Analogicznie dla iloczynu.

Analogicznie dla ilorazu, byleby funkcya dzieląca nie znikała w obszarze C.

12. Na podstawie powyższego możemy na funkcye analityczne rozciągnąć bezpośrednio twierdzenia, ustanowione dla szeregów potęgowych.

Rozważmy np. iloczyn

$$f_3(z) = f_1(z) f_2(z) .$$

Mamy:

$$P'_3(z) = P_1(z) P'_2(z) + P_2(z) P'(z) ,$$

a więc takiż związek zachodzić będzie pomiędzy funkcyami analitycznemi utworzonemi z tych elementów. Lecz szeregi $P'_i(z)$ wytwarzają funkcye $f'_i(z)$, a więc

$$f'_3(z) = f_1(z) f'_2(z) + f_2(z) f'_1(z) .$$

W podobny sposób postępujemy i w innych przypadkach.

Z TEORYI FUNKCYJ ANALITYCZNYCH

podał

Z. Krygowski.

Badania Poincarégo, Appella, Borela, Pringsheima i innych okazały wielką ważność dla teoryi funkcyj analitycznych szeregów kształtu

$$\sum_{(\nu)} \frac{c_\nu}{(z - A_\nu)^{m_\nu}} , \tag{1}$$

gdzie $\Sigma \mid c_\nu \mid$ jest wielkością skończoną, m_ν liczbami całkowitemi dodatniemi, zaś A_ν oznaczają punkty pewnych mnogości odliczalnych. Mnogości te mogą być odosobnione, mogą tworzyć linie lub obszary osobliwe, szeregi zatem (1) przedstawiają funkcye analityczne o pewnych szczególnych własnościach.

Wiadomo np., iż w pewnych razach punkty istotnie osobliwe funkcyi analitycznej mogą tworzyć mnogość liniową bezwzględnie doskonałą i nie gęstą w żadnym przedziale. W tym razie łuk krzywej L, na którym się znajdują punkty nie istotnie i istotnie osobliwe funkcyi analitycznej, nie jest linią osobliwą i przy pomocy szeregu Taylora, można funkcyę przeprowadzić z jednej strony łuku na drugą. Z drugiej strony, jak dowiódł I. Bendixson (Acta Mathematica, t. II, str. 427), można w nieskończenie wieloraki sposób wyrazić mnogość punktów, bezwzględnie doskonałą i w żadnym przedziale niegęstą, jako pochodną Q' mnogości Q odosobnionej, a więc według twierdzenia Cantora (Acta Math. t. II, str. 373) odliczalnej. Przypuśćmy zatem, co nie jest niemożliwe, iż punkty A_ν tworzą taką właśnie mnogość odosobnioną Q, natenczas odpowiadająca funkcya (1) będzie mieć punkty mnogości Q' jako punkty istotnie osobliwe, przyczem mnogość Q' jest bezwzględnie doskonałą, t. j. identyczna ze swemi pochodnemi Q'', Q''',... Widzimy stąd, iż szeregi kształtu (1) mogłyby przedstawiać funkcye analityczne, których punkty istotnie osobliwe w liczbie nieskończonej i o mocy ciągłości tworzą mnogość doskonałą i w żadnym przedziale nie gęstą [1]).

Uważajmy jeszcze inny przykład mnogości odosobnionych, które ważną grają rolę w uogólnionem twierdzeniu Mittag-Lefflera (Acta Mathematica t. IV, twierdzenie A i B). W tym celu pomyślmy sobie na odcinku $(-1, \ldots, +1)$ osi odciętych punkty

$$\frac{1}{m_1}, \; (m_1 = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

i wystawmy w każdym z tych punktów prostopadły odcinek, którego rzędne są:

$$\pm \sqrt{1 - \frac{1}{m_1^2}}.$$

[1]) Na okoliczność tę, o ile mi wiadomo, nie zwrócono dotąd uwagi.

Na każdym z tych odcinków prostopadłych pomyślmy sobie mnogość punktów

$$\frac{i}{m_2}\sqrt{1-\frac{1}{m_1^2}}\,,\quad (m_2=\pm 1, \pm 2, \ldots),$$

natenczas mnogość Q punktów danych przez wzór

$$A_{m_1, m_2}=\frac{1}{m_1}+\frac{i}{m_2}\sqrt{1-\frac{1}{m_1^2}}\,,\quad (m_1, m_2=\pm 1, \pm 2, \ldots),$$

jest mnogością odliczalną i odosobnioną, której pierwsza pochodna Q' obejmuje punkty $\frac{1}{m_1}$ i punkt 0, mnogość zaś Q'' tworzy jedynie punkt 0.

Funkcya, określona szeregiem

$$\sum_{(m_1, m_2)} \frac{q_1^{m_1} q_2^{m_2}}{z \mp \frac{1}{m_1} \mp \frac{i}{m_2}\sqrt{1-\frac{1}{m_1^2}}}\,,\ (m_1, m_2=+1, +2, \ldots),\ |q_1|<1, |q_2|<1,$$

czyli (po opuszczeniu czynnika 2) funkcya:

$$\sum_{(m_1, m_2)}\left[\frac{z-\frac{1}{m_1}}{\left(z-\frac{1}{m_1}\right)^2+\frac{1}{m_2^2}\left(1-\frac{1}{m_1^2}\right)}+\frac{z+\frac{1}{m_2}}{\left(z+\frac{1}{m_1}\right)^2+\frac{1}{m_2^2}\left(1-\frac{1}{m_1^2}\right)}\right] q_1^{m_1} q_2^{m_2}$$

$$(m_1, m_2)=1, 2, \ldots,$$

jest funkcyą analityczną jednowartościową i monogeniczną, należącą według klasyfikacyi Mittag-Lefflera — Guicharda do klasy trzeciej.

W pracy niniejszej podaję pewne uogólnienie i modyfikacyę szeregów (1).

1. Szeregi (1) zawdzięczają swą zbieżność istnieniu czynników c_ν, dla których $\Sigma \mid c_\nu \mid$ jest wielkością skończoną. Punktami osobliwemi są punkty A_ν jakoteż punkty mnogości pochodnej. Obok szeregów kształtu (1) istnieją jeszcze inne kształtu

(2) $$\sum_{(\nu)} \frac{\Phi(r, \theta ; A_\nu)}{(z - A_\nu)^{m_\nu}} ; \quad z = re^{\theta i} ,$$

dla których szereg

(3) $$\sum_{(\nu)} \Phi(r, \theta ; A_\nu) ,$$

jest rozbieżny, szereg zaś (2) bezwzględnie i jednostajnie zbieżny. W tym razie punktami osobliwemi funkcyi (2) mogą być jeszcze inne punkty niż te, które tworzą mnogość punktów A_ν i jej pochodną.

Uważmy w tym celu mnogość punktów A_ν, odliczalną i wszędzie gęstą dla pola koła, zakreślonego promieniem równym jedności z początku spółrzędnych, a nadto funkcyę J. Tanner y'ego

$$\psi(z) = - \frac{1+z}{1-z} - 2 \sum_{r=1}^{r=+\infty} \frac{z^{2^{r-1}}}{1 - z^{2^r}}$$

posiadającą tę własność, iż dla

$$|z| < 1 \quad , \quad \psi(z) = -1 ,$$

$$|z| > 1 \quad , \quad \psi(z) = +1 ,$$

a nadto mającą jako linię osobliwą koło $|z| = 1$, na którem znajdują się wszędzie gęsto punkty nieistotnie osobliwe, określone równaniami:

$$1 - z^{2^r} = 0 \quad , \quad (r = 1, 2, \ldots) .$$

Zatoczmy teraz z początku spółrzędnych jeszcze p—1 nowych kół spółśrodkowych z kołem $|z| = 1$, promieniami

$$|z| = 2, 3, \ldots, (p-1), \ p ; \quad p > 2$$

i połóżmy:

(4) $$\Phi(r, \theta ; A_\nu) = \psi(re^{\theta i} - A_\nu)\, \psi[(r-1)e^{\theta i} - A_\nu] \ldots \\ \ldots \psi[(r - p + 2) e^{\theta i} - A_\nu] .$$

O fnnkcyi

$$\sum_{(\nu)} \frac{\Phi(r, \theta\,;\, A_\nu)}{(z - A_\nu)^{m_\nu}}, \tag{5}$$

w której funkcya $\Phi(r, \theta\,;\, A_\nu)$ ma wartość (4), dowiedziemy:

1-o że pole koła, zatoczonego promieniem $|\, z \,| = p$ z początku spółrzędnych, jest obszarem osobliwym tejże;

2-o że dla wszystkich punktów, położonych pozą tem kołem (o promieniu p), szereg (5) jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny;

3-o że funkcya (5) jest dla tych ostatnich punktów funkcyą nietylko punktu (r, θ) lecz funkcyą analityczną i jednowartościową zmiennej zespolonej $z = re^{\theta i}$.

2. Dowiedziemy naprzód pierwszej części twierdzenia. Uważajmy w tym celu punkty pierścienia, ograniczonego kołami o promieniach 1 i 2, które nazywać będziemy kołami (1) i (2). O pierścieniu tym dowiedziemy, iż jest obszarem osobliwym funkcyi (5). (Pole koła zakreślonego promieniem $|\, z \,| = 1$ jest obszarem osobliwym funkcyi (5), założyliśmy bowiem, iż punkty A_ν tworzą mnogość wszędzie gęstą w tem kole).

Z założenia możemy poprowadzić z początku spółrzędnych promienie nieskończenie gęsto takie, iż na każdym z nich znajdują się wszędzie gęsto punkty, należące do mnogości punktów A_ν. Uważajmy jeden taki promień zresztą dowolny, nachylony pod kątem θ' do osi odciętych i te z punktów mnogości A_ν, które znajdują się na tymże promieniu. Nazwijmy te punkty:

$$A'_1, A'_2, \ldots, A'_\nu \ldots$$

i niechaj będzie:

$$A'_1 = r_1 e^{\theta' i},\ A'_2 = r_2 e^{\theta' i}, \ldots, A'_\nu = r_\nu e^{\theta' i}, \ldots \tag{6}$$

Wszystkie te punkty mieszczą się na odcinku $(0 \ldots 1)$ tego promienia. Uważajmy teraz na odcinku $(1 \ldots 2)$ tegoż promienia, znajdującym się w pierścieniu, ograniczonym kołami (1) i (2) punkty:

$$(1 + r_1)\, e^{\theta' i},\ (1 + r_2)\, e^{\theta' i}, \ldots, (1 + r_\nu)\, e^{\theta' i}, \ldots, \tag{7}$$

tworzące na tym odcinku również mnogość wszędzie gęstą. Zobaczmy teraz, jak w tych punktach (7) zachowuje się szereg (5). Uważajmy w tym celu jeden z punktów tych np. punkt $(1+r_\nu)\, e^{\theta' i}$ oraz funkcyę

$$\Phi(r, \theta\,;\, A'_\nu) = \psi\,[re^{\theta i} - A'_\nu]\; \psi\,[(r-1)\, e^{\theta i} - A'_\nu] \ldots \tag{8}$$
$$\ldots \psi\,[(r-p+2)\, e^{\theta i} - A'_\nu]\,.$$

Będzie dla tego punktu:

$$\Phi\,[(1+r_\nu), \theta'\,;\, A'_\nu] = \psi\,[e^{\theta i}]\; \psi\,[0]\,.\, \psi\,[-e^{\theta' i}] \ldots \psi\,[-(p-3)\, e^{\theta' i}]\,.$$

Lecz z powodu, że $|\, e^{\theta i}\,| = 1$, mamy $\psi\,(e^{\theta i})$ nieoznaczonc lub też nieskończenie wielkie; wiemy bowiem, iż punkty na kole $|\, z\,| = 1$ są dla funkcyi tej punktami osobliwemi. Z tego powodu odpowiedni wyraz szeregu (5)

$$\frac{\Phi\,(r, \theta\,;\, A'_\nu)}{(z - A'_\nu)^{m'_\nu}}\,,$$

jest dla $z = (1 + r_\nu)\, e^{\theta' i}$ nieoznaczony lub też nieskończenie wielki. Innemi słowy, w punkcie tym szereg (5) jest rozbieżny lub ma wartość nieoznaczoną.

Zupełnie podobnie zbadać można zachowanie się funkcyi

$$\Phi\,(r, \theta\,;\, A'_\nu)$$

na odcinkach $(2, \ldots, 3)$, $(3, \ldots, 4)$ i t. d. uważanego promienia. Uważajmy np. odcinek $(p-1, \ldots, p)$, natenczas w punktach

$$(p-1)\, e^{\theta' i} + A'_\nu = (p - 1 + r_\nu)\, e^{\theta' i} \tag{9}$$

funkcye (8) przejdą na

$$\Phi\,[p - 1 + r_\nu, \theta'\,;\, A'_\nu] = \psi\,[(p-1)\, e^{\theta' i}]\; \psi\,[(p-2)\, e^{\theta' i}] \ldots \psi\,[e^{\theta' i}]\,,$$

a więc znowu z powodu czynnika $\psi\,[e^{\theta' i}]$ otrzymamy w tych punktach (9) szereg (5) rozbieżny lub o wartości nieoznaczonej. Natomiast już dla punktów odpowiednich poza kołem (p) na odcinku $(p, \ldots, p+1)$ uważanego promienia t. j. dla punktów

$$re^{\theta' i}\, (p + r_\nu)\, e^{\theta' i}\,,$$

funkcye (8) przejdą na

$$\Phi\,[p+r_\nu\,,\ \theta'\,;\ A'_\nu] = \psi\,[pe^{\theta' i}]\,\psi\,[(p-1)\,e^{\theta' i}]\ldots\psi\,[2\,e^{\theta' i}]\,,$$

czyli na podstawie własności funkcyi Tannery'ego mamy:

$$\Phi\,[p+r_\nu\,;\ \theta'\,;\ A'_\nu] = +1\,. \tag{10}$$

Z dyskusyi powyższej widzimy, iż istotnie pole koła o promieniu p jest obrazem osobliwym funkcyi (5).

3. Uważajmy teraz jakikolwiek punkt, położony zewnątrz pola koła (p). Dla punktów tych $z = re^{\theta i}$ mamy oczywiście $|\,z\,| - A_\nu\,| \geqq p-1$, a ponieważ w tych punktach

$$\Phi\,[r,\,\theta\,;\ A_\nu] = +1\,,$$

przeto:

$$\sum_{(\nu)} \frac{\Phi\,(r,\,\theta\,;\ A_\nu)}{(z-A_\nu)^{m_\nu}} = \sum_{(\nu)} \frac{1}{(z-A_\nu)^{m_\nu}}\quad;\ |\,z\,| > p\,,$$

czyli:

$$\sum_{(\nu)} \left|\,\frac{\Phi\,(r,\,\theta\,;\ A_\nu)}{(z-A_\nu)^{m_\nu}}\,\right| \leqq \sum_{(\nu)} \frac{1}{(p-1)^{m_\nu}}\,.$$

Uważajmy teraz szereg wielkości dodatnich i malejących ε_ν, takich, by $\sum\limits_{(\nu)} \varepsilon_\nu$ była skończone; kładąc nadto

$$\frac{1}{(p-1)^{m_\nu}} < \varepsilon_\nu\,,$$

czyli wyznaczając liczby całkowite dodatnie m_ν i rosnące tak, by spełniały warunek

$$m_\nu > \frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon_\nu}\right)}{\log(p-1)}\,,$$

otrzymamy dla wszystkich punktów $z = re^{\theta i}$, położonych zewnątrz pola koła $|\,z\,| = p$,

$$\sum_{(\nu)} \left|\,\frac{\Phi\,(r,\,\theta\,;\ A_\nu)}{(z-A_\nu)^{m_\nu}}\,\right| \leqq \sum_{(\nu)} \varepsilon_\nu\,,$$

skąd widzimy, iż szereg (5) jest w tych punktach bezwzględnie i jednostajnie zbieżny, przedstawia tedy na podstawie znanego twierdzenia Weierstrassa (Werke, t. II; Zur Functionenlehre), funkcyę analityczną jednowartościową i monogeniczną. Obszar $|z| \leqq p$ jest obszarem osobliwym tej funkcyi.

Oczywiście, że własności powyższych nie posiada szereg

$$\sum_{(\nu)} \frac{1}{(z-A_\nu)^{m_\nu}}, \tag{11}$$

albowiem, jakkolwiek mógłby on być rozbieżny dla pewnych punktów położonych w pierścieniu

$$1 \leqslant |z| \leqslant p,$$

to jednakowoż przeprowadzeniu elementu funkcyi (11) do wnętrza tego pierścienia nic nie stoi na przeszkodzie, punkty bowiem mnogości A_ν pokrywają jedynie wszędzie gęsto koło $|z| = 1$ i żaden z punktów tej mnogości z założenia nie znajduje się poza kołem $|z| = 1$.

4. Łatwe postępowanie powyższe uogólnić do przypadku, gdy zamiast koła $|z| = 1$ mamy krzywą zamkniętą $r = f(\theta)$ na zewnątrz wypukłą. W tym razie należy zamiast funkcyi (4) wprowadzić funkcyę

$$\Phi(r, \theta\,;\, A_\nu) = \psi\,[re^{\theta i} - A_\nu]\,\psi\,[(r - f(\theta)\,e^{\theta i} - A_\nu] \ldots$$
$$\psi\,[\{r - (p-2)\,f(\theta)\}\,e^{\theta i} - A_\nu],$$

a odpowiedni szereg (5) przedstawiać będzie funkcyę analityczną jednowartościową, dla której obszar, położony wewnątrz krzywej $r = p\,f(\theta)$, jest obszarem osobliwym.

W razie symetrycznego rozkładu punktów A_ν około punktu $z = 0$ np. w przypadku mnogości punktów

$$A_\nu = A_{m_1, m_2, m_3, m_4} + = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, e^{\frac{2\pi i m_3}{m_3 + m_4}}$$

wszędzie gęstej dla koła $|z| = 1$, pierścień $1 < |z| \leqq p$ zapełniają nieskończenie gęsto koła spółśrodkowe, które są liniami osobliwemi rozmaitych funkcyj (4).