O OBJĘTOSCIACH BRYŁ, UTWORZONYCH RUCHEM PRZESTRZENNYM FIGURY NIEZMIENNEJ

napisał

T. Rudzki.

I.

W artykule niniejszym, mam zamiar podać niektóre własności ruchów w przestrzeni, będące niejako uogólnieniem tych, które się odnoszą do kwadratury rulet przy ruchach posuwistych [1]).

Na zasadzie analogii łatwo jest przewidzieć, że i w tym ogólniejszym przypadku obliczanie objętości zamkniętej w danej powierzchni ułatwia się, ilekroć wiemy, że ta ostatnia może być utworzona ruchem figury postaci prostej lub też ruchem, którego własności są nam znane. Wyrazem tej myśli przewodniej jest znane twierdzenie Pappusa — Guldina, dające możność obliczania objętości powierzchni obrotowych.

Twierdzenie to uogólnił Koenigs [2]), rozszerzając je na jakikolwiek ruch przestrzenny danej powierzchni S, ograniczonej krzywą zamkniętą C. Można tu zauważyć, że objętość V, utworzona ruchem powierzchni S, nie zmieni się, jeżeli odkształcimy w jakikolwiek sposób tę powierzchnię, pozostawiając krzywą C bez zmiany, że zatem V zależy tylko od postaci linii krzywej, ograniczającej daną powierzchnię. Koenigs dowiódł, że objętość ta może być w najogólniejszym przypadku przedstawiona za pomocą wzoru

$$(1) \qquad V = Al + Bm + Cn + La_0 + Mb_0 + Nc_0$$

---

[1]) Patrz „Wiadomości matematyczne", tom niniejszy str. 1 i nast.

[2]) Koenigs. Leçons de Cinématique, p. 437.

w którym układ wielkości (A, B, C, L, M, N) zależy tylko od postaci krzywej $C-(a_0, b_0, c_0, l, m, n)$ zaś jedynie od rodzaju ruchu, nadanego powierzchni. Mianowicie, oznaczając składowe skrętu chwilowego figury F, odniesione do układu prostokątnego (x, y, z), poruszającego się razem z daną figurą przez [1])

$$\xi, \eta, \zeta, p, q, r \tag{2}$$

mamy:

$$\begin{aligned} a_0 &= \int p dt \quad b_0 = \int q dt \quad c_0 = \int r dt \\ l &= \int \xi dt \quad m = \int \eta dt \quad n = \int \zeta dt . \end{aligned} \tag{3}$$

Napisawszy równania (1) dla siedmiu krzywych zamkniętych C_k, należących do tego samego układu niezmiennego i wyrugowawszy z nich wielkości (a_0, b_0, c_0, l, m, n) otrzymujemy równanie:

$$\sum_1^7{}_k V_k \beta_k = 0 \tag{4}$$

w którem spółczynniki β_k są niezależne od rodzaju ruchu, udzielonego układowi.

Równanie (4) wykazuje dobitnie analogię pomiędzy twierdzeniem Koenigsa i zagadnieniem Zeuthena, podanem w „Nouv. Annales des Math.“ 1871, str. 90 [2]). W rozdziale niniejszym zamierzamy podać inne uogólnienie tego zagadnienia.

W przypuszczeniu, że odcinek AB, należący do układu $(x\,y\,z)$, porusza się z tym układem w jakikolwiek sposób, można łatwo

---

[1]) Składowe skrętu chwilowego można wyrazić przez spółczynniki przekształcenia

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= (x-a)\,\alpha + (y-b)\,\alpha' + (z-c)\,\alpha'' \\ \mathfrak{y} &= (x-a)\,\beta + (y-b)\,\beta' + (z-c)\,\beta'' \\ \mathfrak{z} &= (x-a)\,\gamma + (y-b)\,\gamma' + (z-c)\,\gamma'' \end{aligned}$$

za pomocą znanych wzorów, które czytelnik znajdzie w podręcznikach mechaniki teoretycznej.

[2]) Wiad. mat. „O kwadraturach krzywych“ § VIII.

obliczyć objętość bryły V_{AB}, opisanej przez trójkąt ABO, w którym AO i BO są wektory, łączące punkty A, B z punktem nieruchomym O (początkiem układu nieruchomego $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$.

Aby uniknąć wzorów na przekształcenie spółrzędnych $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ na $x\,y\,z)$, nadających wzorom na obliczanie objętości postać złożoną, znajdźmy odrazu objętość V_{AB} w układzie $(x\,y\,z)$. W tym przypuszczeniu punkt O będzie miał spółrzędne (a, b, c), których zmienne wartości zależą od danego położenia figury F. Oznaczywszy spółrzędne punktów (A, B) przez (x, y, z) i (x_1, y_1, z_1) możemy rzuty prędkości tych punktów na osie układu $(x\,y\,z)$ wyrazić wzorami:

$$A\left\{\begin{array}{l} v_x = \xi + qz - ry \\ v_y = \eta + rx - pz \\ v_z = \zeta + py - qx \end{array}\right. \qquad B\left\{\begin{array}{l} v_{1x} = \xi + qz_1 - ry_1 \\ v_{1y} = \eta + rx_1 - pz_1 \\ v_{1z} = \zeta + py_1 - qx_1 \end{array}\right.$$

które nam dają możność obliczenia rzutów przesunięć $(\overline{AA_1}, \overline{BB_1})$, obu punktów na też same osie.

Uważając objętość elementarną, opisaną przez $\overline{AB}$, jako sumę dwóch ostrosłupów $\overline{OAA_1B}$, $\overline{OBA_1B_1}$, równającą się z dokładnością do nieskończenie małych 2-go rzędu:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x-a & , & y-b & , & z-c \\ x+v_x\,dt-a & , & y+v_y\,dt-b & , & z+v_z\,dt-c \\ x_1+v_{1x}\,dt-a & , & y_1+v_{1y}\,dt-b & , & z_1+v_{1z}\,dt-c \end{vmatrix}$$

$$(5)\quad +\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x-a & , & y-b & , & z-c \\ x_1+v_{1x}\,dt-a & , & y+v_{1y}\,dt-b & , & z+v_{1z}\,dt-c \\ x_1-a & , & y_1-b & , & z_1-c \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x-a & , & y-b & , & z-c \\ v_x+v_{1x} & , & v_y+v_{1y} & , & v_z+v_{1z} \\ x_1-a & , & y_1-b & , & z_1-c \end{vmatrix}\,dt\,,$$

możemy szukaną objętość V_{AB} wyrazić przez całkę:

$$(6)\quad \frac{1}{6}\int \begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ x_1-a & y_1-b & z_1-c \\ q(z+z_1)-r(y+y_1)+2\xi, & r(x+x_1)-p(z+z_1)+2\eta, & p(y+y_1)-q(x+x_1 \end{vmatrix}$$

i wyprowadziwszy spółrzędne (x, y, z, x_1, y_1, z_1) za znak całkowania, uważać ją jako funkcyę 3-go stopnia tych spółrzędnych.

Przy całkowaniu należy, podobnie jak przy obliczaniu pola rulet, uważać $(a, b, c, \xi, \eta, \zeta, p, q, r)$ jako pewne funkcye argumentu t. Wyrazy 3-go stopnia w równaniu (6) będą dane przez wyznacznik:

$$(7)\quad \Delta = \frac{1}{6}\int \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ q(z+z_1) & r(x+x_1) & p(y+y_1) \\ -r(y+y_1) & -p(z+z_1) & -q(x+x_1) \end{vmatrix} dt.$$

Rozwijając ten ostatni, otrzymamy równanie:

$$(7')\quad 6\Delta = M_x\int p\,dt + M_y\int q\,dt + M_z\int r\,dt = M_x a_0 + M_y b_0 + M_z c_0 .$$

Pozostałe wyrazy w (6) są stopnia 2-go i niższych względem zmiennych $x, x_1 \ldots$ Ponieważ równanie (6) jest zbudowane analogicznie do równań dla pól rulet, możemy więc wyprowadzić tu podobny wniosek, mianowicie: że między objętościami brył, opisanych przez pewną liczbę odcinków $\overline{A_k B_k}$ figury F, istnieje zależność

$$\Sigma\, \gamma_k \,.\, V_{\overline{A_k B_k}} = 0$$

w której spółczynniki γ_k są jedynie funkcyami wzajemnych odległości punktów A_k, B_k.

Z dyskusyi równania (6) można wyprowadzić następujące wnioski:

1. Jeżeli punkt B odcinka AB nie zmienia swego położenia w poruszającym się układzie, wtedy można—przyjąwszy ten punkt jako początek spółrzędnych — nadać równaniu (6) postać:

$$(8) \qquad V_{AB} = \frac{1}{6}\int \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ qz-ry+2\xi\,, & rx-pz+2\eta\,, & py-qx+2\zeta \end{vmatrix},$$

skąd wynika, że punkty A, dla których objętość $V_{\overline{AB}}$ ma jednakową wielkość, tworzą powierzchnię należącą do układu spółosiowych i spółśrodkowych powierzchni rzędu 2-go.

Jeszcze prostszy rozkład odcinków $\overline{AB}$, opisujących jednakowe objętości, otrzymamy przypuściwszy, że mają one wspólny punkt środkowy

$$X = \frac{x+x_1}{2}\,, \quad Y = \frac{y+y_1}{2}\,, \quad Z = \frac{z+z_1}{2}\,;$$

natenczas łatwo okazać, że końcowe punkty tych odcinków leżą na dwóch płaszczyznach równoległych.

2. Jeżeli przypuścimy, że $a = b = c = 0$, t. j., że figura F obraca się około początku spółrzędnych, jak około punktu stałego, to w równaniu (6) pozostaną tylko wyrazy 3-ej potęgi względem (x, y, z, x_1, y_1, z_1) t. j.:

$$(7'') \qquad 6V_{\overline{AB}} = 6\Delta = M_x a_0 + M_y b_0 + M_z c_0\,.$$

Napisawszy wzory (7″) dla czterech rozmaitych odcinków ($A_k B_k$, $k = 1, 2, 3, 4$) i wyrugowawszy spółczynniki (a_0, b_0, c_0), otrzymamy równanie liniowe jednorodne

$$\sum_1^4 a_k V_{\overline{A_k B_k}} = 0\,,$$

które oznacza, że twierdzenie Zeuthena można bezpośrednio zastosować do t. zw. ruchu sferycznego, t. j. do obrotu figury F około punktu stałego.

3. Przesunąwszy przez wielobok zamknięty $ABCDE\ldots F$ jakąkolwiek powierzchnię, możemy na objętość V, opisaną przy

ruchu sferycznym przez tę ostatnią, napisać według Koenigsa wzór:

$$V = La_0 + Mb_0 + Nc_0 , \tag{9}$$

w którym L, M, N oznaczają pewne całki, rozciągnięte na obwód $AB \ldots F$. Pokażemy w jaki sposób wielkości te można w danym przypadku obliczyć, unikając całkowania.

W istocie, zważmy że bryłę V można rozłożyć na szereg brył ostrosłupowych V_{AB}, V_{BC}, $V_{CD} \ldots V_{FA}$ t. j. przedstawić jako sumę algebraiczną:

$$V = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + \ldots + V_{FA} + (\text{obj. piramidy } OA_1 B_1 C_1 \ldots F_1 - \text{obj. piramidy } OA_2 B_2 C_2 \ldots F_2) . \tag{9'}$$

Ponieważ jednak ruch figury jest sferyczny, więc dwa ostatnie wyrazy, odpowiadając początkowemu i końcowemu położeniom wieloboku, wzajemnie się znoszą. Z równania (9') wynika zatem:

$$6V = a_0 \Sigma M_{kx} + b_0 \Sigma M_{ky} + c_0 \Sigma M_{kz} . \tag{10}$$

Przyrównywając obie wartości na V (9, 10), mamy:

$$a_0 . (6L - \Sigma M_{kx}) + b_0 (6M - \Sigma M_{ky}) + c_0 (6N - \Sigma M_{kz}) = 0 .$$

Wyrazy w nawiasach ostatniego równania zależą tylko od wzajemnych położeń boków wielokąta, możemy więc wielkościom a_0, b_0, c_0 nadać niezależne od tych wyrazów wartości; z tej uwagi zaś wynikają równania:

$$6L = \Sigma M_{kx} \quad , \quad 6M = \Sigma M_{ky} \quad , \quad 6N = \Sigma M_{kz} .$$

Na początku niniejszego rozdziału przypuściliśmy, że trójkąt ABO, opisujący objętość V, ma stały wierzchołek (O); przy ruchu odwrotnym, odcinek $\overline{AB}$, należąc do układu (xyz), zachowuje położenie niezmienne, gdy tymczasem punkt O opisuje jakąkolwiek krzywą przestrzenną. Widzimy więc, że i danemu punktowi (O) poruszającego się układu odpowiada pewna

określona objętość (W_0), utworzona przez zmienny trójkąt ABO o stałej podstawie AB i ruchomym wierzchołku O.

Przyjąwszy dla prostoty długość odcinka $\overline{AB}$ równą jedności, oznaczywszy przez a, b, c spółrzędne punktu A, przez $a+\gamma, b+\gamma', c+\gamma''$ spółrzędne punktu B, wreszcie przez xyz — punktu O w układzie (xyz), i zachowując poprzednie oznaczenia, możemy łatwo wyprowadzić wzór:

$$(11) \qquad 6\,W_0 = \frac{1}{6}\int \begin{vmatrix} \gamma & \gamma' & \gamma'' \\ x-a & y-b & z-c \\ \xi+qz-ry\,, & \eta+rx-pz\,, & \zeta+py-qx \end{vmatrix} dt\,,$$

który wykazuje, że i w tym przypadku punkty o jednakowej objętości ($W_0 = \text{const}$), tworzą układ powierzchni stopnia 2-go.

Zauważmy jeszcze, że wzór wyrażający objętość W_0 w spółrzędnych $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$ będzie miał postać analogiczną z wzorem (11), mianowicie:

$$W = \frac{1}{6}\int \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \mathfrak{x}-\bar{a} & \mathfrak{y}-\bar{b} & \mathfrak{z}-\bar{c} \\ d\mathfrak{x} & d\mathfrak{y} & d\mathfrak{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\int \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \mathfrak{x} & \mathfrak{y} & \mathfrak{z} \\ d\mathfrak{x} & d\mathfrak{y} & d\mathfrak{z} \end{vmatrix} - \frac{1}{6}\int \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ d\mathfrak{x} & d\mathfrak{y} & d\mathfrak{z} \end{vmatrix}.$$

W tym przypadku jednak spółrzędne $(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})$ i $(\bar{a}+\gamma_0, \bar{b}+\gamma_1, \bar{c}+\gamma_2)$ punktów A, B w układzie $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$, jako wielkości stałe można wyprowadzić za znak całkowania. Ponieważ zaś dla torów zamkniętych:

$$\int d\mathfrak{x} = \int d\mathfrak{y} = \int d\mathfrak{z} = 0\,,$$

więc całka W jest wtedy niezależna od $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ t. j. objętość W_0, odpowiadająca danemu punktowi O przy ruchu peryodycznym, pozostanie tą samą, jeżeli odcinek $\overline{AB}$ będziemy przesuwali jakkolwiek, nie zmieniając jego wielkości i kierunku.

Odpowiedni rezultat dla objętości V_{AB}, rozważanych w niniejszym rozdziale jest jak wykazuje równanie (5), nieco odmienny, mianowicie wzory na V_{AB} zawierają spółrzędne (a, b, c) punktu O w pierwszej potędze, zatem objętość V_{AB} pozostanie bez zmiany dla wszystkich punktów O, leżących na pewnej określonej płaszczyźnie. Jestto szczególny przypadek twierdzenia, podanego przez Zeuthena w „Nouvelles Ann. des Mathématiques" I. (r. 1872).

II.

Kwadratura rulet jest, jak wiadomo, związana z określeniem środka ciężkości krzywizn dla ruchu posuwistego figury F. Należy oczekiwać, że przy ruchu przestrzennym figury F, środek układu powierzchni 2-go stopnia, które dają rozkład objętości, odpowiadających rozmaitym poruszającym się punktom, ma podobne własności, jak wyżej wymieniony środek ciężkości krzywizn.

Ażeby otrzymać te własności, przypomnijmy najprzód kilka zasadniczych twierdzień o ruchu układu niezmiennego.

1) Najogólniejszy ruch figury F można wywołać przez to, że pewna powierzchnia skośna, należąca do figury, toczy się ze ślizganiem po innej powierzchni skośnej, należącej do układu $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$. Powierzchnie te, które w skróceniu będziemy zwali aksoidami, stykają się w danej chwili wzdłuż wspólnej tworzącej, będącej osią skrętu chwilowego.

2) Ruch figury F może jeszcze być wywołany przez to, że stożek asymptotyczny (S_p) ruchomej aksoidy (p) toczy się (bez ślizgania) po stożku asymptotycznym (S_π) aksoidy nieruchomej (π), przyczem wierzchołek ostatniego posuwa się po pewnej krzywej, nadając w ten sposób ruch postępowy stożkowi S_π. Toczenie się stożka (S_p) po (S_π) jest ruchem sferycznym, który się składa z obrotów elementarnych około osi równoległych do osi skrętów. Elementarne kąty obrotu $(d\theta)$ danej figury F są odpowiednio równe kątom obrotu stożka S_p po (S_π). Ażeby otrzymać wzór na $d\theta$

przetnijmy oba stożki (S_p S_π) kulą o promieniu równym jedności, opisaną ze wspólnego ich wierzchołka jako środka. Otrzymamy w ten sposób krzywe wskazujące (C_p, C_π) danych stożków, które się w każdej chwili stykają w pewnym punkcie I. Oznaczając przez r i ϱ promienie krzywizn geodezyjnych obu krzywych w ich punkcie styczności, przez $d\tau$ element ich łuku, mamy zależność:

$$d\theta = \frac{d\tau}{r} + \frac{d\tau}{\varrho}. \tag{1}$$

Wykreślmy teraz na aksoidzie (π) dwie krzywe (t, u), przecinające wszystkie jej tworzące, uważając przytem, aby odległość tych krzywych (mierzona wzdłuż obu tworzących) była równa jedności, i oznaczmy przez W_M objętość, utworzoną ruchem zmien-

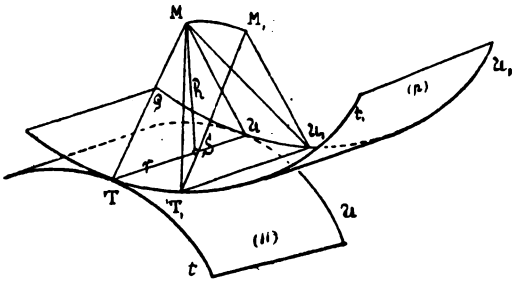

Fig 1.

nego trójkąta MTU, w którym wierzchołek M należy do figury F (T, U) zaś są punktami przecięcia krzywych (t, u) z tworzącemi (p).

Wprowadźmy oznaczenia:

$\overline{MS} = h =$ odległość prostopadła punktu M od prostej $\overline{TU}$; $\overline{MT} = \varrho$; $TS = r$; $V =$ objętość, utworzona ruchem trójkąta MTU, w przypuszczeniu, że wierzchołek M jest stały i że punkty T, U opisują na aksoidzie (p) krzywe (t', u') odpowiadające krzywym (t, u). Z uwagi końcowej § poprzedniego wnosimy, że V jest stałą wielkością dla wszystkich punktów pewnej płaszczyzny (N). Łatwo również dowieść, że dla punktu M' nie leżącego na tej płaszczyźnie jest:

$$(2) \qquad V_{M'} = V + Kd\,,$$

gdzie d jest odległością punktu M' od płaszczyzny N; K – rzutem części powierzchni (p) ograniczonej krzywemi (t_1, u_1) na powyższą płaszczyznę. W wielu jednak przypadkach objętość V_M jest w ogóle niezależna od położenia punktu M, do czego warunek konieczny zawiera się w tem, ażeby rzut powierzchni $(t_1\, u_1)$ na jakąkolwiek płaszczyznę był równy zeru. Wiadomo, że własność powyższą ma wszelka powierzchnia zamknięta, w której rzutowi danego elementu odpowiada rzut przeciwległego elementu, równy poprzedniemu co do wielkości i liczony ze znakiem przeciwnym. Jeżeli więc w takiej powierzchni przeprowadzimy takie równoległe płaszczyzny przecinające, aby suma algebraiczna pól, ograniczonych krzywemi przecięcia była równa zeru, wtedy i dla pozostałej części danej powierzchni: $K = 0$; tak np. rzut części hyperboloidy, utworzonej obrotem odcinka $\overline{AB}$ około jakiejkolwiek osi będzie zawsze równy zeru, niezależnie od położenia płaszczyzny rzutowej.

Uwzględniając równanie (2) możemy objętość W_M wyrazić wzorem:

$$(3) \qquad W_M = V_M + \frac{1}{6}\int(\varrho^2 - r^2)\, d\theta\,,$$

w którym drugi wyraz jest sumą czworościanów elementarnych, zbudowanych na odcinku $T_1\, U_1$ i elementarnych przesunięciach punktu M[1]); całka ta zatem jest niezależna od położenia krzywych (t, u) na aksoidzie (π).

Oznaczmy spółrzędne punktów M, T, U w układzie (xyz) odpowiednio przez (x, y, z), (a, b, c) $(a + A,\ b + B,\ c + C)$ oraz dla skrócenia przez I odległość $(Aa + Bb + Cc)$ punktu T od płaszczyzny $A\xi + B\eta + C\zeta = 0$, przechodzącej przez początek układu ruchomego i prostopadłej do tworzącej TU aksoidy (p); natenczas łatwy rachunek doprowadzi do wzoru:

---

[1]) Obliczamy te elementarne objętości tak, jak gdyby przesunięcia były obrotami, gdyż składowe przesunięć wzdłuż osi skrętu dają objętości równe zeru.

$$(4)\qquad \begin{aligned} W_M = V_M + \int [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \\ - (A(a-x) + B(b-x) + C(c-x))^2]\, d\theta\,, \end{aligned}$$

w którym według równania (1) jest:

$$d\theta = d\tau \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}\right).$$

Ażeby środek układu powierzchni

$$(4')\qquad W_M - V_M = \text{const}$$

był początkiem O układu (xyz), muszą wyrazy pierwszego stopnia w równaniu (4) być równe zeru, t. j.

$$(5)\qquad \int (a - I\,.\,A)\, d\theta = \int (b - I\,.\,B)\, d\theta = \int (c - I\,.\,C)\, d\theta = 0\,.$$

Z uwagi jednak, że rzuty pionu $\overline{OG}$, spuszczonego z początku O na tworzącą TU (aksoidy (p)) są odpowiednio równe:

$$g_x = a - I\,.\,A \quad , \quad g_y = b - I\,.\,B \quad , \quad g_z = c - I\,.\,C\,,$$

możemy napisać:

$$\int g_x\, d\theta = \int g_y\, d\theta = \int g_z\, d\theta = 0\,.$$

Stąd wynika twierdzenie:

Środek O układu powierzchni (4') jest zarazem środkiem ciężkości krzywej, utworzonej przez spodki pionów OG, spuszczonych z tego punktu na tworzące aksoidy (p) w przypuszczeniu, że waga elementów tej krzywej jest proporcyonalna do kątów elementarnych $(d\theta)$ obrotu figury F.

W szczególnym przypadku, jeżeli objętość V_M jest niezależna od położenia punktu M, i jeżeli powierzchnie (4') są elipsoidami,

natenczas punktowi O odpowiada najmniejsza objętość W_O [1]). Wreszcie, jeżeli aksoidy stają się parą walców, z których jeden (p) toczy się po drugim (π), możemy łatwo, przechodząc od objętości W_M do pól opisanych promieniem wodzącym $\overline{MS}$, otrzymać znane twierdzenie Steinera. Wtedy wszystkie możliwe krzywe, utworzone przez punkty G, zlewają się z centrodyą ruchomą (p) i punkt O staje się środkiem ciężkości krzywizn.

---

[1]) W istocie niech:

$$V = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$+ 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a,$$

będzie funkcyą 2-go stopnia zmiennych (x, y, z). Jeżeli funkcya ta w punkcie O posiada maximum lub minimum, to jak wiadomo, spółrzędne x_0, y_0, z_0 tego punktu czynią zadość równaniom:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1) = 0, \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

te ostatnie jednak równocześnie określają środek powierzchni

$$V = \text{const},$$

których równanie w układzie złożonym z osi głównych tych powierzchni ma postać

$$V = A_0X_1^2 + B_0Y_1^2 + C_0Z_1^2 + D_0 = \text{const}.$$

Wiadomo, że warunkiem koniecznym, aby funkcya V miała w punkcie O maximum lub minimum jest ten, aby spółczynniki A_0, B_0, C_0 były jednakowego znaku, skąd wnosimy, że powierzchnie

$$V = \text{const},$$

muszą być elipsoidami. Na odwrót, jeżeli powierzchnie $V = \text{const}$ są elipsoidami, to wspólny ich środek O jest punktem, któremu odpowiada najmniejsza objętość V.

III.

Jeżeli powierzchnię daną odniesiemy do układu spółrzędnych krzywoliniowych (u, v), to objętość V stożka, którego wierzchołek jest początkiem układu prostokątnego (xyz), podstawę zaś stanowi część powierzchni, da się wyrazić wzorem

$$(1) \qquad 3V = \iint \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_u, & y_u, & z_u \\ x_v, & y_v, & z_v \end{vmatrix} du\,dv$$

w którym pochodne cząstkowe oznaczone są przez skaźniki i całkowanie rozciąga się na wszystkie punkty rozpatrywanego obszaru powierzchni.

Dla ściślejszego wyznaczenia warunków stosowalności twierdzeń, odnoszących się do objętości, ograniczonych powierzchniami zamkniętemi, należy zastanowić się, jakie znaczenie geometryczne ma wtedy całka (1).

Wzmiankowaliśmy już poprzednio [1]), że jeżeli krzywa płaska zamknięta ma punkty wielokrotne, to, począwszy od takich punktów, możemy posuwać się po którejkolwiek z gałęzi tej krzywej i za każdą razą otrzymać dla całki

$$2S = \int (xdy - ydx),$$

inną wartość, oznaczaną geometrycznie za pomocą reguły Gaussa.

Podobnie, wykreśliwszy na danej powierzchni krzywe zamknięte (u = const, v = const), musimy przyjąć na tych krzywych pewien określony kierunek ruchu; wtedy w czworościanach elementarnych, których podstawę stanowi element powierzchni, kierunek obrotu od (du) do (dv) (t. j. od stycznej do krzywej v = const do stycznej u = const), widzianego z początku O układu, będzie zu-

[1]) Patrz „Wiad. matematyczne". T. III, str. 7.

pełnie określony i również według znanej reguły będzie określony znak objętości elementarnej

$$\frac{1}{3}\left| x, x_u, x_v \right| du\, dv\,.$$

Dla sąsiednich punktów powierzchni, powyższy kierunek ulega zmianie dopiero, jeżeli:

1) znajdują się one po drugiej stronie krzywej, w której stożek styczny do danej powierzchni, przeprowadzony z punktu O, dotyka tej ostatniej,

2) lub też jeżeli krzywe spółrzędne (np. $u =$ const) przecinają się w jednym punkcie, nie zmieniając swego kierunku,

3) wreszcie, jeżeli kierunek sąsiednich krzywych spółrzędnych zmienia się na odwrotny.

Widzimy więc, że dozwolonem jest przechodzić od jednego układu $(u\,v)$ do innego $(u'\,v')$ tylko wtedy, jeżeli punkty w których obrót (od du do dv) zmienia swój kierunek, są w obu układach jednakowe.

Przypuśćmy teraz, że wierzchołek stożka (1) zmienia swe położenie względem układu; w § II zauważyliśmy już, że objętość V pozostaje bez zmiany, jeżeli rzuty prostopadłe danej powierzchni na jakiekolwiek płaszczyzny będą równe zeru. Element takiego rzutu będzie ograniczony rzutami krzywych spółrzędnych, co nam daje możność oznaczenia kierunku obrotu (od rzutu du do rzutu dv) w tym elemencie i znaku, z jakim należy wziąć pole tego ostatniego.

Otóż można wyobrazić sobie zawsze powierzchnie zamknięte i na nich takie spółrzędne krzywoliniowe, dla których chociaż prosta prostopadła do płaszczyzny rzutu przecina powierzchnię w parzystej liczbie punktów, to jednak liczba elementów dodatnich, odpowiadających tym punktom, nie będzie równa liczbie elementów ujemnych. Dla takich powierzchni więc poprzednio rozważane rzuty nie są w ogóle równe zeru.

Dla przykładu weźmy powszechnie znaną powierzchnię jednostronną [1]), którą można otrzymać, składając prosto-

[1]) Möbius. Gesammelte Werke. Tom II. p 519.

kątną wstęgę papierową $ABCD$ tak, aby punkty A i B przystały odpowiednio do punktów C i D. Wtedy, proste BC i AD utworzą jedną krzywą zamkniętą, przez którą możemy przesunąć jeszcze jakąkolwiek powierzchnię, np. stożek o dowolnym wierzchołku R. Otrzymamy w ten sposób zamkniętą powierzchnię jednostronną, mającą krzywą podwójną. (Zresztą łatwo zauważyć, że zamknięta powierzchnia jednostronna musi

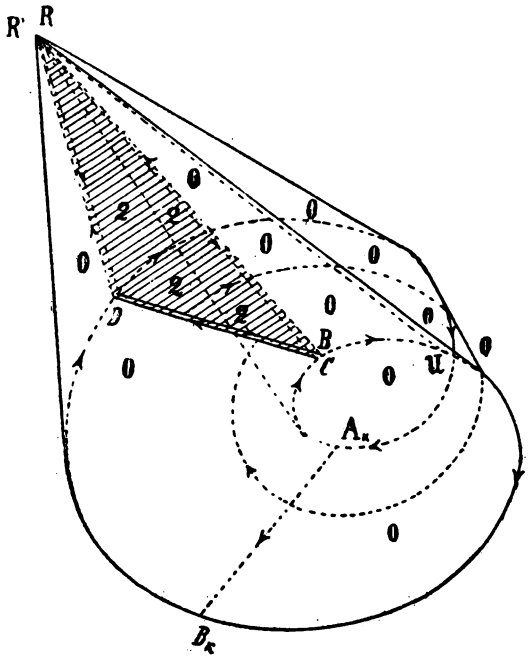

Fig. 2

zawsze mieć krzywe wielokrotne lub przynajmniej punkty wielokrotne).

Przypuśćmy teraz, że punkt ruchomy opisuje tę powierzchnię, suwając się kolejno po zamkniętych trójkątach RAB, RA_kB_k ... w kierunku, oznaczonym przez kierunek odcinków $\overline{AB}$,..., $\overline{A_kB_k}$, powstałych z prostych równoległych do boków $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ wstęgi $ABCD$.

Można wtedy okazać, że jeżeli obwody powyższych trójkątów będziemy uważali jako krzywe spółrzędne (v = const), to wybór początkowych punktów na krzywych (u = const) wpływa już na wielkość całki V. W istocie, jeżeli zmienimy początkowe położenie $\overline{AB}$ odcinka $\overline{A_kB_k}$ (na A_1B_1) to trójkąty, odpowiadające położeniom między $\overline{AB}$ i $\overline{A_1B_1}$, będą miały inny kierunek obrotu niż poprzednio [1]).

Rozważania powyższe prowadzą do ogólnego rezultatu, podanego przez Möbius'a [2]) dla t. zw. wielościanów jednostronnych. Jeżeli zmieniamy położenie punktu O (lub też układ spółrzędnych krzywoliniowych [3]) u, v=const) to jednak w ogóle, nawet jeżeli dana powierzchnia jest zamknięta, całka V nie pozostaje niezmienną.

Należy jednak zaznaczyć, że pomiędzy wielościanami i powierzchniami zamkniętemi (jednostronnemi) istnieje zasadnicza różnica: w ostatnich mianowicie można zawsze znaleść taki układ spółrzędnych krzywoliniowych, przy których całka V ma wartość niezmienną.

Jako przykład niech służy powierzchnia, utworzona obrotem lemniskaty Bernouillego około osi $\overline{MN}$, przecinającej tę krzywą jedynie w jej środku U. Powierzchnia ta ma punkt wielokrotny U; by pokazać, że jest ona jednostronną, przypuśćmy, że na normalnych

---

[1]) Załączona figura przedstawia szczególny przypadek, kiedy krzywa $AU(CB)U(DA)$ jest płaską. Krzywe spółrzędne (v = const) są dane przez obwody trójkątów RA_kB_k, krzywe (u = const) przyjmiemy, jako tory punktów ruchomego trójkąta (RA_kB_k), które to punkty wyznaczymy np. w ten sposób, że stosunek ich odległości od końcowych punktów odcinka, na którym leżą (AB, AR, RB), jest stały.

Krzywe (u = const) nie są zamknięte, kierunek ich jest kierunkiem ruchu opisującego je punktu. Mając w ten sposób kierunki obu układów krzywych, można określić z figury sumę rzutów powierzchni ($RACBD$) na płaszczyznę krzywej ($ACBD$); suma ta jest równa podwójnie wziętemu polu trójkąta $AR'B$ (R'=rzut punktu R na powyższą płaszczyznę) i, jak widzimy, znika tylko w szczególnych przypadkach.

[2]) Möbius. Gesam. Werke. Bd. II, p. 499.

[3]) Ta druga możliwość oczywiście nie ma znaczenia dla wielościanów.

do niej odkładamy odcinki równej długości ($\pm a$) w obu kierunkach. Otrzymamy w ten sposób dwie powierzchnie obrotowe, które się zlewają w jednę, gdyż mogą być utworzone obrotem jednej i tej samej krzywej. Można zatem przejść z jednej strony powłoki naszej powierzchni w dowolnym punkcie, posuwając się po niej, na drugą, przyczem trzeba jednak koniecznie przejść przez punkt wie-

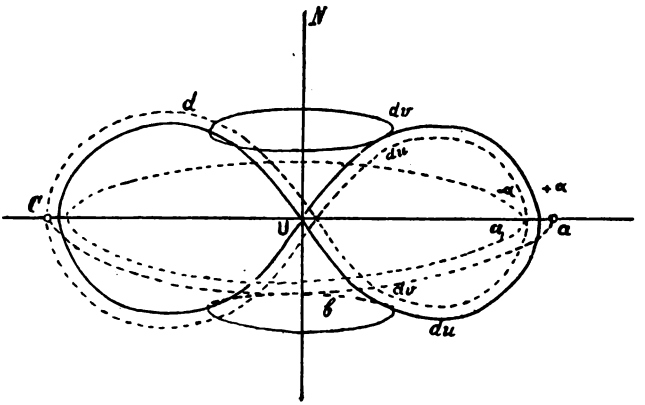

Fig. 3.

lokrotny U [1]). Jeżeli odniesiemy powyższą powierzchnię do układu południków i równoleżników, to łatwo przekonać się z załączonej figury, że rzuty na jakąkolwiek płaszczyznę są równe zeru i że całka V jest niezależna od położenia układu (xyz).

IV.

Przechodzimy z kolei do ruchów przestrzennych, badanych głównie przez Mannheima. W tych ostatnich położenia ruchomej figury F są funkcyami 2-ch parametrów niezależnych (u, v)

---

[1]) Niektórzy autorowie podają inne określenie „jednostronności“ na podstawie którego, każdą powierzchnię zamkniętą należy uważać jako dwustronną. Poincaré. Journ. de l'Ecole polyt. 1895, str. 29.

i dlatego też każdy punkt pozostaje podczas swego ruchu (w ogólności) na pewnej powierzchni, zwanej powierzchnią torową (surface trajęctoire) tego punktu.

Dla ruchów o 2-ch parametrach można utworzyć wielkości analogiczne do składowych skrętu chwilowego, uważając już to (u), już to (v), jako zmienną niezależną.

Z wielkości tych, które oznaczymy przez

$$\xi, \eta, \zeta, p, q, r \; ; \; \xi_1, \eta_1, \zeta_1, p_1, q_1, r_1 \, ,$$

można składowe skrętu chwilowego, przeprowadzającego figurę w położenie sąsiednie, wyznaczyć w sposób następujący [1]):

$$\xi_0 = \xi \frac{du}{dt} + \xi_1 \frac{dv}{dt} \qquad p_0 = p \frac{du}{dt} + p_1 \frac{dv}{dt}$$

$$\eta_0 = \eta \frac{du}{dt} + \eta_1 \frac{dv}{dt} \qquad q_0 = q \frac{du}{dt} + q_1 \frac{dv}{dt}$$

$$\zeta_0 = \zeta \frac{du}{dt} + \zeta_1 \frac{dv}{dt} \qquad r_0 = r \frac{du}{dt} + r_1 \frac{dv}{dt}$$

rzuty zaś przesunięć punktu (x, y, z) na osi (xyz), związane z figurą F, przez wzory

$$v_x \, dt = (\xi + q \, z - r \, y) \, du$$

$$v_{1x} dt = (\xi_1 + q_1 z - r_1 y) \, dv \ldots \text{ i t. d.}$$

Darboux podał w wielokrotnie wspomnianym artykule [2]) wzór na objętość V stożka, którego podstawę tworzy część powierzchni torowej danego punktu (xyz), zajmowana kolejno przy rozmaitych położeniach figury i którego wierzchołek (O) jest początkiem układu nieruchomego $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$. Wzór ten ma w oznaczeniach §§ I i II postać [3])

---

[1]) Koenigs. Leçons de Cinématique, p. 225.

[2]) Darboux. Bulletin. 1878, p. 352.

[3]) W pracy Darboux'a został podany mylnie jako spółczynnik całki V ułamek $\frac{1}{6}\left(\text{a nie } \frac{1}{3}\right)$. Błąd ten zaznaczamy, gdyż powtarza się on konsekwentnie w całym artykule.

$$(1)\quad V=\frac{1}{3}\iint\begin{vmatrix} x-a\ , & y-b\ , & z-c \\ qz-ry+\xi\ , & rx-pz+\eta\ , & py-qx+\zeta \\ q_1z-r_1y+\xi_1\ , & r_1x-p_1z+\eta_1\ , & p_1y-q_1x+\zeta_1 \end{vmatrix} du\,dv$$

i może być wyprowadzony w ten sam sposób, jak analogiczny wzór § I. Poucza on, że objętość V jest w ogóle funkcyą trzeciego stopnia spółrzędnych danego punktu (M) w układzie (xyz).

Darboux dowiódł, że wyrazy 3-go stopnia tej funkcyi mają kształt:

$$(2)\qquad (x^2+y^2+z^2)\,(A_1x+B_1y+C_1z)$$

i że wskutek tego równanie ($V=$ const) określa szereg powierzchni 3-go rzędu, przechodzących przez koło urojone w nieskończoności.

Zarówno, jak i przy ruchach o jednym parametrze, korzystnem jest tu rozważanie ruchu sferycznego, równokierunkowego z danym, t. j. ruchu układu niezmiennego F_1 $(x_1\ y_1\ z_1)$, którego osi są w każdej chwili równoległe do odpowiednich osi układu (xyz). Oczywiście dla ruchu sferycznego figury F_1 obroty p, qr, p_1, q_1, r_1 zachowują tę samą wartość, co i dla danego.

Iloczyn (2) wyraża właśnie objętość, opisaną przez punkt (x, y, z) figury F_1 przy przesunięciach, określonych w sposób powyższy; spółczynniki zaś A_1, B_1, C_1, dają nam odpowiednio trzecią część pól opisanych przez punkty

$$(1,0,0)\quad (0,1,0)\quad (0,0,1)$$

figury F_1.

Wreszcie Darboux zwraca uwagę na przypadek, w którym V staje się funkcyą drugiego stopnia spółrzędnych punktu (xyz).

Przypadek ten zachodzi, jeżeli np. przypuścimy, że przy stałej wartości na parametr (u) punkty figury F opisują tory zamknięte, i że to samo nastąpi, jeżeli przypuścimy $v=$ const i będziemy drugiemu parametrowi (u) nadawali wszystkie możliwe wartości; wtedy obroty $p, q, r\ p_1, q_1, r_1$, na początku i końcu rozpatrywanych ruchów

będą jednakowe i spółczynniki A_1, B_1, C_1, które Darboux wyraża przez całki:

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
3\,A_1 &= \iint \left(\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u}\right) du\,dv \\
3\,B_1 &= \iint \left(\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u}\right) du\,dv \\
3\,C_1 &= \iint \left(\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u}\right) du\,dv
\end{aligned}
$$

rozciągnięte na wszystkie możliwe wartości (u, v), staną się równe zeru.

Należy zaznaczyć, że całki te jednak niezawsze znikają przy peryodycznym ruchu figury F; tak np. w razie obrotu około punktu stałego, jeżeli punkty układu opisują całkowitą powierzchnię kuli, mamy:

$$3\,A_1 = 3\,B_1 = 3\,C_1 = 4\,\pi\,.$$

W danym przypadku pochodzi to stąd, że południki, jako krzywe spółrzędne na kuli, nie są zamknięte, gdyż rozciągają się od jednego bieguna do drugiego, t. j. w granicach

$$\text{od} \quad u = 0 \quad \text{do} \quad u = \pi\,.$$

Gdybyśmy obu parametrom na kuli nadawali wartości od 0 do 2π, to opisalibyśmy w ten sposób powierzchnię kuli dwa razy i powierzchnię tę, tak obliczoną, musielibyśmy uważać jako równą zeru [1]).

Rozważając ruchy przestrzenne dla których

$$(4) \qquad A_1 = B_1 = C_1 = 0$$

---

[1]) Ten sam rezultat możemy otrzymać w inny sposób, uważając kulę jako szczególny przypadek powierzchni, utworzonej obrotem koła około jakiejkolwiek prostej, leżącej w płaszczyźnie tego koła (t. zw. pierścienia kołowego). Łatwo okazać, że dla tej powierzchni $A_1 = B_1 = C_1 = 0$ i że z reguły Guldina w szczególnym przypadku wynika, że powierzchnia kuli jest równą zeru.

przyjął Darboux, że krzywe spółrzędne są zamknięte t. j., że figura wraca w końcu ruchu do położenia początkowego. Ponieważ jednak wielkości (A_1, B_1, C_1) zależą tylko od obrotów elementarnych figury, więc ażeby były one równe zeru, dostatecznem jest by figura F_1, obdarzona ruchem sferycznym, równokierunkowym z danym, wracała do położenia początkowego przy pewnych nowych wartościach parametrów (u, v). Czyli, innemi słowy, jeżeli figura F wykonywa ruch, przy którym jest spełniony warunek (4) i jeżeli udzielić jej nowy ruch o 2-ch parametrach, w którym przesunięcia elementarne różniłyby się od poprzednich tylko w wielkościach $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$, to i w tym drugim przypadku, aczkolwiek powierzchnie torowe nie będą w ogóle zamknięte, objętości V muszą być funkcyami 2-go stopnia spółrzędnych poruszających się punktów.

Dla przykładu przypuśćmy, że powierzchnie torowe odniesione są do układów krzywoliniowych (analogicznych do układu południków i równoleżników na powierzchniach obrotowych) i że w obu biegunach (Ω, Ω_1), w których przecinają się wszystkie krzywe jednego układu $(v = \text{const})$, obroty

$$p, q, r, p_1, q_1, r_1$$

otrzymują te same wartości.

Wtedy całkowania wzdłuż krzywych $(v = \text{const})$ odbywamy na przestrzeni, zawartej między punktami Ω i Ω_1 (t. j. od $u = u_0$ do $u = u_1$). Nie mniej jednak całka

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial p_1}{\partial u} du = p_1(u_1, v) - p_1(u_0, v)$$

będzie zerem, ponieważ według założenia:

$$p_1(u_1, v) = p_1(u_0, v) .$$

Przypuszczając następnie, że krzywe $(u = \text{const})$ są zamknięte i rozciągając całkowanie na wszystkie wartości (v), otrzymamy:

$$\int \frac{\partial p}{\partial v} dv = 0 ,$$

według równania (3), więc całka:

$$3A_1 = \iint \frac{\partial p}{\partial v} du\, dv - \iint \frac{\partial p_1}{\partial u} du\, dv$$

rozciągnięta na wyżej wymienione wartości parametrów (u, v), będzie równa zeru.

Stosując analogiczne rozumowanie do wielkości B_1, C_1 wnosimy, że warunek (4) może być spełniony, pomimo to, że krzywe spółrzędne ($v = \text{const}$) nie są zamknięte.

Podawszy w krótkości twierdzenia Darboux'a, zamierzamy zastanowić się szczegółowiej nad równaniem (1) oraz nad ruchami o 2-ch parametrach, o własnościach osobliwych, uwydatnionych przez Ribaucoura [1]) w jego badaniach nad zgięciem powierzchni.

Równaniu (1) można nadać postać:

$$(1') \qquad V = (x^2 + y^2 + z^2)(A_1 x + B_1 y + C_1 z) + f_2 ,$$

oznaczywszy przez f_2 wyrazy 2-go i niższych stopni względem (xyz).

Przetnijmy powierzchnie ($v = \text{const}$) szeregiem płaszczyzn równoległych

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = \text{const} ,$$

natenczas otrzymamy, jak wynika z równania (1'), w każdej z tych płaszczyzn układ ∞^1 stożkowych, spółśrodkowych i spółosiowych. Przez każdy punkt w przestrzeni przechodzi w ogóle jedna z tych krzywych, łączących go z innemi punktami, które opisują bryły tej samej objętości.

Płaszczyzna

$$D \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0$$

rozdziela punkty przestrzeni (xyz) na dwie kategorye; dla jednej wielkość D, a zatem i pierwszy wyraz równania (1') są zawsze

[1]) Sur la déformation des surfaces. Comptes Rendus t. LXX, p. 330.

dodatnie, dla drugiej — zawsze ujemne. Prócz tego należy zaznaczyć, że funkcya V może mieć maximum lub minimum tylko wtedy, jeżeli znikną wyrazy 3-go stopnia, t. j. jeżeli

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0 .$$

Przypuśćmy teraz, że skręty elementarne, za pomocą których można przejść z danego położenia figury do sąsiednich, przechodzą na obroty; wtedy, jak dowiódł Ribaucour, dany ruch może być wywołany przez toczenie się (bez ślizgania) pewnej powierzchni (P), związanej z figurą F, po nieruchomej powierzchni (Π), którą można z pierwszej otrzymać przez zginanie.

Powierzchnie (P) i (Π), rozwijalne jedna na drugiej, nazwiemy, przez analogię z krzywemi (p) i (π) przy ruchu posuwistym, centrodyami ruchu. Punkt styczności (XYZ) obu centrodyj ma w danym momencie prędkość równą zeru i wskutek tego rzuty tej prędkości na osi (xyz), przy kolejnej zmianie parametrów (u, v), czynią zadość równaniom:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \xi + qZ - rY &= \xi_1 + q_1 Z - r_1 Y = 0 \\ \eta + rX - pZ &= \eta_1 + r_1 X - p_1 Z = 0 \\ \zeta + pY - qX &= \zeta_1 + p_1 Y - q_1 X = 0 . \end{aligned}$$

Przypuszczając w dalszym ciągu, że istnieją centrodye, możemy nadać równaniu (1) inny kształt, który uwydatni rolę, jaką grają te powierzchnie przy obliczaniu funkcyi V.

Podstawiwszy w (1) zamiast $(\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ odpowiednie wartości z równań (5) i wprowadziwszy oznaczenia:

$$\begin{aligned} P &= qr_1 - rp_1 & \iint P\, du\, dv &= A_1 \\ Q &= rp_1 - pr_1 & \iint Q\, du\, dv &= B_1 \\ R &= pq_1 - p_1 q & \iint R\, du\, dv &= C_1 \\ I &= XP + YQ + ZR & K &= Xa + Yb + Zc , \end{aligned}$$

mamy:

$$(6)\quad 3\,V=\iint[x-a\,,\,q(z-Z)-r(y-Y)\,,\,q_1(z-Z)-r_1(y-Y)]\,du\,dv$$

$$=\iint[x^2+y^2+z^2-x(X+a)-y(Y+b)-z(Z+c)+K]\,[xP+yQ+zR-I]\,du\,dv\,.$$

V.

Podobnie jak przy kwadraturze rulet, można i dla ruchów o 2-ch parametrach obliczyć objętość W, zawartą między pewną częścią powierzchni torowej danego punktu, ograniczającemi ją normalnemi oraz centrodyą (Π). Aby znaleść różniczkę dW tej objętości, oznaczmy przez r odległość punktu M figury F w danem położeniu od chwilowego środka obrotu, przez F_0 element powierzchni torowej, przez F_ϱ i F_1 pola przecięć normalnych, zrobionych w odległościach ϱ i r od punktu M na normalnych, ograniczających element F_0.

Między elementami F_ϱ i F_0 istnieje zależność:

$$F_\varrho = F_0 + A\varrho + \theta\varrho^2$$

w której A jest iloczynem z F_0 przez średnią krzywiznę $\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ w tym elemencie (D a r b o u x. Théorie des surfaces I, p. 282. II, p. 367), θ zaś — krzywizną całkowitą tegoż elementu.

Z dokładnością do nieskończenie małych 3-go rzędu możemy objętość dW wyrazić jako całkę:

$$dW=\int_0^r F_\varrho\,d\varrho = F_0 r + \frac{Ar^2}{2} + \frac{\theta r^3}{3}$$

lub też rugując A z równania

$$F_1 = F_0 + Ar + \theta r^2$$

przez wzór:

$$dW = \frac{r}{2}(F_1 + F_0) - \frac{\theta r^3}{6},$$

stąd:

$$W = \frac{1}{2}\int rF_1 + \frac{1}{2}\int rF_0 - \int \frac{\theta r^3}{6}$$

łatwo przytem zauważyć, że $P = \frac{1}{3}\int (F_1\, r)$ wyraża objętość stozka, opisanego z punktu M, mającego jako podstawę część rozpatrywaną centrodyi ruchomej, że

$$\frac{1}{3}\int (F_0\, r) = \frac{1}{3}\iint \left| x-X,\, q(z-Z)-r(y-Y),\, q_1(z-Z)-r_1(y-Y) \right| dudv$$

i że wreszcie

$$\int \frac{\theta r^3}{3},$$

wyraża objętość

$$P' = \frac{1}{3}\iint \left| x-X, q(z-Z)-r(y-Y)-X_u, q_1(z-Z)-r_1(y-Y)-X_v \right| dudv$$

opisaną przez końcowy punkt M' promienia wodzącego $\overline{M'U} \# \overline{M\Omega}$ przeprowadzonego ze stałego dowolnego punktu U.

VI.

We wzorze (6) § IV wyrazy 3-go stopnia nie są w ogóle równe zeru, gdyż nawet jeżeli przyjmiemy, że centrodya (P) jest powierzchnią zamkniętą, to i wtedy odpowiadający jej obszar, utworzony przez rozwinięcie powłoki P na centrodyi Π, będzie miał w ogóle pewną krzywą graniczną. Wyjątek stanowi gatunek ruchów prze-

strzennych, mający, jak zauważył Darboux [1]), związek z teoryą t. zw. powierzchni spodkowych (podaires). By tego dowieść, przypuśćmy, że zamknięta centrodya P toczy się po symetrycznej do niej centrodyi Π tak, że odpowiednie punkty obu powierzchni staną się jednocześnie środkami chwilowemi obrotu. Ponieważ obie powierzchnie są rozwijalne jedna na drugiej, więc jakikolwiek punkt M związany z figurą P będzie podczas ruchu pozostawał na pewnej powierzchni; będzie on przytem w każdem położeniu symetryczny z odpowiednim (stałym) punktem M_1 względem płaszczyzny stycznej do obu centrodyj w punkcie Ω.

Wynika stąd, że odległość od M_1 spodka A pionu $\overline{MM_1}$ spuszczonego z punktu M_1 na płaszczyznę styczną (Ωt) jest połową odległości $\overline{MM_1}$, że zatem punkty M i A opisują powierzchnie homotetyczne, których objętości mają się do siebie, jak 8 : 1.

Objętość W_M, ograniczona powierzchnią, opisaną przez punkt A, t. j. t zw. powierzchnią spodkową punktu M_1, jest więc również jak i V_M funkcyą drugiego stopnia spółrzędnych punktu M (resp. M_1). Zgadza się to najzupełniej z rezultatem, otrzymanym dla powierzchni spodkowych przez Hirsta w Dzienniku Crellego (T. LXII, str. 247).

Z wzoru Hirsta na objętość W_M:

$$W_M = A - \left(\int p_0^2\, d\sigma \,.\, \alpha\right) x - \left(\int p_0^2\, d\sigma \,.\, \beta\right) y - \left(\int p_0^2\, d\sigma \,.\, \gamma\right) z + (xyz)_2$$

w którym α, β, γ są dostawami kierunkowemi pionu $(O\Omega = p_0)$, spuszczonego z początku spółrzędnych (xyz) na płaszczyznę styczną (Ωt), $d\sigma$ zaś krzywizną całkowitą elementu powierzchni (W_M), można łatwo określić pewną własność geometryczną środka powierzchni 2-go rzędu

$$W_M = \text{const},$$

które w ogóle, jak zauważył Hirst, są elipsoidami.

---

[1]) Darboux. Bulletin 1878, p. 355.

W istocie $dW = \frac{p_0^3 d\sigma}{3}$ wyraża objętość stożka elementarnego, opierającego się na elemencie powierzchni spodkowej punktu M i mającego wierzchołek w punkcie O. Oznaczając więc spółrzędne punktu Ω przez x_1, y_1, z_1, mamy:

$$\int (p_0^2 d\sigma \,.\, \alpha) = 3 \int \frac{x_1}{p_0^2} dW,$$

$$\int (p_0^2 d\sigma \,.\, \beta) = 3 \int \frac{y_1}{p_0^2} dW,$$

$$\int (p_0^2 d\sigma \,.\, \gamma) = 3 \int \frac{z_1}{p_0^2} dW.$$

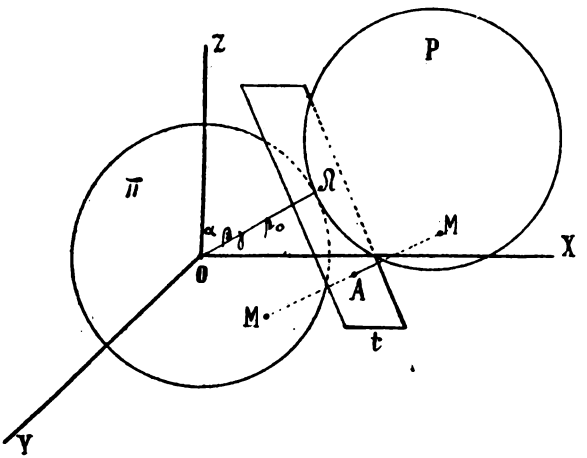

Fig. 4.

Z tych wzorów wynika, że punkt M_0, któremu odpowiada najmniejsza objętość W_M (t. j. środek układu elipsoid $W_M = \text{const}$), jest zarazem środkiem ciężkości masy, ograniczonej przez W_M, jeżeli gęstość stożków elementarnych przyjmiemy jako odwrotnie proporcyonalną do kwadratu ich wysokości.

Ażeby okazać, że rezultaty otrzymane dla ruchów przestrzennych mogą być z korzyścią stosowane w teoryi krzywych płaskich, dowiedziemy następującego twierdzenia.

Twierdzenie. Jeżeli krzywa $D_1D_2D_3D_4$ ma dwie osi symetryi, przecinające się w punkcie O pod kątem prostym, i jeżeli miejsce geometryczne spodków prostopadłych, spuszczonych z danego punktu M osi $\overline{D_2D_4}$ na styczne do części krzywej $D_1D_2D_3D_4$, leżącej po jednej stronie tej osi, nazwiemy krzywą P_M, to odległość środka ciężkości pola, ograniczonego przez krzywe P_0 i P_M od osi $\overline{D_2D_4}$ jest niezależna od położenia punktu M.

Dowodzenie. Niech P będzie powierzchnią obrotową, utworzoną przez obrót krzywej D_1D_4 około osi D_2D_4 i W_M — miejscem geometrycznem spodków prostopadłych, spuszczonych z punktu M na płaszczyzny styczne do P.

W danym przypadku powierzchnie W_M są również jak i P obrotowe. Według Hirsta, jeżeli P jest powierzchnią postaci owalnej, natenczas powierzchnie równych objętości są elipsoidami i dla tego można objętość W_M, przyjąwszy środek O krzywej $D_1 \ldots D_4$ za początek i D_2D_4 za oś (Z) układu prostokątnego, wyrazić w sposób następujący:

$$(1) \qquad \begin{cases} W_M = W_0 + K \,.\, \overline{OM}^2 = W_0 + Kz^2 \\ W_M - W_0 = Kz^2 \,. \end{cases}$$

W tem równaniu spółczynnik K jest wielkością dodatnią, inne zaś spółczynniki funkcyi 2-go stopnia, przez którą można wyrazić W_M, stają się, wskutek wyboru osi i symetryi figury, równe zeru.

Z (1) wynika, że punktowi O odpowiada najmniejsza objętość (W_0) oraz że różnica $W_M - W_0$, wyrażająca objętość, zawartą między powierzchniami W_M i W_0 jest proporcyonalną do z^2. Z drugiej strony bryła ta może być utworzona obrotem około osi $\overline{D_2D_4}$ figury zamkniętej przez krzywe P_M i P_0; a zatem, oznaczywszy przez x odległość środka ciężkości tej figury od $\overline{D_2D_4}$, mamy według znanego twierdzenia Guldina:

$$(2) \qquad 2\pi x (P_M - P_0) = Kz^2 \,.$$

Wielkość $P_M - P_0$, według twierdzenia Steinera (p. „O kwadraturach krzywych etc.“. „Wiad. mat.“ 1899, str. 5) jest równa $\frac{\pi}{4} z^2$, jeżeli dane krzywe są postaci owalnej.

Z równania (2) wynika więc:

$$x = \frac{2K}{\pi^2} = \text{const}.$$

Jeżeli krzywa $D_1 \ldots D_4$ jest kołem o promieniu r, wtedy możemy łatwo obliczyć odległość x środka ciężkości pola S od danej średnicy $D_2 D_4$ koła.

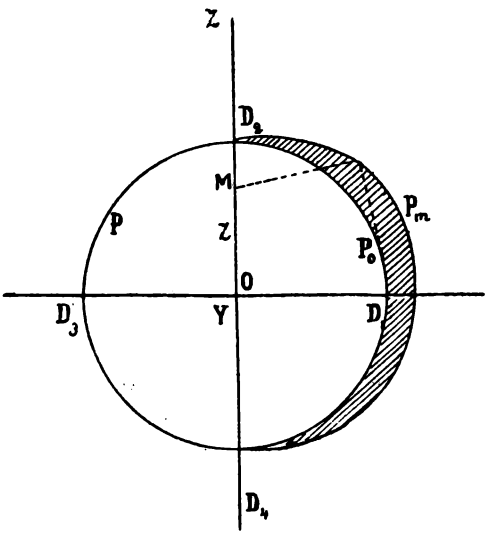

Fig. 5.

Wtedy bowiem krzywa P_0 jest identyczna z kołem, a zatem:

$$P_M - P_0 = \frac{\pi z^2}{4}$$

i według Hirsta:

$$W_M - W_0 = \frac{4}{3} \pi r z^2,$$

skąd:

$$x = \frac{8r}{3\pi}.$$

W ten sposób otrzymujemy twierdzenie.

Środek ciężkości pola S ograniczonego półkolem $D_2D_1D_4$ i krzywą P_M, odpowiadającą danemu punktowi M średnicy D_2D_4, jest dwa razy bardziej oddalony od tejże średnicy, niż środek ciężkości powierzchni półkola $D_2D_1D_4$.

Uwaga. Dla możności stosowania poprzedniego twierdzenia musimy uwzględnić następujące warunki:

1) Krzywe P_0 i P_M winny tworzyć razem krzywą zamkniętą, i dla tego pochyłość stycznych do krzywej $D_1 \ldots D_4$ musi zmieniać się w sposób ciągły.

2) Przy obliczaniu spółczynnika K, dla którego Hirst podaje wzór

$$K = \int p_0 d\sigma \cos^2 \gamma,$$

musimy, jak wynika z § III-go, wprowadzić jako spółrzędne (u, v) te same krzywe, które przyjmujemy zwykle przy dowodzeniu twierdzeń Guldina i Steinera, t. j. układ równoleżników i południków na powierzchniach.

3) Pole S, ograniczone przez P_0 i P_M, winno być również obliczane według reguły Gaussa, przytem krzywą P_0, której pole w równaniu (2) jest wzięte ze znakiem ujemnym, należy też między punktami D_2D_4 przebiegać w kierunku ujemnym, t. j. w tym samym co i krzywą P_M.

Ażeby wreszcie módz stosować twierdzenie Guldina, jeżeli pole S składa się z dwóch części, leżących po obu stronach osi obrotu (D_2D_4), musimy objętości, utworzone obrotem tych części, przyjąć ze znakami odwrotnemi. Również oznaczając położenie środka ciężkości, należy w elementach ujemnych figury S wyobrazić sobie siły równoległe, skierowane prostopadle do S w kierunku ujemnym, tak np. jeżeli figura S jest symetryczna względem osi obrotu (D_2D_4),

to pole jej $(P_M - P_0)$ jest równe zeru, odległość zaś środka ciężkości (x) od tejże osi jest równa nieskończoności.

Przechodząc napowrót od powierzchni W_M do ruchu punktu M_1, związanego z centrodyą (P), toczącą się po symetrycznej względem niej centrodyi (Π), możemy otrzymać, na zasadzie uwagi Darboux'a, analogiczne twierdzenie dla objętości, ograniczonych przez powierzchnie torowe punktów M_1. Ponieważ te powierzchnie są homotetyczne względem powierzchni obrotowych W_M, otrzymujemy więc w danym przypadku ciekawy przykład ruchów o dwóch parametrach, w których każdy punkt pewnej prostej, opisuje powierzchnię obrotową. Wreszcie, jeżeli powierzchnia P jest kulistą, każdy punkt figury F ma tę samą własność.

VII.

Na zakończenie podamy jeszcze zależność między objętościami, odpowiadającemi punktom prostej, poruszającej się jakimkolwiek sposobem względem układu $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$.

Przyjmując tę prostę za oś x układu (xyz) mamy z równania (1) dla punktu M o spółrzędnej x:

$$(1) \qquad 3\, V_M = A_1 x^3 + B_1 x^2 + B_2 x + B_3 \,.$$

Przypuśćmy, że trzy punkty $(M_1\, M_2\, M_3)$ prostej ślizgają się po płaszczyznach $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \mathfrak{z}\mathfrak{x}, \mathfrak{z}\mathfrak{y})$ układu prostokątnego, wtedy dany czwarty punkt M opisuje elipsoidę, której objętość będzie równa

$$V_M = \frac{4\pi}{3}\, \overline{MM_1}\; \overline{MM_2}\; \overline{MM_3}\,.$$

Ponieważ między funkcyami V dla czterech punktów prostej istnieje, jak wynika z (1), równanie liniowe, więc objętość W_M nie zmieni się, jeżeli zamiast po trzech płaszczyznach będziemy ślizgali punkty $M_1\, M_2\, M_3$ po jakichkolwiek trzech przecinających się powierzchniach.

Należy przytem tylko wypełnić warunek, aby objętości odpowiadające punktom M_1 M_2 M_3 były równe zeru i by całka

$$\frac{A_1}{3} = \frac{\int\int P\,du\,dv}{3},$$

była równa $\frac{4\pi}{3}$, t.j. odpowiadała całkowitej powierzchni kuli o promieniu równym jedności. W taki sposób otrzymaliśmy twierdzenie analogiczne do podanego w § III art. „O kwadraturach rulet".

Twierdzenie analogiczne do twierdzenia Holditcha, podali Elliot (Messenger of Mathematics 1878, p. 150) oraz Darboux.

Uwaga. Z równania (1) wynika, że na każdej prostej istnieją w ogóle trzy punkty, w którym przy danym ruchu odpowiadają równe objętości.

VIII.

Jeżeli figura F jest obdarzona ruchem posuwistym, to długości krzywych, powłóczonych przez proste tej figury, dają początek zależnościom, podobnym do tych, jakie istnieją między ruletami rozmaitych jej punktów.

Należy więc oczekiwać czegoś analogicznego przy rozważaniu powierzchni, powłóczonych przez płaszczyzny figury F przy ruchu przestrzennym. Zależności te jednak są postaci bardziej zawiłej niż poprzednie i dla tego ograniczę się na krótkiem przedstawieniu rezultatów, odpowiadających tym ruchom przestrzennym o 2-ch parametrach, dla których istnieją centrodye (P, Π).

Zachowując oznaczenia §§ III, IV, obliczmy pole powierzchni, którą powłóczy płaszczyzna

$$r \equiv lx + my + nz + k = 0. \quad (l^2+m^2+n^2=1)$$

Oznaczywszy przez R długość pionu $\overline{PM}$, spuszczonego ze środka chwilowego obrotu (Ω) na płaszczyznę (r), otrzymamy dla spółrzędnych punktu M (spodka tego pionu) wartości:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= X - lR \\ y &= Y - mR \qquad (R = lX + mY + nZ + k) \\ z &= Z - mR \end{aligned}$$

Powierzchnię szukaną można uważać jako utworzoną ruchem tego punktu M i wyrazić za pomocą całki:

$$(2)\qquad P = \iint \begin{vmatrix} l\,, & m\,, & n \\ v_x\,, & v_y\,, & v_z \\ u_x\,, & u_y\,, & v_z \end{vmatrix} du dv\,,$$

w której $v_x, \ldots, u_x \ldots$ oznaczają składowe w kierunkach osi (xyz) prędkości bezwzględnych punktu M przy zmianie kolejnej parametrów (u, v).

Ponieważ punkt M porusza się względem układu (xyz), więc jego prędkość bezwzględna jest sumą geometryczną prędkości odniesienia i prędkości względem układu (xyz).

Z tej uwagi wynikają dla wielkości (v_x, v_y, v_z) następujące wzory:

$$u_x = \xi + qz - ry + \frac{\partial x}{\partial u} = R \begin{vmatrix} q, & r \\ m, & n \end{vmatrix} + \frac{\partial X}{\partial u} - l\frac{\partial R}{\partial u}\,,$$

$$u_y = \eta + rx - pz + \frac{\partial y}{\partial u} = R \begin{vmatrix} r, & p \\ n, & l \end{vmatrix} + \frac{\partial Y}{\partial u} - m\frac{\partial R}{\partial u}\,,$$

$$u_z = \zeta + py - qx + \frac{\partial z}{\partial u} = R \begin{vmatrix} p, & q \\ l, & m \end{vmatrix} + \frac{\partial Z}{\partial u} - n\frac{\partial R}{\partial u}$$

i analogiczne dla (v_x, v_y, v_z).

Podstawiając powyższe wartości w równanie (2) i oznaczając pochodne cząstkowe za pomocą skaźników, możemy wzorowi (2) nadać postać:

$$P' = \iint \begin{vmatrix} l & m & n \\ R\begin{vmatrix} q, r \\ m, n \end{vmatrix} + X_u, & R\begin{vmatrix} r, p \\ n, l \end{vmatrix} + Y_u, & R\begin{vmatrix} p, q \\ l, m \end{vmatrix} + Z_u \\ R\begin{vmatrix} q, r \\ m\ n \end{vmatrix} + X_v, & R\begin{vmatrix} r, p \\ n, l \end{vmatrix} + Y_v, & R\begin{vmatrix} p, q \\ l, m \end{vmatrix} + Z_v \end{vmatrix} du dv$$

$$= P_0 + \iint R \begin{vmatrix} l & m & n \\ X_u & Y_u & Z_u \\ \begin{vmatrix} q, r \\ m, n \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} r, p \\ n, l \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} p, q \\ l, m \end{vmatrix} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} l & m & n \\ X_v & Y_v & Z_v \\ \begin{vmatrix} q, r \\ m, n \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} r, p \\ n, l \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} p, q \\ l, m \end{vmatrix} \end{vmatrix} du dv,$$

$$(3)\ P_0 = \iint \left(R^2 \begin{vmatrix} l & m & n \\ qn - rm, & rl - pn, & pm - ql \\ q_1 n - r_1 m, & r_1 l - p_1 n, & p_1 m - q_1 l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l, & m, & n \\ X_u, & Y_u, & Z_u \\ X_v, & Y_v, & Z_v \end{vmatrix} \right) du dv.$$

Wielkości (l, m, n, k) można wyprowadzić za znak całkowania i otrzymać w ten sposób na P funkcyę jednorodną trzeciego stopnia spółrzędnych płaszczyzny $(l\, m\, n\, k)$. Podobnym sposobem można dowieść, że objętość W stożka, utworzonego ruchem punktu M (określonego jak wyżej), jest funkcyą czwartego stopnia spółrzędnych (l, m, n, k) danej płaszczyzny.

Z wzoru (3) dadzą się wyprowadzić podobne wnioski do przedstawionych w poprzednich rozdziałach. Tak np. rozważając szereg równoległych płaszczyzn i przyjmując dla prostoty oś x prostopadle do ich kierunku, mamy dla pola powierzchni powłóczonej przez płaszczyznę o spółrzędnych $(1, 0, 0\ k)$ wzór:

$$P = A + Bk + \iint \begin{vmatrix} r & q \\ r_1 & q_1 \end{vmatrix} du dv \,.\, k^2$$

w której A i B są wielkościami stałemi.