{\frac{1}{2}}} \,.\, {}^n p_x k \,.\, \sum\sum v_x - \overset{<}{R}_y \,.\, \frac{q\,.\,(r-1)}{r^{\frac{1}{2}}} \,.\, {}^n p_x k - x \,.\, P_y \,.\, q\, r^{\frac{1}{2}} \,.\, {}^n p_x k \,.$$

W podobny sposób otrzymuje się rezerwa po $\nu - 1$ latach, t. j. gdy osoba ubezpieczona ma lat $x + (\nu - 1) = y - 1$, jest nią mianowicie:

$$(d') \quad \text{Rez}(x+\nu-1=y-1) = \frac{1}{v_{y-1}} \,.\, (1 - q r^{\frac{1}{2}}) \,.\, {}^n p_x k \sum v_x - R_{y-1} \,.\, (1 - q r^{\frac{1}{2}}) \,.\, {}^n p_x k$$

$$+ (y-1) P_{y-1} \,.\, q r^{\frac{1}{2}} \,.\, {}^n p_x k$$

$$+ \frac{1}{v_{y-1}} \,.\, \frac{q(r-1)}{r^{\frac{1}{2}}} \,.\, {}^n p_x k \,.\, \sum\sum v_x - \overset{<}{R}_{y-1} \,.\, \frac{q(r-1)}{r^{\frac{1}{2}}} \,.\, {}^n p_x k - x P_{y-1} \,.\, q r^{\frac{1}{2}} \,.\, {}^n p_x k \,.$$

Jeżeli wreszcie za rezerwę na końcu roku rachunkowego (31 grudnia) przyjmiemy średnio-arytmetyczną z rezerwy na początku i końcu roku ubezpieczeniowego, oraz gdy, dla uniknięcia czynników ujemnych, odpowiednio pozmieniamy w niektórych wyrazach znaki, to na rezerwę przy końcu roku rachunkowego, dla pojedyńczego ubezpieczenia, otrzymamy wyrażenie:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{Rez}(x + r - {}^1/_2 = y - {}^1/_2) =$$

$$= \frac{R_{y-1} + R_y}{2} \, . \, (q\, r^{\frac{1}{2}} - 1) \, . \, {}^n p_x k - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{v_{y-1}}$$

$$+ \frac{1}{v_y}\Big) \, . \, (q\, r^{\frac{1}{2}} - 1) \, . \, {}^n p_x k \, \Sigma v_x + \frac{(y-1)\, P_{y-1} + y\, P_y}{2} \, . \, q\, r^{\frac{1}{2}} \, . \, {}^n p_x k$$

$$- \frac{\overset{<}{R}_{y-1} + \overset{<}{R}_y}{2} \, . \, \frac{q\,(r-1)}{r^{\frac{1}{2}}} \, . \, {}^n p_x k + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{v_{y-1}}$$

$$+ \frac{1}{v_y}\Big) \, . \, \frac{q\,(r-1)}{r^{\frac{1}{2}}} \, . \, {}^n p_x k \, \Sigma\Sigma v_x - \frac{P_{y-1} + P_y}{2} \, . \, q\, r^{\frac{1}{2}} \, . \, x\, {}^n p_x k \, .$$

Przypuśćmy teraz, że na jednym i tym samym rachunku w księdze rezerwowej zapisujemy rówieśników, t. j. osoby urodzone w tym samym roku, bez względu na to, w jakim wieku, na jaki kapitał i z jakim terminem zawierają ubezpieczenia, wtedy na rachunku tym, oczywiście, mieć będziemy tylko osoby, posiadające ten sam wiek (y) w chwili obliczania rezerwy. Dla każdej z tych osób: kapitał k oraz wszystkie czynniki ze znaczkami x i n są inne, ale pozostają niezmienne przez cały czas trwania ubezpieczeń; mogą więc być raz na zawsze obliczone i do księgi rezerwowej wprowadzone. Czynniki zaś ze znaczkami y zmieniają się corocznie, lecz są wspólne dla wszystkich ubezpieczeń tego samego rachunku i znajdują się gotowe w t. zw. tablicach zasadniczych, jakie każde towarzystwo ubezpieczeń życiowych posiada, a przynajmniej z łatwością posiadać może.

Skutkiem tego, po zsumowaniu wzorów (3), wypisanych dla każdej osoby tego samego rachunku, otrzymujemy na wzór rezerwy dla wszystkich tych osób łącznie wyrażenie:

$$\text{(I)} \qquad \Sigma\ \text{Rez (dla } y - {}^1/_2 \text{ letnich)}$$

$$= \left\{ \frac{R_{y-1} + R_y}{2} \cdot \left(q\, r^{\frac{1}{2}} - 1\right) - \frac{\overset{<}{R}_{y-1} + \overset{<}{R}_y}{2} \cdot \frac{q\,(r-1)}{r^{\frac{1}{2}}} \right.$$

$$\left. + \frac{(y-1)\, P_{y-1} + y\, P_y}{2} \cdot q\, r^{\frac{1}{2}} \right\} . \Sigma\, {}^n p_x k - \frac{P_{y-1} + P_y}{2} \cdot q\, r^{\frac{1}{2}} \cdot \Sigma\, x\, {}^n p_x k$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}} + \frac{1}{v_y}\right) \cdot \left(q\, r^{\frac{1}{2}} - 1\right) . \sum {}^n p_x k\, \Sigma\, v_x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{v_y}\right) . \frac{q\,(r-1)}{r^{\frac{1}{2}}} . \sum {}^n p_x k\, \Sigma\Sigma\, v_x \,,$$

${}^n p_x k$ oznacza roczne premie netto, płacone przez każdą osobę ubezpieczoną, zaś $x \,.\, {}^n p_x k$; ${}^n p_x k\, \Sigma\, v_x$ i ${}^n p_x k\, \Sigma\Sigma\, v_x$ są to t. zw. l i c z b y p o m o c n i c z e, które na równi z rocznemi premiami netto, zaraz przy wpisywaniu każdego ubezpieczenia do księgi rezerwowej, muszą być obliczone i do specyalnie na ten cel przeznaczonych kolumn wprowadzone. Sumy pomienionych kolumn dadzą nam: $\Sigma\, {}^n p_x k$; $\Sigma\, x \,.\, {}^n p_x k$; $\sum {}^n p_x k\, \Sigma\, v_x$ i $\sum {}^n p_x k\, \Sigma\Sigma\, v_x$. A gdy te sumy pomnożymy przez wskazane we wzorze czynniki, które co rok się zmieniają, lecz mogą być zaczerpnięte z tablic zasadniczych, i gdy tak otrzymane iloczyny połączymy ze sobą w sposób również przez wzór (I) wskazany, to mieć będziemy rezerwę dla całej grupy osób na tym samym rachunku zapisanych, o co nam właściwie chodziło.

Rozumie się, że gdybyśmy, tam gdzie można, włączyli q pod znak sumowania, mielibyśmy opłacane premie brutto w miejscu netto, a gdybyśmy czynnik $r^{\frac{1}{2}}$ włączyli w P_y resp. w P_{y-1}, mielibyśmy jednorazowe premie netto za ubezpieczenie kapitału pośmiertnego, płatnego nie przy końcu roku ubezpieczeniowego, lecz zaraz po śmierci.

Wzór (I) przedstawia nam przypadek najogólniejszy: gdy się zwraca premia brutto zaraz po ewentualnej śmierci osoby ubezpieczonej. Gdyby premie brutto miały być zwracane dopiero przy końcu roku ubezpieczeniowego w którym śmierć zachodzi, należałoby we wzorze (I) w miejsce $r^{\frac{1}{2}}$, wchodzących do liczników, podstawić jednostkę, w miejsce zaś $r^{\frac{1}{2}}$ wchodzących do mianowników, należałoby podstawić r.

Wreszcie, gdybyśmy przy końcu roku ubezpieczeniowego zwracali nie premie brutto, tylko netto, to — oprócz poprzednich założeń — należałoby jeszcze podstawić $q = 1$, skutkiem czego otrzymalibyśmy

$$\Sigma \text{ Rez (dla } y-{}^1/_2 \text{ letnich)} = \left(\frac{(y-1)\,P_{y-1} + y\,P_y}{2} - \frac{r-1}{r} \cdot \frac{\overset{<}{R}_{y-1} + \overset{<}{R}_y}{2}\right) \Sigma$$

$$- \frac{P_{y-1} + P_y}{2}\, \Sigma\, x \,.\, {}^n p_x\, k + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}} + \frac{1}{v_y}\right) \cdot \frac{r-1}{r} \cdot \sum {}^n p_x\, k\, \Sigma \Sigma\, v_x$$

t. j. wzór, jaki wprost wypisać można z wyrażenia, podanego przez Zillmera na str. 169 (§ 94) w „Die mathematischen Rechnungen bei Lebens—und Renten —Versicherungen“ (Berlin. 1887).

Zupełnie w taki sam sposób postępując, możemy wyprowadzić wzór na rezerwę zbiorową od ubezpieczeń, zawartych za pośrednictwem premij jednorazowych.

Gdy mianowicie jednorazową premię netto za ubezpieczenie jednostki kapitału, płatnego po n latach, ze zwrotem wniesionej jednorazowo premii brutto w razie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej, oznaczymy przez ${}^n p_{x,j}$; płatnego po ν latach — przez ${}^\nu p_{x,j}$, to na rezerwę po ν latach, od kapitału k, mamy wzór:

$$\text{(4)} \qquad \text{Rez}\,(x, \nu) = \frac{{}^n p_{x,j}}{{}^\nu p_{x,j}} \,.\, k\,,$$

a po podstawieniu

$${}^\nu p_{x,j} = \frac{v_{x+\nu}}{v_x - q \,.\, r^{\frac{1}{2}}\,(\Sigma\, m_x - \Sigma\, m_{x+\nu})}\,,$$

wypada:

$$\text{Rez}\,(x, \nu) = {}^{n}p_{x,j} \,.\, \frac{v_x - q\, r^{\frac{1}{2}}\,(\Sigma\, m_x - \Sigma\, m_{x+\nu})}{v_{x+\nu}} \,.\, k$$

$$= {}^{n}p_{x,j} \,.\, \frac{v_x - q\, r^{\frac{1}{2}}\, \Sigma\, m_x + q\, r^{\frac{1}{2}}\, \Sigma\, m_{x+\nu}}{v_{x+\nu}} \,.\, k = \frac{1}{v_{x+\nu}} \,.\, v_x \,.\, {}^{n}p_{x,j}\, k$$

$$- \frac{1}{v_{x+\nu}} \,.\, q\, r^{\frac{1}{2}} \,.\, {}^{n}p_{x,j}\, k \,.\, \Sigma\, m_x + P_{x+\nu} \,.\, q\, r^{\frac{1}{2}} \,.\, {}^{n}p_{x,j}\, k \,.$$

Albo, po podstawieniu $x + \nu = y$,

$$(e) \quad \text{Rez}\,(x + \nu = y) = \frac{1}{v_y} \,.\, v_x \,.\, {}^{n}p_{x,j} \,.\, k - \frac{1}{v_y} \,.\, q\, r^{\frac{1}{2}} \,.\, {}^{n}p_{x,j}\, k\, \Sigma\, m_x$$

$$+ P_y \,.\, q\, r^{\frac{1}{2}} \,.\, {}^{n}p_{x,j}\, k \,.$$

Podobnie

$$(e') \quad \text{Rez}\,(x + \nu - 1 = y - 1) = \frac{1}{v_{y-1}} \,.\, v_x \,.\, {}^{n}p_{x,j} \,.\, k$$

$$- \frac{1}{v_{y-1}} \,.\, q\, r^{\frac{1}{2}} \,.\, {}^{n}p_{x,j}\, k\, \Sigma\, m_x + P_{y-1} \,.\, q\, r^{\frac{1}{2}} \,.\, {}^{n}p_{x,j}\, k \,.$$

Jeżeli więc za rezerwę na końcu roku rachunkowego przyjmiemy średnio-arytmetyczną z (e) i (e'), otrzymamy:

$$(3') \quad \text{Rez (dla } y - {}^{1}\!/_{2} \text{ letniej osoby)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}} + \frac{1}{v_y}\right) \,.\, v_x \,.\, {}^{n}p_{x,j}\, k$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}} + \frac{1}{v_y}\right) \,.\, q\, r^{\frac{1}{2}} \,.\, {}^{n}p_{x,j}\, k\, \Sigma\, m_x + \frac{P_{y-1} + P_y}{2} \,.\, q\, r^{\frac{1}{2}} \,.\, {}^{n}p_{x,j}\, k \,.$$

Na rezerwę całego konta osób równego wieku w chwili obliczania rezerwy wypada wzór:

$$(\text{I}') \quad \Sigma\, \text{Rez (dla } y - {}^{1}\!/_{2} \text{ letnich)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}} + \frac{1}{v_y}\right) \,.\, \Sigma\, v_x \,.\, {}^{n}p_{x,j}\, k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{v_y}\right) \,.\, q\, r^{\frac{1}{2}} \,.\, \sum {}^{n}p_{x,j}\, k\, \Sigma\, m_x + \frac{P_{y-1} + P_y}{2} \,.\, q\, r^{\frac{1}{2}}\, \Sigma\, {}^{n}p_{x,j}\, k \,,$$

gdzie $v_x \,.\, {}^n p_{x,j}\, k$ i ${}^n p_{x.j}\, k \sum m_x$ są liczbami pomocniczemi, a ${}^n p_{x,j}\, k$ jednorazową premią netto, opłaconą przez osobę x letnią za ubezpieczenie kapitału k z terminem n letnim.

Gdybyśmy czynnik q włączyli pod znak sumy, mielibyśmy opłacone premie brutto, zamiast netto; gdybyśmy czynnik $r^{\frac{1}{2}}$ włączyli w P_{y-1} resp. w P_y, mielibyśmy jednorazowe premie netto za ubezpieczenie kapitału pośmiertnego, płatnego nie przy końcu roku ubezpieczeniowego, lecz zaraz po śmierci.

Wyprowadzone wzory: (I) dla premij rocznych i (I′) dla premij jednorazowych wymagają otwarcia w księgach rezerwowych co najwyżej 100 rachunków, t j. dla każdego wieku, w chwili obliczania rezerwy, po jednym. Gdybyśmy się zdecydowali na pogrupowanie osób ubezpieczonych w ten sposób, aby każdy rachunek jednego wieku był jeszcze podzielony na tyle oddzielnych kont, przez ile lat ubezpieczeni mają jeszcze płacić premie, t. j. że na każdem koncie byłyby osoby, mające ten sam wiek w chwili obliczania rezerwy i tę samą liczbę lat, przez jaką mają jeszcze płacić premie, wtedy wzory na zbiorową rezerwę przybrałyby całkiem inną postać.

Ażeby dojść do tej nowej postaci, rozłóżmy ubezpieczenie na dożycie ze zwrotem premij na dwie części: na ubezpieczenie samego kapitału na dożycie bez zwrotu premij i na ubezpieczenie samego zwrotu premij w razie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej. Dla każdego z tych dwóch rodzajów ubezpieczeń wyprowadzimy oddzielnie wzór na obliczanie rezerwy.

Niech będzie osoba, posiadająca x lat w chwili zawierania umowy na ubezpieczenie kapitału, płatnego w razie przeżycia n lat; chcemy wyznaczyć rezerwę po latach ν, t. j. gdy osoba ta ma lat $x + \nu = y$, a tem samem gdy ma jeszcze płacić premie roczne przez lat $n - \nu = \mu$.

Oznaczmy przez ${}^{\mu}p_{y.j}$ jednorazową premię netto za ubezpieczenie, przez osobę y letnią, jednostki kapitału, płatnego po latach μ, b e z z w r o t u p r e m i j w razie wcześniejszej śmierci. Przez ${}^n p_x$ oznaczmy roczną premię netto, jaką ta sama osoba ubezpieczająca się gdy ma lat x, płaci za ubezpieczenie jednostki kapitału, płatnego — w razie dożycia — po upływie n lat, z e z w r o t e m w n i e s i o n y c h p r e m i j b r u t t o w razie wcześniejszej śmierci; $q \,.\, {}^n p_x$ jest oczywiście premią brutto za to samo ubezpieczenie. Niech dalej ${}^{\mu}R_y$ oznacza wartość jednostki renty czasowej, płatnej rocznie z góry tej samej y letniej osobie przez lat μ; wreszcie k niech przedstawia wysokość kapitału ubezpieczonego.

Przy takich oznaczeniach, wartością ubezpieczonego kapitału k na dożycie, po latach μ, bez zwrotu premij, jest, w chwili obliczania rezerwy, ${}^{\mu}p_{y,j} \,.\, k$, od czego, dla otrzymania rezerwy, należy odjąć jednoczesną wartość płaconej rocznie premii netto, czyli ${}^{\mu}R_y \,.\, {}^{n}p_x \,.\, k$; t. j. szukaną rezerwą jest:

$$ {}^{\mu}p_{x,j} \,.\, k - {}^{\mu}R_y \,.\, {}^{n}p_x \,.\, k \,, $$

albo, ponieważ

$$ {}^{\mu}p_{x,j} = \frac{v_{y+\mu}}{v_y} \,, $$

mamy dla pojedyńczej osoby:

$$ \text{Rez}'\,(y,\mu) = \frac{v_{y+\mu}}{v_y} \,.\, k - {}^{\mu}R_y \,.\, {}^{n}p_x\, k \,, $$

dla całej grupy:

$$ (A) \qquad \Sigma\, \text{Rez}'\,(y,\,\mu) = \frac{v_{y+\mu}}{v_y}\, \Sigma\, k - {}^{\mu}R_y \,.\, \Sigma\, {}^{n}p_x\, k \,, $$

Do tej rezerwy dodać musimy rezerwę od ubezpieczeń zwrotu premij, za którą przyjąć trzeba samą tylko należną za to jednorazową premię netto, ponieważ wartość płaconych, za zwrot, premij rocznych jest już uwzględniona (odjęta) we wzorze (A).

Ta zaś premia jednorazowa składa się z dwóch części: 1) z wartości zwrotu wniesionych już rocznych premij brutto w liczbie $n - \mu$, oraz 2) z wartości ewentualnie wnieść się jeszcze mających μ premij.

1) Wartość pierwszej części, oczywiście, dla pojedyńczego ubezpieczenia, gdy premie mają być zwrócone zaraz po śmierci, wynosi:

$$ (n - \mu) \,.\, q \,.\, {}^{n}p_x\, k \,.\, r^{\frac{1}{2}} \frac{\Sigma\, m_y - \Sigma\, m_{y+\mu}}{v_y} $$

$$ = (n \,.\, q\, {}^{n}p_x\, k - \mu \,.\, q\, {}^{n}p_x\, k) \,.\, r^{\frac{1}{2}} \frac{\Sigma\, m_y - \Sigma\, m_{y+\mu}}{v_y} \,. $$

2) Wartość części drugiej równa się:

$$q \cdot {}^{n}p_x k \cdot r^{\frac{1}{2}} \frac{\Sigma\Sigma m_y - \Sigma\Sigma m_{y+\mu} - \mu \Sigma m_{y+\mu}}{v_y};$$

obie razem dają dla pojedynczej osoby:

$$\overset{\prime\prime}{\text{Rez}}\,(y, \mu) = (n \cdot q\, {}^{n}p_x\, k - \mu \cdot q\, {}^{n}p_x\, k) \cdot r^{\frac{1}{2}} \frac{\Sigma m_y - \Sigma m_{y+\mu}}{v_y}$$

$$+ q\,{}^{n}p_x k \cdot r^{\frac{1}{2}} \frac{\Sigma\Sigma m_y - \Sigma\Sigma m_{y+\mu} - \mu \Sigma m_{y+\mu}}{v_y},$$

dla całej grupy osób, zapisanych na tym samym rachunku, t. j. dla mających y i μ wspólne:

$$(B)\quad \Sigma \overset{\prime\prime}{\text{Rez}}\,(y, \mu) = (\Sigma n \cdot q\, {}^{n}p_x\, k - \mu \Sigma q\, {}^{n}p_x\, k) \cdot r^{\frac{1}{2}} \frac{\Sigma m_y - \Sigma m_{y+\mu}}{v_y}$$

$$+ r^{\frac{1}{2}} \frac{\Sigma\Sigma m_y - \Sigma\Sigma m_{y+\mu} - \mu \Sigma m_{y+\mu}}{v_y} \cdot \Sigma q\, {}^{n}p_x k.$$

Ogólna rezerwa dla jednej grupy y letnich w chwili obliczania rezerwy i mających jeszcze płacić premie przez μ lat, równa się $(A) + (B)$, czyli wynosi:

$$\text{(II)}\qquad \text{Rez}\,(y, \mu) = \left[\frac{v_{y+\mu}}{v_y} \Sigma k - {}^{\mu}R_y\, \Sigma\, {}^{n}p_x\, k\right]$$

$$+ \Bigg[\left\{\Sigma n \cdot q\, {}^{n}p_x\, k - \mu \Sigma q\, {}^{n}p_x\, k\right\} \cdot r^{\frac{1}{2}} \frac{\Sigma m_y - \Sigma m_{y+\mu}}{v_y}$$

$$+ r^{\frac{1}{2}} \frac{\Sigma\Sigma m_y - \Sigma\Sigma m_{y+u} - \mu \Sigma m_{y+\mu}}{v_y} \cdot \Sigma q\, {}^{n}p_x\, k\Bigg].$$

W tym wzorze czynniki, zawierające y, są jednakie dla wszystkich poszczególnych ubezpieczeń tego samego konta i mogą być wyjęte z tablic zasadniczych. Σk jest sumą ubezpieczonych przez całą grupę kapitałów; $\Sigma\, {}^{n}p_x\, k$ sumą płaconych premij netto; $\Sigma q\, {}^{n}p_x\, k$ sumą płaconych premij brutto, zaś $\Sigma n \cdot q\, {}^n p_x\, k$ jest sumą iloczynów z płaconej przez każdą osobę ubezpieczoną rocznej premij brutto, pomnożonej przez termin, na jaki ubezpieczenie zostało zawarte. Gdy więc w księdze obliczania rezerwy posiadać będziemy kolumny dla liczb k, ${}^n p_x\, k$; $q\, {}^n p_x\, k$ i $n \cdot q\, {}^n p_x\, k$, t. j. dla ubezpieczonych kapitałów, dla płaconych za ubezpieczenie rocznych premij netto i brutto i dla iloczynów z tej ostatniej przez termin, na jaki ubezpieczenie zostało zawarte, to gdy wypełnimy te kolumny cyframi, odnoszącemi się do każdego ubezpieczenia poszczególnego oddzielnie, to sumy tych kolumn dadzą części składowe wzoru (II), w którym część w pierwszej klamrze zawarta stanowi rezerwę zbiorową całej grupy dla ubezpieczeń bez zwrotu premij, część zaś, objęta drugą klamrą, przedstawia rezerwę od ewentualnego zwrotu wniesionych premij brutto.

W podobny sposób daje się wyprowadzić wzór na rezerwę, gdy ubezpieczenia zawierają się za pośrednictwem premij jednorazowych.

Gdy mianowicie przez ${}^n P_{x,j}$ oznaczymy jednorazową premię netto za ubezpieczenie jednostki kapitału na dożycie ze zwrotem wniesionej premii brutto w razie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej (przed upływem n lat); przez $q \cdot {}^n P_{x,j}$ premię brutto, a wszystkie inne oznaczenia pozostawimy bez zmiany, to

$$(A') \qquad \Sigma \overset{\prime}{\mathrm{Rez}}\,(y, \mu) = \frac{v_{y+\mu}}{v_y}\, \Sigma k$$

$$(B') \qquad \Sigma \overset{\prime\prime}{\mathrm{Rez}}\,(y, \mu) = r^{\frac{1}{2}}\, \frac{\Sigma m_y - \Sigma m_{y+\mu}}{v_y} \cdot \Sigma q\, {}^n P_{x,j}\, k\,,$$

czyli razem rezerwa dla całej grupy osób zapisanych na tym samym rachunku wynosi:

$$(\mathrm{II}') \quad \Sigma \dot{\mathrm{R}}\mathrm{ez}\,(y, \mu) = \frac{v_{y+\mu}}{v_y}\, \Sigma k + r^{\frac{1}{2}}\, \frac{\Sigma m_y - \Sigma m_{y+\mu}}{v_y} \cdot \Sigma q\, {}^n P_{x,j} k\,,$$

gdzie dla k (kapitałów) i dla $q\, {}^n P_{x,j}\, k$ (wniesionych jednorazowo premij brutto) potrzeba w księdze obliczania rezerwy poświęcić specyalne kolumny.

Gdyby premie miały być zwracane nie zaraz po śmierci osoby ubezpieczonej, lecz dopiero przy końcu roku ubezpieczeniowego, należałoby we wzorze (II) i (II′) podstawić $r^{\frac{1}{2}} = 1$.

Wzory (II) i (II') dają rezerwę na końcu roku ubezpieczeniowego. Gdybyśmy zaś za rezerwę na końcu roku rachunkowego (np. w dniu 31 grudnia) przyjęli średnio-arytmetyczną z rezerwy na początku i końcu roku ubezpieczeniowego, należałoby, według pomienionych wzorów, obliczyć oddzielnie jedną i drugą i za rezerwę na końcu roku rachunkowego przyjąć połowę sumy liczb, tą drogą otrzymanych.

Jakkolwiek wzór (II) jest łatwiejszy w użyciu przy zapisywaniu ubezpieczeń do ksiąg rezerwowych, gdyż wymaga tylko jednej liczby pomocniczej ($n \,.\, q\, {}^{n}p_x\, k$), podczas kiedy wzór (I) potrzebuje ich trzech ($x \,.\, {}^{n}p_x\, k$; ${}^{n}p_x\, k \sum v_x$ i ${}^{n}p_x\, k \sum\sum v_x$), to jednak jest on mniej praktyczny — można nawet powiedzieć, prawie niemożliwy do użycia — ponieważ, chcąc go w praktyce zastosować, trzeba ubezpieczenia podzielić na jakieś parę tysięcy oddzielnych rachunków, podczas gdy dla wzoru (I) wystarcza ich co najwyżej sto.

Pośrednie miejsce pomiędzy obu opisanemi sposobami obliczania rezerwy od ubezpieczeń na dożycie ze zwrotem premij, zajmuje inny jeszcze sposób bardzo prosty w zasadzie, ale wymagający również otwarcia bardzo wielu rachunków oddzielnych, acz mniej, aniżeli tego potrzebuje drugi z powyżej opisanych.

Przy użyciu tego trzeciego sposobu, trzeba przedewszystkiem prowadzić oddzielne księgi dla każdego roku rachunkowego i księgi te podzielić na rachunki według wieku polisowego, czyli według wieku, jaki posiadają osoby ubezpieczone w chwili zawierania umowy, bez względu na termin płatności kapitału. Innemi słowy, należy osoby ubezpieczone grupować według lat, w których ubezpieczenia się zawierają i według wieku polisowego.

Wtedy bowiem na każdym oddzielnym rachunku mieć będziemy rówieśników, których ubezpieczenia trwają jednakową liczbę lat, a ponieważ rezerwa każdego pojedyńczego ubezpieczenia równa się ilorazowi, powstałemu z podzielenia opłacanej rocznie premii netto, przez roczną premię netto od jednostki kapitału, ubezpieczonego przez osobę tego samego wieku na termin równy czasowi trwania ubezpieczeń (do chwili obliczania rezerwy), przeto razem wzięta rezerwa od wszystkich ubezpieczeń, zapisanych na tym samym rachunku, równa się ilorazowi powstałemu z podzielenia sumy płaconych rocznie przez wszystkie te osoby razem premij netto, przez tę samą powyżej wzmiankowaną premię netto od jednostki kapitału.

Jeżeli np. weźmiemy rachunek osób ubezpieczonych w t-ym roku na różne terminy n i posiadających w chwili zawierania umowy x lat, to ponieważ suma opłacanych przez nie rocznych premij netto równa się $\Sigma\, {}^n p_x\, k$, po ν latach, t. j. w $(t + \nu)$-ym roku rezerwa zbiorowa całego konta x letnich, ubezpieczonych w t-ym roku, wynosi:

$$\text{(III)} \qquad \Sigma\, \mathrm{Rez}\,(x, \nu) = \frac{\Sigma\, {}^n p_x\, k}{{}^\nu p_x}$$

Dla sposobu tego zatem wystarcza w księdze rezerwowej jedna tylko kolumna opłacanych premij netto, bez żadnych liczb dodatkowych resp. pomocniczych, ale za to trzeba otworzyć tyle rachunków oddzielnych, ile jest lat polisowych, pomnożonych przez liczbę lat operacyjnych. Gdy np. przypuścimy, że ubezpieczamy osoby w wieku od 0 do 65 lat i że operacye nasze trwają od lat 20-tu, to mieć będziemy do obliczenia $66 \times 20 = 1320$ rachunków oddzielnych — podczas kiedy sposób pierwszy wymaga ich tylko niespełna 100, a sposób drugi około 2000. Sposób więc pierwszy wymaga dużo pracy w ciągu roku (w czasie zapisywania ubezpieczeń do ksiąg rezerwowych), a względnie mało przy zamykaniu rachunków; ze sposobami zaś drugim i trzecim rzecz się ma naodwrót.

PRZEGLĄD LITERATURY. BIBLIOGRAFIA.

Przegląd nowszych dzieł i rozpraw z dziedziny mechaniki.

II *).

1. F. Klein u. A. Sommerfeld. Ueber die Theorie des Kreisels. Heft II. Durchführung der Theorie im Falle des kleineren symmetrischen Kreisels 1898. B. G. Teubner, Leipzig.

*) Patrz „Wiadomości matematyczne", t. II, str. 242—246.