O ARYTMETYZACYI MATEMATYKI.

Napisał

J. Pierpont [1]).

WSTĘP.

Zadaniem niniejszego artykułu jest wykazanie, że metody arytmetyczne tworzą jedynie pewną podstawę analizy w dzisiejszym stanie wiedzy. Pewne ogólne rozważania w tym przedmiocie ogłosił Klein w interesującej rozprawie [2]). Starałem się rozwinąć te myśli i wykazać dokładnie, dla czego opartych na intuicyi argumentów nie można ostatecznie przyjmować w analizie. W tym celu ugrupowałem pewne dobrze znane fakty dla poparcia wywodów, które sformułowałem na końcu tej pracy. Podobny bieg myśli nasuwał się bezwątpienia i innym, którzy zastanawiali się nad tym czarującym przedmiotem, stanowiącym granicę pomiędzy matematyką a metafizyką; lecz w druku nic w tej materyi nie napotkałem.

Rozważania niniejsze dzielę na dwie części. W pierwszej części zajmuję się wielkościami (ilościami, magnitudes or quantities, Grössen). Bardzo łatwo nacechować wielki brak ścisłości w tej dziedzinie i pokazać, że poprawa wiąże się w sposób nieunikniony z nowoczesną teoryą liczb niewymiernych, jak ją rozwinęli Weierstrass, Dedekind lub G. Cantor. Rzecz jest tak znaną, że poświęcam jej niewiele tylko miejsca. Drugi punkt główny odnosi się do naszej intuicyi. Ten wymaga bardziej szczegółowego rozbioru i dla tego nie wahałem się rozwinąć go szerzej, cytując liczne przykłady.

---

[1]) Wykład niniejszy profesora Jamesa Pierponta, miany na zgromadzeniu Amerykańskiego Towarzystwa matematycznego 25 lutego 1899 r., ogłoszony w „Buletynie" tegoż Towarzystwa (maj 1899), podajemy tu w przekładzie za zgodą Autora. *S. D.*

[2]) Ueber „Arithmetisierung du Mathematik" Gött. Nach. (Geschäftliche Mittheilungen), 1895, str. 82.

§ 1.

Wszyscy wiemy o ruchu, jaki wśród nas wywołał Klein, scharakteryzowawszy tak szczęśliwie arytmetyzacyę matematyki. Nie wielu tylko z nas, jakkolwiek ten ruch rozumie, sympatyzuje z nim żywiej. Wydaje się bowiem niejako zbytecznem poświęcać wiele czasu na uzasadnienie za pomocą pracowitych metod ε i δ tego, co dawne metody uzasadniały tak zadawalająco kilkoma wyrazami. Istotnie, wiele rzeczy za pomocą których kształci się myśl tego, który ma wzrok otwarty w szkole Weierstrassa, zdaje się wprost znikać dla niewtajemniczonych. Podobnie jakby kto chciał udawadniać, że dwa i dwa czyni cztery.

Pragnę rozwinąć tu kilka uwag, które — jak mam nadzieję — zachwieją spokojem tego i owego członka naszego grona w rzeczach dotyczących ścisłości i pobudzą może do głębszej nad tym przedmiotem rozwagi.

Rozpoczynam od spostrzeżenia, że nie istnieje żadne absolutne kryteryum na to, na czem polega ścisłość dowodzenia. Jest to rzecz osobistego poglądu i zmienia się bardzo z biegiem czasu. Znaczna część rozumowań, używanych w analizie w ubiegłem stuleciu, nie mogła by dziś prawdopodobnie uchodzić za ścisłą. Zresztą równa ścisłość na wszystkie czasy nie jest bynajmniej konieczną, ani nawet pożądaną. W dziedzinie rozległej i prawie niezbadanej, gdzie pojęcia, z któremi mamy do czynienia, bywają jakby nawpół określone i plastyczne, metody zaś obmyślane na każdym kroku są za nowe, by mogły być zupełnie wypróbowanemi, uznajemy największą swobodę intuicyi i zdolności przewidującej wysiłku twórczego.

Mimo to istnieje kilka reguł, które zachować należy, jeżeli wielką teoryę pragniemy oprzeć na możliwie najpewniejszym fundamencie. Powinniśmy rozpoczynać od niewielu prostych i oczywistych pojęć i postulatów i żądać, by wszystkie inne pojęcia z możliwą jasnością dały się przy pomocy tamtych określić. Powinniśmy nie dopuszczać żadnego dowodzenia, które nie daje się ściśle wyprowadzić z tego, co udowodniono poprzednio; powinniśmy unikać wślizgiwania się milczących przypuszczeń, a zwłaszcza twierdzeń o istnieniu (existence theorems). Co daje się stwierdzić, to powinno być stwierdzonem. Trzymając się z całą sumiennością tego programu, analiści doszli do zarytmetyzowania swej nauki. Zobaczmy — jakim sposobem.

§ 2.

W i e l k o ś ć i l i c z b a. Dla jasności przedstawienia prawideł ścisłości, rozpatrzmy je w zastosowaniu do Rachunku. Jeżeli zwrócimy się do niearytmetycznych traktatów Rachunku, spostrzeżemy pomieszanie, panujące w nich od samego początku, spowodowane przez wprowadzenie wyrazu „wielkość“ (Grösse). Napróżno szukamy definicyi tego wyrazu, lecz nie będąc nawet bliżej wtajemniczeni w nowe poszukiwania w tej rozległej dziedzinie, poznajemy, że istnieją rozmaite rodzaje wielkości, mających zupełnie różne własności. O jakiej klasie tam mowa? Znajdujemy tam w każdym razie działania algebraiczne na wielkościach wykonywane, tak wymierne jak i niewymierne (wyciąganie pierwiastków, logarytmy i t. p.). Pytamy, co znaczą te działania i czy są możliwe? Naprzykład, pierwszą rzeczą jest przedewszystkiem wiedzieć o tem, kiedy dwie wielkości są równe. Przypuśćmy, że mamy dwa pola, ograniczone różnemi krzywemi zamkniętemi. Usiłowanie rozstrzygnięcia tego pytania, bez uprzedniego pokazania w j a k i s p o s ó b p o l a m o g ą b y ć m i e r z o n e, jest oczywiście płonne. Albo przypuśćmy, że pytamy, co rozumieć należy przez iloczyn dwóch pól. Istota działań wymiernych, stosowanych do l i c z b jest ta: dane są dwie liczby, trzecia jest przez nie jednoznacznie określona. Wiemy, czem jest iloczyn 5 przez 7, lecz zanim określimy czem jest iloczyn dwu pól, wyraz „iloczyn“ jest pustem słowem. Nie wystarcza dziś wiedzieć o tem, że grecy doskonale to czuli, oni bowiem nie uważali wielkości geometrycznych za liczby. Ich usiłowania rozwinięcia arytmetyki z pojęcia stosunku znamy z piątej księgi E u k l i d e s a. Mniej znanemi są dalsze rozwinięcia, zawarte w księdze dziesiątej. Jeżeli chcemy traktować wielkość bezpośrednio bez udziału pojęcia liczby, musimy pójść za ich przykładem. Dajmy, że unikamy trudności, zakładając, że na wielkościach można wykonywać działania, jak na liczbach. Założenie takie podlega dyskusyi bardziej, niż by to zdawać się mogło na pierwszy rzut oka, ale nie widzę innej drogi do wyjścia z trudności. Jestem zdania, że tak właśnie rzecz rozumieć należy, gdy mowa jest o wielkości w dziełach, poświęconych analizie. Powstaje tedy znów pytanie, na jakich to liczbach mamy wykonywać działania. Napewno na liczbach wymiernych. Arytmetykę tych liczb łatwo można z pewnością ustanowić w sposób ścisły. Lecz używanie pierwiastków, logarytmów i innych liczb, nie będących wymiernemi, jako też używanie granic, wymaga już nieskończenie wielu liczb nowych, t. j. liczb niewymiernych. Używanie tych liczb przez niearytmetyka polega na milczącem przyjęciu, że ich arytmetyka jest identyczna z arytmetyką liczb wymiernych. Niearytmetyk zadawala się przybliżonemi przedstawieniami dziesiętnemi i ma mgliste wyobrażenie o tem, że działania na nich wykonywane są takie same, jak wykonywane na samych liczbach. Zanim te założenia nie będą udowodnione zgodnie z wyżej przytoczonemi prawidłami, wielkich wymagań co do ścisłości stawiać nie możemy.

§ 3.

Intuicya Już poprzednie postępowanie w połowie arytmetyzuje analizę; wielkości traktujemy jak liczby; ich istnienie i prawa tkwią w arytmetyce a nie w intuicyi. Następujące rozważania mają prowadzić do uzupełnienia procesu arytmetyzacyi. Argumenty, mające pewną donios łość, mamy związać z oczywistością intuicyjną. Według mego zdania ta oczywistość nie ma ostatecznego znaczenia; jeżeli przeto pragniemy zapewnić sobie możliwie doskonałą formę dowodzenia, to musimy ją uczynić całkowicie arytmetyczną. Intuicyonista nie zgodzi się na to. Utrzymuje on, że w pewnych pytaniach analizy intuicya jest również przekonywającą, jak i gdzieindziej. Lecz zobaczmy, jak to się dzieje.

Nasza intuicya geometryczna pozwala nam przedstawiać graficznie funkcye jednej i dwu zmiennych za pomocą krzywych i powierzchni. Prowadzi to do takich pojęć, jak ciągłość, prosta i płaszczyzna styczne, krzywizna, skręcenie, styczność, rektyfikacya, kwadratura, kubatura i t. p. W rozważaniu natury linii krzywej lub powierzchni napotykamy pojęcia: ruchu, ograniczenia, prędkości, przyspieszenia i t. p. Jest oczywistem, że jeżeli chcemy stosować te pojęcia w naszej analizie, musimy być pewni: 1-o że są one jasno i ściśle zdefiniowane w umyśle naszym; 2-o że przystają do swych równoważników analitycznych.

Postaram się wykazać, że te bezwzględnie zasadnicze warunki nie spełniają się.

Rozpoczynam od uwagi, iż błędem jest powszechnym przyjmować, że wszystkie te pojęcia sa nam dane w sposób zupełny i określony, już to jako pojęcia wrodzone, już to jako zdobyte doświadczeniem. Intuicyonista mówi o krzywej lub o powierzchni, jak gdyby pojęcie linii prostej lub płaszczyzny było prostem. Postaram się okazać, jak dalekiem to jest od prawdy, że więc żaden z powyższych warunków nie spełnia się.

Pojęcie krzywej. Zbadajmy najprzód nasze pojęcia o krzywej, dane nam przez intuicyę. Nie usiłując określić, czem jest krzywa, wyliczmy niektóre jej więcej lub mniej nie ulegające zaprzeczeniu własności.

1-o Krzywa może być utworzona ruchem punktu. 2-o Jest ciągłą. 3-o Posiada styczną. 4-o Posiada długość. 5-o Jeżeli jest zamkniętą, to tworzy zupełne ograniczenie obszaru. 6-o Obszar ten posiada pole. 7-o Krzywa nie jest powierzchnią. 8-o Tworzy się przez przecięcie dwu powierzchni. 9-o Jej równaniami są $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, gdzie f, g, h tą funkcyami ciągłemi, i odwrotnie: takie równania przedstawiają krzywą. Z pomiędzy wszystkich tych własności, pierwsza jest prawdopodobnie najbardziej charakterystyczna i wybitna; istotnie używamy jej nieraz jako definicyi linii krzywej. Lecz przyjrzyjmy się bliżej naszym pojęciom o ruchu.

Ruch. Tu dwie rzeczy są zasadniczemi: α) ruch jest ciągły; β) w każdej chwili ruch odbywa się w określonym kierunku i z określoną prędkością. Kierunek ruchu jest dany, dajmy na to, przez dy/dx, prędkość przez ds/dt. Przypuśćmy, że krzywa, po której ruch się odbywa, posiada ostrze; cóż będzie wtedy kierunkiem ruchu w tym punkcie? Oczywiście, musimy albo uważać ruch jako niemożliwy, albo przyjąć, że nasze zwykle pojęcie ruchu jest niedoskonałe i powinno być uogólnione w zgodzie z pojęciem pochodnych prawo i lewostronnych. Lecz ds/dt może nam dać dwie prędkości w takim punkcie funkcyi $s = \varphi(t)$. To znowu prowadzi nas do nowego pojęcia. A zatem, jeżeli przyjmiemy, że taki punkt istnieje na drodze ruchu, to ruch może rozpocząć się i odbywać w jednym lub drugim kierunku. Rozpatrzmy np. drogę, określoną za pomocą funkcyi ciągłej

$$(1) \qquad y = 0 \text{ dla } x = 0\,; \quad y = x \sin \frac{1}{x} \text{ dla } x \neq 0\,.$$

Krzywa ta leży pomiędzy dwiema prostemi, tworzącemi każda kąt 45^0 z osią odciętych i kołysze się z nieograniczenie rosnącą częstością, gdy x zbliża się do początku spółrzędnych. W początku tym krzywa nie ma stycznej. Pytamy się, jak punkt ma się poruszać, gdy przechodzi przez początek? Lub — aby jeszcze bardziej utrudnić pytanie — umieśćmy punkt w początku spółrzędnych i zapytajmy w jakim kierunku ma on ruch rozpocząć? Zgodzimy się wszyscy na to, że ruch jest niemożliwy lub co najmniej na to, że ruch podobny nie jest dany nam przez naszą intuicyę. Mamy więc fakt, że nie wszystkie krzywe ciągłe mogą być opisane ruchem punktu.

Krzywe ciągłe bez stycznych. Analiści znają atoli krzywe jeszcze osobliwsze od poprzedniej. Łatwo zbudować funkcye ciągłe, które wcale nie posiadają pochodnych w żadnym z punktów wymiernych danego przedziału, tak że w najdrobniejszym przedziale istnieje nieskończenie wiele punktów ze stycznemi i nieskończenie wiele punktów bez stycznych. Intuicya nasza jest zupełnie bezradną, gdy idzie o krzywe takiego rodzaju. Istotnie, intuicya nasza mówi nam raczej, że krzywe takie nie istnieją. Pierwszy zarys takich funkcyj patologicznych ogłosił Hankel w r. 1870. Jest rzeczą interesującą przeczytać niekorzystny sąd, jaki o tej pracy był wydał w swoim czasie Gilbert w „Pamiętnikach Akademii belgijskiej“ z r. 1873. Pisze on: „Nous croyons faire chose utile en mettant à nu l'erreur de raisonnement sur laquelle reposent de semblables paradoxes qui, répandus dans le champ de la géométrie, auraient pour résultat d'en altérer l'ésprit et d'entrainer dans de nouvelles erreurs les géométres trop confiants. C'est ainsi qui nous voyons M. Houël dans un compte rendu du mémoire de M. Hankel en accepter sans resctriction les déductions et les plus étranges résultats... Si des hommes de ce talent peuvent être le jouet de telles illusions, que faut-il attendre des jeunes géomètres“! Można na usprawiedliwienie Gilberta powiedzieć tylko to, że rozumowanie Hankela nie było zawsze poprawnem, jakkolwiek rezultaty jego były po większej części prawdziwe.

Wytknięcie wniosków. Lecz zobaczmy, jaki w tem mieści się dylemat. Albo 1-o są krzywe, o jakich nie mówi nam nasza intuicya i musimy uogólnić nasze pojęcie o krzywej; albo 2-o musimy zaprzeczyć temu, by mnogości punktów, odpowiadających tym funkcyom patologicznym, były krzywemi; albo 3-o musimy zaprzeczyć temu, by definicya arytmetyczna stycznej do linii krzywej, dajmy na to, płaskiej, t. j.

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x - x_0)$$

odpowiadała naszemu pojęciu intuicyjnemu stycznej; albo wreszcie 4^0 pomimo, że funkcye w mowie będące czynią zadość prawu ciągłości, musimy zwątpić o tem, czy realna mnogość punktów jest ciągłą ze stanowiska intuicyi.

Żadna z tych alternatyw nam nie pomoże. Jeżeli przyjmiemy pierwszą, to tem samem zgodzimy się na to, że nasze pojęcie linii krzywej było niezupełne i niejasne. Przyjąwszy drugą, musimy przypuścić zarazem, że istnieją funkcye ciągłe, nie dające się przedstawić przez krzywe; że tedy, gdy ustanawiamy własności funkcyj ciągłych bez dalszych zastrzeżeń, to dowodzenia nasze muszą być arytmetycznemi. Co się tyczy trzeciego założenia, to można tylko przypuścić, że definicya nie jest przystosowalną (adequate). Muszę tu wyznać, że zwykle wyobrażam sobie styczną nie jako granicę linii siecznej, lecz jako linię, przystającą do krzywej i toczącą się po niej. W braku lepszej definicyi, przyjąć musimy jednę z tych, których użyliśmy. Przychodzimy ostatecznie do ostatniego punktu, t. j. do ciągłości.

C i ą g ł o ś ć. Któż wie, w jaki sposób można określić ściśle to pojęcie, nad którem trudziło się tylu filozofów od czasów D e m o k r y t a i A r y s t o t e l e s a? Aby uprzystępnić je dla zmysłów, mówimy, że wielkość jest ciągła, gdy może przechodzić z jednego stanu w drugi przez stopnie niepochwytne. Strzałka minutowa zegara zdaje się poruszać sposobem ciągłym, jakkolw.ek w rzeczy samej porusza się drobnemi skokami. Jej prędkość jest też dla zmysłów ciągłą. Idealizujemy nasze zmysłowe pojęcie ciągłości. Nie tylko mówimy, żo wielkość powinna przechodzić z jednego stanu do drugiego niepochwytnemi dla naszych zmysłów stopniami, lecz żądamy nadto, by pomiędzy każdemi dwoma stanami istniał inny, i tak dalej bez końca. Taki układ ma tworzyć c o n t i n u u m (obszar zwartej ciągłości). Taki niepośledni matematyk, jak B o l z a n o, przyjmował to w swoim filozoficznym traktacie „O paradoksach nieskończoności". Nikt tak dziś tej rzeczy nie uważa. Lecz nie tyle obchodzi nas to, na czem polega continuum w abstrakcyi, ile to, co stanowi krzywą ciągłą lub powierzchnię ciągłą. Im więcej rozmyślamy nad tem trudnem pytaniem, tembardziej dochodzimy do przeświadczenia, że definicya, jaką dać możemy, by służyć mogła za podstawę do ścisłych dedukcyj, w najlepszym razie może być interpretacyą przybliżoną mglistej i zwodniczej natury tego pojęcia. Może mieć ona jedynie wartość, wynikającą ze sprawdzenia a p o s t e r i o r i, że jest w zgodzie z innemi faktami naszej intuicyi. Taką definicyą jest znane kryteryum ε, δ C a u c h y'ego — W e i e r s t r a s s a. Przy pomocy tej definicyi można rozumować z bezwzględną precyzyą i subtelnością. Wnioski, z niej wyprowadzone, są w zgodzie z oczywistością naszej intuicyi. Możemy pokazać np., za pomocą metod czysto-arytmetycznych (i jak widzimy, tylko takie metody są dziś w użytku), że funkcya ciągła kilku zmiennych musi o s i ą g a ć swoje maximum, tak, że gdy podobna funkcya ma w punkcie P wartość a, a w innym punkcie Q wartość b, to przyjmuje wszystkie wartości pośrednie pomiędzy a i b, gdy zmienna przebiega sposobem ciągłym drogę od P do Q. Możemy także okazać, że krzywa zamknięta bez punktu podwójnego, odpowiadająca funkcyom ciągłym

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t)$$

musi tworzyć ograniczenie zupełne obszaru i t. p.

§ 4.

Wykazaliśmy należycie słuszność stanowiska arytmetyka. Może być ono stwierdzone w ten sposób. W intuicyi naszej mamy pojęcia: krzywych powierzchni, ciągłości i t. d. Aby uczynić z nich użytek, intuicyonista przekłada je na język arytmetyczny i stosuje do nich rozumowania, odnoszące się do funkcyj jednej lub wielu zmiennych, jak one mają miejsce dla liczb abstrakcyjnych. Arytmetyk jest zdania, że postępowanie takie jest niedopuszczalnem od chwili, gdy nie można okazać, że formułowanie arytmetyczne p r z y s t a j e do odpowiednich pojęć intuicyjnych. Co najwyżej możemy wtedy pokazać za pomocą sprawdzenia arytmetycznego, że obrane definicye zgadzają się z faktami naszej intuicyi.

Zanim skończę z tą rzeczą, pozwolę sobie uczynić parę uwag: 1-o Z naszej „definicyi ε“ funkcyi ciągłej wnosimy, że y musi przechodzić przez wszystkie wartości pośrednie od x_1 do x_2. Tę to własność przyjmuje się niekiedy za definicyę funkcyi ciągłej. Nie jest ona wszakże równoważna z definicyą pierwszą. Tak np. funkcya

$$y = 0 \text{ dla } x = 0\,,\quad y = \sin\frac{1}{x} \text{ dla } x \neq 0$$

jest ciągłą przy definicyi drugiej, nieciągłą przy pierwszej. 2-o Funkcya dwu zmiennych $z = f(x, y)$ określa się jako ciągła w obszarze R, jeżeli dla każdej wartości y w R, z jest funkcyą ciągłą zmiennej x i jeżeli dla każdej wartości x w R, z jest funkcyą ciągłą zmiennej y. Definicya ta nie jest wszakże równoważna z definicyą, jaką dziś przyjmujemy, jak to widać np. dla funkcyi

$$z = 0 \text{ dla } x = y = 0\,,\quad z = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ dla wszystkich innych punktów.}$$

Powiedzieliśmy, że obrane definicye arytmetyczne zgadzają się ze sobą dostatecznie. Zgodność ta wszakże nie jest tak zupełną, jakby sobie tego życzyć można było. Przedewszystkiem widzieliśmy, że funkcye ciągłe mogą przedstawiać osobliwości, których może nie posiadać krzywa ciągła intuicyjna, np. nieograniczoną liczbę kołysań w przedziale dowolnie małym oraz brak stycznych. Na te osobliwości winniśmy zwrócić uwagę. Rozpatrzymy je krótko w osobnych ustępach.

R e k t y f i k a c y a k r z y w y c h. Wyobrażamy sobie krzywą jako mającą długość Istotnie czytamy w „Elementach“ E u k l i d e s a następującą definicyę: linia jest długością bez szerokości. Jeżeli mamy dwie krzywe, możemy porównać jednę z drugą co do ich wielkości, t. j. długości, nie ustanowiwszy uprzednio świadomie sposobu ich mierzenia. Może nieświadomie przypuszczamy wtedy, że obie krzywe są opisane z równomierną szybkością i uważamy czas na to potrzebny. Być może, że wyobrażamy je sobie jako pasma nierozciągliwe, których długość otrzymuje się przez wyprostowanie. Mniej używany sposób mierzenia ich długości otrzymuje się, gdy toczymy je po drodze prostoliniowej. Mamy tu następujące zadanie: w jaki sposób należy sformułować arytmetycznie nasze pojęcia intuicyjne o długości linii krzywej. Intuicyonista powiada: krzywa, a raczej łuk krzywej posiada długość; ta długość jest liczbą L, którą otrzymujemy, obierając na krzywej pomiędzy dwoma jej końcami punkty $P, P_1, P_2 \ldots P'$ i tworząc sumę $\Sigma \overline{P_i P_{i+1}}$. Granicą tej sumy, gdy punkty są wszędzie gęste pomiędzy P, P' jest L.

Arytmetyk podnosi przeciwko temu następujące zarzuty. Jakkolwiek, powiada on, formułuję arytmetycznie to zagadnienie, nie mam wszakże a priori pewności, czy wzór mój zupełnie przystaje do intuicyi geometrycznej. Buduję wraz z intuicyonistą sumę powyższą, lecz ponieważ według mego zdania krzywe intuicyjne nie mają długości, wyrazić się dającej przez liczbę, powstrzymuję się przeto od przyjęcia z góry, że powyższa suma ma granicę. Przeciwnie, chcę dojść i przekonać się, czy granica istnieje, a w tym razie czy ma ona jednę i tęż samą wartość bez względu na to, w jaki sposób wybrano punkty P_i. Jeżeli zaś tak jest, to chcę dalej przekonać się, czy liczba, użyta jako określenie długości, prowadzi do konsekwencyj zgodnych z moją intuicyą. Faktem jest, że jeżeli przyjmiemy, iż nasza krzywa jest ciągła, to suma powyższa nie zawsze posiadać musi granicę. Jordan pierwszy zwrócił uwagę na fakt, że jeżeli krzywa, obok ciągłości, posiada długość zgodnie z powyższą definicyą, to musi być „a variation bornée", t. j. oscylować po pewnej drodze przepisanej. Łuk krzywej o równaniu (1), obejmujący początek, nie ma długości. Funkcya Weierstrassa

$$y = \sum_{0}^{\infty} b^n \cos a^n \pi x \,, \tag{1}$$

gdzie b jest stałą dodatnią mniejszą od jedności a, zaś liczbą nieparzystą większą od 1, stanowi inny przykład. Krzywa przy $ab > 1$ nie ma długości dla łuku, zawartego pomiędzy dwiema rzędnemi, jakkolwiek blizkiemi. Interesującem jest spostrzeżenie, że powyższe arytmetyczne sformułowanie naszych pojęć intuicyjnych o rektyfikacyi nie zależy wcale od istnienia pochodnej. Definicyą zwykłą jest:

$$s = \int dt \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,. \tag{2}$$

Te dwie definicye arytmetyczne nie są równoważne. Łatwo zbudować funkcyę, dla której ta całka jest pozbawiona zupełnie znaczenia, gdy tymczasem definicya pierwsza daje na długość liczbę dokładnie określoną. Du Bois-Reymond kwestyonuje prawo mówienia o długości krzywej, o ile nie jest dana przez wzór (2). Stwierdza to, że nasze interpretacye arytmetyczne są mniej lub więcej dowolne, a przynajmniej, że nie jest a priori oczywistem, iż są przystosowalnemi.

Kwadratura. Uwagi, uczynione w poprzednim paragrafie, stosują się zarówno i tu. Musimy twierdzeniu intuicyonisty, że każda krzywa płaska zamknięta ogranicza pole, zaprzeczyć, jakkolwiek F. Lindemann, wyborny krytyk Euklidesa, jeżeli go dobrze rozumiem, pogląd taki podziela [1]). Bez tej pewności intuicyonisty formułujemy arytmetycznie nasze pojęcia pola tak, jak to czynią Peano i Jordan. Definicya arytmetyczna ma zaświadczyć i pokazać, czy konkluzye, do których prowadzi, są w zgodzie z naszemi pojęciami o polu. Tak np., gdy podzielimy nasze pole nie na kwadraty zwykłe lecz na układy kwadratów krzywoliniowych, wtedy też mamy pole zgodne z definicyą; czy rezultat będzie ten sam co poprzednio? Oczywiście, rozumowanie, jakiego tu używamy, zgodnie z naturą tego zagadnienia, musi być czysto-arytmetyczne. Dodaję, że gdy nawet przyjmiemy wspomnianą definicyę arytmetyczną, to bynajmniej nie uzasadnimy jeszcze przez to twierdzenia, że figura zamknięta posiada pole. Mimochodem uczynimy uwagę oczywistą, że zwykła próba, stosowana do stwierdzenia istnienia całki określonej, jeżeli ma być uważana, jako stosująca się do pola, jest bezwzględnie złudną.

Co się tyczy kwadratury powierzchni w przestrzeni, to rzecz tu jest jeszcze bardziej subtelna, co jest widocznem, gdy rozważymy, że

---

[1]) „Vorlesungen über Geometrie", t. II, str. 557. Ustęp w mowie będący brzmi: „Einer allseitig umgrenzten Figur kommt ein bestimmter Flächeninhalt zu".

w tym przypadku osobliwości powierzchni ciągłych mogą być nieskończenie rozmaitszemi. Sformułowanie arytmetyczne pola powierzchni, które przez długi czas chętnie przyjmowano jest następujące: Wpiszmy w powierzchnię wielościan o małych ścianach trójkątnych; granica powierzchni takich wielościanów, gdy ich ściany maleją nieograniczenie, jest polem szukanem. Przedstawia to analogię do wpisywania wielokąta w krzywą, celem wyznaczania długości tejże. To formułowanie wszakże, jak pokazał S c h w a r z, prowadzi do sprzeczności i dla tego zastąpiono je innem.

Zanim zamkniemy rzecz o mierzeniu wielkości przez liczby, uczynimy jeszcze następującą uwagę. Przyjmuje się powszechnie, że wszystkie wielkości geometryczne i fizykalne dają się mierzyć; że droga, na jakiej to się odbywa, ma być niezależna od nas, a tkwić w pojęciu samej wielkości. Tego z pewnością przyjmować nie należy. Wielkości dają się mierzyć tylko wtedy, gdy mają lub gdy nadajemy im pewne własności; od nas zaś zależy wybór miary szczególnej.

K r z y w e, w y p e ł n i a j ą c e p o l e. Jakkolwiek nieokreślonem jest nasze pojęcie o krzywej i powierzchni, twierdzono wszakże, że krzywa jest zasadniczo jednowymiarową, powierzchnia dwuwymiarową mnogością punktów. Niejasne pojęcie wymiarowości tu rozważanej, znajduje swoję interpretacyę w liczbie zmiennych niezależnych, określających położenie jednego z punktów przestrzeni. Z tego stanowiska, równania

$$(1) \qquad x = f(t), \; y = g(t), \; z = h(t),$$

zależne od jednego parametru t, przedstawiają krzywą, równania zaś

$$(2) \qquad x = f(t, u), \; y = g(t, u), \; z = h(t, u),$$

w których są dwa parametry t i u, przedstawiają powierzchnię. To właśnie mamy na myśli, mówiąc o wymiarowości, gdy tymczasem intuicyonista skłania się ku stosowaniu intuicyi geometrycznej przy badaniu analitycznem takich funkcyj. Badania C a n t o r a w teoryi mnogości wykazały już dawno (1877), że taki pogląd jest fałszywy. Pokazał on, że rozmaitość o danej liczbie wymiarów daje się wprowadzić w odpowiedniość jedno-jednoznaczną z rozmaitością jednowymiarową. Wynika stąd, że liczba parametrów, używanych do określenia położenia punktu w mnogości, jest w ogóle dowolna. Peano pierwszy podał przykład, w którym funkcye o równaniach (1) są ciągłe, a mimo to odpowiadająca im mnogość punktów jest kwadratem lub sześcianem, gdy t zmienia się od 0 do 1. Cesàro pokazał, w jaki sposób funkcye takie mogą być przedstawione analitycznie, Hilbert zaś, jak takie krzywe zbudować można przy pomocy rozważań geometrycznych [1]. Mimochodem zwrócę uwagę na fakt, że krzywe pomocnicze Hilberta wyjaśniają w sposób bardzo piękny potrzebę pracowitego dowodu Jordana [2], że te wielokąty nigdy nie przestają mieć punktów wewnętrznych. Krzywe Peana i Hilberta wyjaśniają nam bardziej przekonywająco niż jakikolwiek inny przykład, jak niezupełnem jest nasze pojęcie o linii krzywej i jak zbyt pośpiesznem jest przyjmować, że ponieważ pewne funkcye proste przedstawiają krzywe intuicyjne, to i tożsamo musi być ze wszystkiemi krzywemi. Zauważę, że ze znanych krzywych najbliższemi do poprzednich są cyklojdy. Tak np. hypocykloida ma równania:

$$x = f(t) = a\left\{m \cos t + \cos mt\right\},$$

$$y = g(t) = a\left\{m \sin t - \sin mt\right\}.$$

Gdy parametr t rośnie nieograniczenie, m zaś pozostaje niewymiernem, punkt x i y zbliża się nieograniczenie blizko do punktu koła, po którem ruch się odbywa; ale żadna część krzywej nie wypełnia najmniejszego chociażby pola. Jestto w zupełnej zgodzie z naszem pojęciem krzywej.

Przykłady Peana i Hilberta pokazały, że nie można ściśle nakreślić linii demarkacyjnej pomiędzy naszemi pojęciami intuicyjnemi krzywych i powierzchni. Rozważmy jeszcze jeden przykład. Niechaj dla prostoty będzie kwadrat. Weźmy punkty, których obie spółrzędne są wymierne. Wynika stąd mnogość punktów takich, że

---

[1] Patrz „Prace matematyczno-fizyczne“, t. V, str. 13—14. *S. D.*

[2] Cours d'analyse. I, str. 94 i nast.

można przejść sposobem ciągłym od jednego do drugiego bez wyjścia z rozmaitości. Czy jest to powierzchnia czy krzywa? Jeżeli mówimy, że to nie jest powierzchnia, bo posiada tylko punkty na ograniczeniu, wtedy krzywa P e a n a nie jest krzywą, lecz jest powierzchnią. Jaki rodzaj funkcyi ma to przedstawiać, jeżeli nazwiemy to krzywą?

Przerywamy te rozważania naszych pojęć o krzywych. Wynika z nich z pewnością, że rozmaite własności, które pospolicie przypisujemy linii krzywej, są z sobą tak niezgodne, iż możemy powiedzieć wraz z K l e i n e m „że z matematycznego punktu widzenia nic dziś nie zdaje się być ciemniejszem i bardziej nieokreślonem od tego pojęcia“ [1]).

§ 5.

Zamykając rzecz naszą, powiemy, że pogląd intuicyonisty na wartość oczywistości intuicyi utrzymać się nie da. Widzieliśmy wszędzie, że pojęcia, z intuicyi wynikające, są niejasne i niezupełne i że nie podobna wykazać ich przystawalności do równoważników arytmetycznych. Praktyka intuicyonistów, polegająca na uzupełnianiu w danym momencie rozumowania analitycznego za pomocą argumentów czerpanych z intuicyi, usprawiedliwić się nie daje.

Intuicyonista mniema, że gdy napisze równanie krzywej, to kryteryum ciągłości, wyrażenie jej długości i t. d. posiada przystosowalne przedstawienie w faktach geometrycznych. Arytmetyk jest zdania, że niepodobna a p r i o r i nabrać zaufania w tym względzie. Dla niego zasadnicze znaczenie mają wzory arytmetyczne, które stoją w związku mniej lub więcej ścisłym z pewnemi pojęciami geometrycznemi. Własności tych wzorów wyprowadzają się za pomocą metod arytmetycznych, a ich wyniki się porównywamy z tem, czego oczekujemy od naszej intuicyi. Tylko w razie zgodności można

---

[1]) Math. Ann. 50, str. 586.

twierdzić, że wzory arytmetyczne były szczęśliwie obrane. Albo można rzecz przedstawić inaczej: mamy dwa światy: świat naszych zmysłów i intuicyi oraz świat liczb. Przedmioty pierwszego dają nam sposobność do tworzenia pewnych przedmiotów w świecie liczb, który staramy się możliwie przystosować do oryginału. Jak wykończyć tę kopię, tego nie wiemy ani umiemy. Bez wątpienia jest ona dostatecznie przybliżoną.

Matematyk dzisiejszy, wyrobiony w szkole Weierstrassa, ma zasadę do nazywania swej nauki: „die absolut klare Wissenschaft“. Wszelkie usiłowania do wciągnienia go w spekulacye metafizyczne odpycha on z energiczną niechęcią. Z bolesnem wrażeniem śledzi smutne pomieszanie metafizyki z matematyką, które było tak częstem w stuleciu poprzedniem i na początku bieżącego [1]). W istocie analiza dzisiejsza jest nauką przejrzystą. Zbudowana jest na prostem pojęciu liczby, a jej prawdy najgruntowniej są uzasadnione w całej dziedzinie wiedzy ludzkiej. Nie należy wszakże zapominać o tem, że cena, za którą uzyskujemy tę jasność, jest przerażającą — bo jest nią rozbrat zupełny ze światem zmysłów.

[1]) Hamilton, Life, t. I, p. 304, pisze w liście z r. 1828 „Algebraista, usuwający metafizyczne szkopuły, zalegające podstawy analizy, bez poświęcenia metod dokładnych i potężnych, stanowiących jej istotę i wartość, robi dzieło użyteczne i strzeże dobra nauki“.