

KILKA UWAG O WZORZE INTERPOLACYJNYM LAGRANGE'A

napisał

W. Lewicki.

1. Jak wiadomo, wzór Lagrange'a służy do utworzenia funkcji wymiernej $y = f(x)$ stopnia n -tego, która ma na $(n + 1)$ miejscach $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1})$ przybrać pewne z góry oznaczone wartości $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n+1})$.

Gdy funkcja ta posiada postać:

$$(1) \quad y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

to ma zachodzić szereg związków postaci:

$$(2) \quad y_\nu = a_0 + a_1x_\nu + a_2x_\nu^2 + \dots + a_nx_\nu^n \quad (\nu = 1, 2 \dots n + 1).$$

Z $(n + 2)$ związków (1) i (2) otrzymamy następujący warunek ich spójności ¹⁾:

$$(3) \quad \Delta(x_\nu, y_\nu) = \begin{vmatrix} y & 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = 0.$$

Wyznacznik ten, rozwinięty według pierwszej kolumny, otrzymuje postać:

¹⁾ Por. J. P u z y n a. Teorya funkcyj analitycznych, 1898, t I, str. 137.

$$y(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_{n+1})(x_2-x_3)\dots(x_2-x_{n+1})\dots(x_n-x_{n+1}) \\ - y_1(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_{n+1})\dots(x_n-x_{n+1}) + \dots = 0.$$

lub, po podzieleniu przez spółczynnik przy y :

$$(4) \quad y = \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{\nu-1})(x-x_{\nu+1})\dots(x-x_{n+1})}{(x_\nu-x_1)(x_\nu-x_2)\dots(x_\nu-x_{\nu-1})(x_\nu-x_{\nu+1})\dots(x_\nu-x_{n+1})} y_\nu.$$

Jest to właśnie wzór interpolacyjny Lagrange'a. Wzór ten — jak to wprost widać — spełnia żądane warunki, daje więc funkcję szukaną. A że funkcja ta ma na $(n+1)$ miejscach te same wartości, co funkcja

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

więc obie funkcje są identyczne ¹⁾.

Minor, należący do y , t. j.

$$A_0 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

jest różny od zera, jeżeli pierwiastki są różne. Dla takich tylko pierwiastków wzór powyższy ma znaczenie ²⁾.

Rozwijając prawą stronę równania (4), otrzymamy przez porównanie z postacią (1), wyrażenia na spółczynniki a_0, a_1, \dots, a_n . Rozwi-

¹⁾ Ibid. str. 135.

²⁾ Przypadek wielokrotnych pierwiastków, patrz Puzyna loc. cit., str. 138.

nięcia tego możemy jednak uniknąć w sposób nader prosty, rozwijając wyznacznik Δ według pierwszego wiersza. Otrzymamy wówczas:

$$(5) \quad A_0 y - \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ y_2 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n+1} & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ y_2 & 1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} \dots$$

$$\dots + x^n \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ y_2 & 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Jest to trzecia postać szukanej funkcji. Z rozwinięcia tego wypływa wprost, że:

$$a_\nu = \mp \frac{A_\nu}{A_0},$$

gdzie A_ν jest minorem, należącym do elementu x^ν wyznacznika $\Delta = 0$.

2. Ostatnia postać daje nam możliwość podania kryterium na to, czy i kiedy funkcja n -tego, mająca na miejscach $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ przybierać z góry podane wartości $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$, da się utworzyć.

Weźmy najprzód przypadek, że te miejsca $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ są związane z $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ związkami: $y_\nu = x_\nu$. Wtedy w równaniu (5) wszystkie minory są zerami, prócz minoru przy x , który przybiera wartość A_0 ; wówczas szukana funkcja ma kształt $y - x = 0$.

Ale funkcja ta nie jest funkcją n -go stopnia. Nie istnieje przeto funkcja n -go stopnia, któraby na $(n+1)$ miejscach $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ przybierała wartości $(y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_{n+1} = x_{n+1})$.

Oczywistą jest rzeczą, że to samo zostaje i w przypadku $y_\nu = ax_\nu$ ($\nu = 1, 2 \dots n+1$, a stałe).

3. Przejdźmy teraz do przypadku ogólniejszego. Wybierzmy mianowicie wartości $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ tak, aby były związane z wartościami $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ szeregiem równań:

$$(6) \quad y_\nu + a_1 x_\nu^{\lambda_1} + a_2 x_\nu^{\lambda_2} + a_3 x_\nu^{\lambda_3} + \dots + a_\rho x_\nu^{\lambda_\rho} = 0 \\ (\nu = 1, 2 \dots n+1).$$

Mamy tu $(n+1)$ związków między y_ν a x_ν , przyczem zakładamy, że $\lambda_s \geq \lambda$, ale każde $\lambda_s < n$.

Co do ρ mogą tu zachodzić trzy przypadki $\rho < n$, $\rho = n$, $\rho > n$.

a. Weźmy przypadek $\rho < n$; mamy wtedy $(n+1)$ równań liniowych co do $(\rho+1)$ niewiadomych $1, a_1, \dots, a_\rho$. Wtedy — jak z teorii równań wypływa — jest $(n-\rho)$ równań zbytecznych, a układów $(1, a_1, \dots, a_\rho)$, rozwiązujących równania (6), będzie $\infty^{n-\rho}$.

Odrzućmy z równań (5) $(n-\rho)$ równań końcowych, otrzymamy:

$$y_\nu + a_1 x_\nu^{\lambda_1} + a_2 x_\nu^{\lambda_2} + \dots + a_\rho x_\nu^{\lambda_\rho} = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, \rho+1)$$

Warunkiem ich rozwiązalności jest:

$$D_1 = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \dots & x_1^{\lambda_\rho} \\ y_2 & x_2^{\lambda_1} & \dots & x_2^{\lambda_\rho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{\rho+1} & x_{\rho+1}^{\lambda_1} & \dots & x_{\rho+1}^{\lambda_\rho} \end{vmatrix} = 0.$$

Takich wyznaczników jak $D_1 = 0$ dostaniemy pewną ilość, zależnie od wielkości ρ ; możemy bowiem z (6) $(n-\rho)$ równań w dowolny

sposób odrzucać. Układów $(1, a_1, a_2, \dots, a_e)$ jest wprawdzie ∞^{n-e} , należy je jednak wybrać tak, aby zachodziły warunki $D_p = 0$.

Zobaczmy obecnie, jaką będzie funkcja n -go stopnia, która na miejscach $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ ma przybierać wartości, określone równaniami (6).

Wyznacznik A_0 nie ulegnie zmianie, gdyż weń y nie wchodzi. Zauważmy teraz którykolwiek z dalszych wyznaczników:

$$A_s = \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 & \dots & x_1^{\lambda_s-1} & x_1^{\lambda_s+1} & \dots & x_1^n \\ y_2 & 1 & x_2 & \dots & x_2^{\lambda_s-1} & x_2^{\lambda_s+1} & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{\lambda_s-1} & x_{n+1}^{\lambda_s+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

Gdy w nim podstawimy za $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ wartości z równań (6), to wyznacznik ten zamieni się na sumę $(\rho + 1)$ wyznaczników; wszystkie te wyznaczniki staną się zerami, bo $\lambda_1, \lambda_2, \dots < n$, wyznaczniki te będą przeto miały po dwie kolumny identyczne; zostanie tylko wyznacznik:

$$a_s = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_s} & 1 & \dots & x_1^{\lambda_s-1} & x_1^{\lambda_s+1} & \dots & x_1^n \\ x_2^{\lambda_s} & 1 & \dots & x_2^{\lambda_s-1} & x_2^{\lambda_s+1} & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1}^{\lambda_s} & 1 & \dots & x_{n+1}^{\lambda_s-1} & x_{n+1}^{\lambda_s+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = D_s.$$

Widoczną jest jednak rzeczą, że $D_p = (-1)^p a_p A_0$, a więc po uproszczeniu funkcja żądana otrzyma postać:

$$y + a_1 x^{\lambda_1} + a_2 x^{\lambda_2} + \dots + a_\rho x^{\lambda_\rho} = 0.$$

Funkcja ta nie jest jednak funkcją n -tego stopnia.

Nie istnieje przeto funkcja n -tego stopnia, która by na miejscach $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ przybierała wartości $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$, określone równaniami (6) dla $\rho < n$.

b. Przejdźmy teraz do przypadku $\rho = n$.

Wtedy istnieje jeden tylko układ wartości $(1, a_1, a_2, \dots, a_\rho)$, spełniający równania (6). Dla tego układu musi zachodzić związek:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \dots & x_1^{\lambda_n} \\ y_2 & x_2^{\lambda_1} & \dots & x_2^{\lambda_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n+1} & x_{n+1}^{\lambda_1} & \dots & x_{n+1}^{\lambda_n} \end{vmatrix} = 0.$$

I tu znajdzie to samo, co poprzednio, że funkcja żądana otrzyma postać:

$$y + a_1 x^{\lambda_1} + a_2 x^{\lambda_2} + \dots + a_\rho x^{\lambda_\rho} = 0,$$

czyli, że i tu nie istnieje funkcja n -tego stopnia, odpowiadająca żądanym warunkom.

c. Zostaje jeszcze przypadek $\rho > n$.

Przypadek ten da się jednak sprowadzić do przypadków poprzednich, jak długo $\lambda_\rho < n$. Wtedy bowiem wykładników $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\rho)$ jest ρ ; liczby te są mniejsze od n , muszą więc w pewnym porządku przedstawiać liczby $1, 2, 3, \dots, n-1$, a że $\rho > n$, więc niektóre z tych liczb λ muszą się powtarzać; w każdym więc razie y_ν da się sprowadzić do postaci:

$$y_\nu + a_1' x_\nu^{\lambda_1} + a_2' x_\nu^{\lambda_2} + \dots + a_u' x_\nu^{\lambda_u}, \quad u \leq n.$$

A więc i w tym przypadku funkcja n -tego stopnia przy danych warunkach nie istnieje.

4. Określmy bliżej warunek, że dla układu równań (6) nie istnieje funkcja n -tego stopnia o przepisanych wartościach.

Aby równania (6) miały rozwiązania skończone, wszędzie dla układu $(1, a_1, a_2, \dots, a_e)$, musi być równy zero wyznacznik:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \dots & x_1^{\lambda_e} \\ y_2 & x_2^{\lambda_1} & \dots & x_2^{\lambda_e} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{e+1} & x_{e+1}^{\lambda_1} & \dots & x_{e+1}^{\lambda_e} \end{vmatrix} = 0 \quad e < n.$$

Wyznaczników takich jest więcej lub mniej zależnie od e . $W = 0$ powiada, że między $(y_1, y_2, \dots, y_{e+1})$ i $(x_1, x_2, \dots, x_{e+1})$ istnieje pewien związek, wszystkie więc wyznaczniki powiadają, że między ilościami $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ i $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ zachodzą pewne związki.

Istnienie równań $W = 0$ jest warunkiem koniecznym, aby nie istniała funkcja n -tego stopnia o $(n + 1)$ przepisanych wartościach; gdyby bowiem $W \neq 0$, toby było:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_e = 0 \quad ; \quad y_1 = y_2 = \dots = y_{n+1} = 0,$$

a stąd $f(x) \equiv 0$, co wykluczamy.

Warunek ten jest jednak i dostateczny, bo tylko w razie, gdy $W = 0$,

$$y + a_1 x^{\lambda_1} + \dots + a_e x^{\lambda_e} = 0,$$

czyli funkcja n -tego stopnia nie istnieje.

Powiedzieliśmy, że warunków $W = 0$ jest więcej zależnie od e . Gdy jednak zauważymy jeden tylko z tych warunków, to do niego należeć będzie ∞ wiele układów

$$(7) \quad (1, a_1, a_2, \dots, a_e)$$

spełniających $(\varrho + 1)$ równań, bo gdy (7) jest układem to i $(C, C_{a_1}, C_{a_2} \dots C_{a_n})$ jest również układem.

Ale ten układ (7) spełnia tak samo wszystkie równania (6), a dla takiego układu funkcya n -tego stopnia z $(n+1)$ danymi wartościami nie istnieje. Wystarczy więc jeden tylko warunek $W = 0$ i to najlepiej użyć warunku :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \dots & x_1^{\lambda_\varrho} \\ y_2 & x_2^{\lambda_1} & \dots & x_2^{\lambda_\varrho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{\varrho+1} & x_{\varrho+1}^{\lambda_1} & \dots & x_{\varrho+1}^{\lambda_\varrho} \end{vmatrix} = 0.$$

Gdy więc między $(\varrho + 1)$ wartościami x_ν i $(\varrho + 1)$ wartościami y_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots, n + 1$) zachodzi związek $W = 0$, to tem samem zachodzą związki między wszystkimi $(n + 1)$ wartościami x_ν i $(n + 1)$ wartościami y_ν , a wtedy forma interpolacyjna Lagrange'a redukuje się do funkcji stopnia niższego niż n .

5. Uwzględnijmy teraz przypadek, że w równaniach (6) niektóre λ_ν są równe n .

Oczywistą jest wtedy rzeczą, że wzór interpolacyjny Lagrange'a sprowadzi się do postaci :

$$A_0 y + A_0 x a_1 + A_0 x^2 a_2 + \dots + A_0 x^n a_n = 0,$$

czyli :

$$y + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0;$$

a więc wtedy istnieje już funkcya n -tego stopnia, mająca $(n + 1)$ przepisanych wartości.

Gdy $\lambda_\nu > n$, to wyznaczniki przy x^ν nie redukują się wcale do A_0 , lecz rozbijają się na więcej wyznaczników, a wtedy forma Lagrange'a ma już znaczenie zupełne.

6. Weźmy teraz pod uwagę równania (6), ale przyjmijmy, że współczynniki są różne we wszystkich równaniach; wtedy:

$$(8) \quad y_\nu + a_{\nu 1} x_1^{\lambda_1} + a_{\nu 2} x_1^{\lambda_2} + a_{\nu 3} x_1^{\lambda_3} + \dots + a_{\nu e} x_1^{\lambda_e} = 0$$

$$(\nu = 1, 2 \dots n+1),$$

przyczem

$$\lambda_s < n, \quad a_{st} \neq a_{ts}.$$

Wtedy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \dots & x_1^{\lambda_e} \\ y_2 & x_2^{\lambda_1} & \dots & x_2^{\lambda_e} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n+1} & x_{n+1}^{\lambda_1} & \dots & x_{n+1}^{\lambda_e} \end{vmatrix}$$

jest różny od zera, a więc pomiędzy $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ a $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ nie istnieje żaden związek bez wolnego wyrazu $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$, a tak samo i $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ są od siebie niezależne. Dla takiego układu x_ν i y_ν istnieje zawsze funkcja n -go stopnia z $(n+1)$ przepisanymi wartościami.

Gdy zamiast $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ weźmiemy wartości $(Cy_1, Cy_2 \dots Cy_{n+1})$, to funkcja $f(x)$ stopnia n -tego przejdzie na $Cf(x)$; możemy więc powiedzieć, że do wszelkich wartości $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \dots \bar{y}_{n+1}$ utworzonych z zasadniczego układu $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$, w ten sposób, że $\bar{y}_\nu = Cy_\nu$ ($\nu = 1, 2 \dots n+1$) pozostaje jedna i ta sama forma Lagrange'a.

Oczywiście, że gdy $\bar{y}_\nu = C_\nu y_\nu$ [$\nu = 1, 2 \dots n+1$] lub gdy $\bar{y}_\nu = F_\nu(y_\nu)$, dostaniemy inne formy Lagrange'a.

7. Zobaczmy jeszcze co nastąpi, gdy

$$(9) \quad \bar{y}_\nu = c_{\nu 1} y_1 + c_{\nu 2} y_2 + \dots + c_{\nu n+1} y_{n+1} \quad (\nu = 1, 2 \dots n+1).$$

Forma Lagrange'a ma wtedy postać:

$$= \frac{1}{A_0} \begin{vmatrix} \bar{y}_1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \bar{y}_2 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \bar{y}_{n+1} & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} - \frac{1}{A_0} x \begin{vmatrix} \bar{y}_1 & 1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \bar{y}_2 & 1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \bar{y}_{n+1} & 1 & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} + \dots = 0,$$

lub wstawiając równania (6) za $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n+1})$ i rozbijając każdy wyznacznik na sumę, otrzymamy:

$$\bar{y} = \frac{y_1}{A_0} \begin{vmatrix} c_{11} & x_1 & \dots & x_1^n \\ c_{21} & x_2 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n+1,1} & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} + \frac{y_2}{A_0} \begin{vmatrix} c_{12} & x_1 & \dots & x_1^n \\ c_{22} & x_2 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n+1,1} & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} + \dots$$

$$+ \frac{y_{n+1}}{A_0} \begin{vmatrix} c_{1,n+1} & x_1 & \dots & x_1^n \\ c_{2,n+1} & x_2 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n+1,n+1} & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} - \frac{y_1}{A_0} x \begin{vmatrix} c_{11} & 1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ c_{21} & 1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n+1,1} & 1 & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} - \dots = 0,$$

czyli:

$$\bar{y} = y_1 f(c_{11}, c_{21} \dots c_{n+1,1}) + y_2 f(c_{12}, c_{22}, \dots, c_{n+1,2}) + \dots \\ \dots + y_{n+1} f(c_{1,n+1}, c_{2,n+1} \dots c_{n+1,n+1}).$$

Aby więc z wzoru Lagrange'a dla układu zasadniczego przejść do wzoru dla układu, utworzonego liniowo z układu zasadniczego, wystarczy w danej formie za system zasadniczy kolejno kłaść układy:

$$c_{11}, c_{21}, \dots, c_{n+1,1}$$

$$c_{12}, c_{22}, \dots, c_{n+1,2}$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$c_{1,n+1}, c_{2,n+2}, \dots, c_{n+1,n+1},$$

tak zmienione formy pomnożyć kolejno przez $y_1 y_2 \dots y_{n+1}$ i zsumować.

Wówczas wzór Lagrange'a otrzyma postać:

$$(10) y = \sum_{\mu=1}^{\mu=n+1} \sum_{\nu=1}^{\nu=n+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{\nu-1})(x-x_{\nu+1})\dots(x-x_{n+1})}{(x_\nu-x_1)(x_\nu-x_2)\dots(x_\nu-x_{\nu-1})(x_\nu-x_{\nu+1})\dots(x_\nu-x_{n+1})} c_{\nu,\nu} y_\mu.$$

Tarnopol, 22 marca 1899 r.

