w dziedzinie algebraicznych powierzchni minimalnych. Bardzo interesującemi są także badania, dotyczące związku powierzchni translacyjnych z teoryą całek abelowych. Poprzestajemy jednak na zanotowaniu tytułów tych poszukiwań, a treści ich omawiać już nie będziemy.

O RÓWNANIACH STOPNIA TRZECIEGO [1]

napisał

J. Sochocki.

1. ***Moduł i mnożnik równania stopnia 3-go.*** Niechaj będzie równanie rzeczywiste postaci:

$$(1) \qquad 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0;$$

oznaczmy pierwiastki jego przez e_1, e_2, e_3.

Rozwiązującą, określoną wzorem:

$$(2) \qquad \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2,$$

nazywać będziemy modułem równania (1) i dla skrócenia oznaczać przez k^2.

Wskutek wszelkich przestawień ilości e_1, e_2, e_3 we wzorze (2) moduł przybiera sześć wartości, z których dość jest mieć jednę, aby znaleść pozostałe i to przy pomocy działań bardzo prostych, wcale niezależnych od spółczynników g_2, g_3.

[1] Wyjątek z większej rozprawy, która będzie ogłoszona w całości w „Pracach matematyczno-fizycznych“.

Inną znów rozwiązującą, mianowicie:

$$(3) \qquad \frac{1}{e_1-e_3}=\lambda,$$

nazywać będziemy **m n o ż n i k i e m** równania (1) i oznaczać przez λ.

Wskutek różnych przemian ilości e_1, e_2, e_3 mnożnik przyjmuje także sześć wartości. Przez jednę którąkolwiek z nich wyrażają się inne sposobem wymiernym, ale w odpowiednich wzorach zachodzić będą g_2 i g_3, jak to niżej zobaczymy.

Widzimy więc, że tak moduł jak i mnożnik można przyjąć każdy z osobna za rozwiązującą G a l o i s'a.

Odpowiadające sobie wartości modułu i mnożnika, układają się w pewien sposób, który warto zaznaczyć, a mianowicie:

$$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=k^2, \qquad \frac{1}{e_1-e_3}=\lambda;$$

$$\frac{e_2-e_1}{e_3-e_1}=1-k^2, \qquad \frac{1}{e_3-e_1}=-\lambda;$$

$$\frac{e_1-e_3}{e_2-e_3}=\frac{1}{k^2}, \qquad \frac{1}{e_2-e_3}=\frac{\lambda}{k^2};$$

$$\frac{e_1-e_2}{e_3-e_2}=1-\frac{1}{k^2}, \qquad \frac{1}{e_3-e_2}=-\frac{\lambda}{k^2};$$

$$\frac{e_3-e_1}{e_2-e_1}=\frac{1}{1-k^2}, \qquad \frac{1}{e_2-e_1}=-\frac{\lambda}{1-k^2};$$

$$\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}=\frac{k^2}{k^2-1}, \qquad \frac{1}{e_1-e_2}=\frac{\lambda}{1-k^2}.$$

2. ***Równanie rozwiązujące modułowe.*** Tak nazywać będziemy równanie stopnia szóstego, którego pierwiastkami są wartości modułu k^2. W celu otrzymania tego równania, rozpatrzmy następujący układ trzech równań:

$$(1) \qquad 3\lambda e_1=2-k^2; \; 3\lambda e_2=-1+2k^2; \; 3\lambda e_3=-1-k^2,$$

które wynikają z równań (2) i (3) poprzedniego §-u i z tego, że $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Z równań (1) znajdujemy:

$$\lambda (e_1 - e_3) = 1 \,;\; \lambda (e_2 - e_3) = k^2 \,;\; \lambda (e_1 - e_2) = 1 - k^2 \,,$$

a zatem:

$$\lambda^3 (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3) = k^2 (1 - k^2)\,.$$

Lecz z drugiej strony, kładąc dla skrócenia

$$\Delta = g_2{}^3 - 27\, g_3{}^2 \,,$$

mamy na wyróżnik danego równania znany wzór:

$$(e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2 = \frac{\Delta}{16}\,.$$

Na mocy tego można równanie powyższe napisać tak:

(2) $$\lambda^6 \Delta = 16\, k^4 (1 - k^2)^2\,.$$

Mnożąc przez siebie odpowiednie strony równań (1) i z uwagi, że $4\, e_1 e_2 e_3 = g_3$, otrzymujemy nowy związek pomiędzy λ i k^2:

(3) $$27\, \lambda^3 g_3 = 4 (2 - k^2)(1 - 2\, k^2)(1 + k^2)\,.$$

Nareszcie, podniósłszy do kwadratu obie strony w każdem z równań (1) i biorąc następnie sumę stron odpowiednich, znajdujemy:

$$9\, \lambda^2 (e_1{}^2 + e_2{}^2 + e_3{}^2) = 6\,(k^4 - k^2 + 1)\,.$$

Wykonawszy skrócenie i z uwagi na to, że

$$e_1{}^2 + e_2{}^2 + e_3{}^2 = (e_1 + e_2 + e_3)^2 - 2\,(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) = \frac{g_2}{2}\,,$$

mamy:

(4) $$3\, \lambda^2 g_2 = 4\,(k^4 - k^2 + 1)\,.$$

Ze wzorów (2), (3), (4) otrzymujemy następujący szereg czterech równych stosunków:

$$(5)\qquad \frac{g_2^3}{4(k^4-k^2+1)^3}=\frac{27\, g_3^2}{(2-k^2)^2\,(2\,k^2-1)^2\,(1+k^2)^2}$$
$$=\frac{\Delta}{27\,k^4\,(1-k^2)^2}=\frac{16}{27\,\lambda^6}\,.$$

Trzy pierwsze z nich dają nam w dwóch różnych postaciach jedno i tożsamo równanie stopnia szóstego, które nazwaliśmy rozwiązującem modułowem.

Dajmy teraz, że pierwiastki tego równania są znane, t. j. że znaną jest wartość modułu, wtedy odpowiednia wartość mnożnika otrzymuje się bezpośrednio z wzorów (3), (4), mianowicie:

$$(6)\qquad \lambda=\frac{(1+k^2)\,(1-2\,k^2)\,(2-k^2)\,g_2}{9\,(k^4-k^2+1)\,g_3}\,.$$

Jeżeli zgodzimy się wprowadzić w rachunek jako ilość pomocniczą $k'^2=1-k^2$, to wzór powyższy da się tak przedstawić:

$$(6')\qquad \lambda=\frac{(1+k^2)\,(1+k'^2)\,(k'^2-k^2)\,g_2}{9\,(1-k^2\,k'^2)\,g_3}\,.$$

Wniósłszy to wyrażenie zamiast λ w równania (1), otrzymujemy wzory na pierwiastki równania $4\,x^3-g_2\,x-g_3=0$ w tym przypadku, kiedy moduł przyjęty jest za ilość znaną, a mianowicie:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} e_1&=\frac{3\,(1-k^2\,k'^2)\,g_3}{(1+k^2)\,(k'^2-k^2)\,g_2}\,,\\ e_2&=\frac{-3\,(1-k^2\,k'^2)\,g_3}{(1+k^2)\,(1+k'^2)\,g_2}\,,\\ e_3&=\frac{-3\,(1-k^2\,k'^2)\,g_3}{(1+k'^2)\,(k'^2-k^2)\,g_2}\,.\end{aligned}\right.$$

W przypadku, gdy $g_2=0$, równanie modułowe przyjmuje postać:

$$(k^4 - k^2 + 1)^3 = 0\,,$$

wzory zaś (6), (6′) i (7) przyjmują postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ i żadna z ilości λ, e_1, e_2, e_3 nie może wyrazić się sposobem wymiernym przez k^2. W samej rzeczy, w przypadku tym k^2 przyjmuje tylko dwie różne wartości, λ posiada ich sześć, gdy tymczasem e_1 ma trzy wartości. Podobną anomalię przedstawia przypadek $g_3 = 0$.

3. ***Równanie rozwiązujące mnożnikowe.*** Przedstawimy wzory (2) i (4) §-u poprzedzającego w ten sposób

$$\lambda^6 \Delta = 16\, k^4\, k'^4 \quad ; \quad 3\,\lambda^2 g_2 = 4 - 4\, k^2\, k'^2$$

i wyrugujemy stąd iloczyn $k^2\, k'^2$; otrzymamy:

$$\Delta\,\lambda^6 = (3\,\lambda^2 g_2 - 4)^2\,. \tag{1}$$

Jest to właśnie równanie rozwiązujące mnożnikowe, t. j. równanie stopnia szóstego, którego pierwiastkami są sześć wartości λ.

Jeżeli przyjmiemy jeden jakikolwiek z pierwiastków równania (1) za znany, to pozostałe pierwiastki tego równania, także trzy pierwiastki równania danego $4\,x^3 - g_2 x - g_3 = 0$, a zatem i wartość k^2 wyrażą się przez ilości znane za pomocą wzorów wymiernych. W samej rzeczy, mamy:

$$\frac{1}{\lambda^2} = (e_1 - e_3)^2 = (e_1 + e_3)^2 - 4\, e_1\, e_3 = e_2{}^2 - 4\, e_1\, e_3\ ;$$

mnożąc obie strony przez $4\, e_2$, otrzymujemy:

$$\frac{4\, e_2}{\lambda^2} = 4\, e_2{}^2 - 4\, g_3 = g_2\, e_2 - 3\, g_3\,,$$

a stąd znajdujemy:

$$e_2 = \frac{3\, g_3\, \lambda^2}{g_2\, \lambda^2 - 4}\,.$$

Wartości na e_2 i e_3 otrzymać można z równań

$$2\,e_1 = \frac{1}{\lambda} - e_2 \quad , \quad 2\,e_3 = -\frac{1}{\lambda} - e_2$$

tak, że ostatecznie mamy następujące trzy wzory, wyrażające pierwiastki e_1, e_2, e_3 przez mnożnik:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2\,e_1 &= -\frac{3\,g_3\,\lambda^2}{g_2\,\lambda^2 - 4} + \frac{1}{\lambda}, \\ e_2 &= \frac{3\,g_3\,\lambda^2}{g_2\,\lambda^2 - 4}, \\ 2\,e_3 &= \frac{3\,g_3\,\lambda^2}{g_2\,\lambda^2 - 4} - \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \right.$$

Co się tyczy modułu, to dość jest wziąć równanie $3\,\lambda\,e_2 = 2\,k^2 - 1$, skąd otrzymujemy:

$$2\,k^2 = 1 + 3\,\lambda\,e_2 = 1 + \frac{9\,g_3\,\lambda^3}{g_2\,\lambda^2 - 4},$$

albo

$$(3) \qquad 2\,k^2 = \frac{9\,g_3\,\lambda^3 + g_2\,\lambda^2 - 4}{g_2\,\lambda^2 - 4}.$$

Pozostałe pięć pierwiastków równania (1), wyrażają się przez λ za pośrednictwem wzorów, wypisanych w końcu § 1, a mianowicie:

$$(4) \qquad -\lambda\,, \quad \pm \frac{2\,\lambda\,(g_2\,\lambda^2 - 4)}{9\,g_3\,\lambda^3 \pm (g_2\,\lambda^2 - 4)},$$

gdzie cztery kombinacye znaków $\pm$ dają cztery pierwiastki.

Uwaga. Z równania (1) otrzymuje się bezpośrednio równanie z kwadratami różnic pierwiastków równania $4\,x^3 - g_2\,x - g_3 = 0$. Należy wziąć $u = \frac{1}{\lambda^2}$ i podstawić w równaniu (1) $\frac{1}{u}$ zamiast λ^2; otrzymujemy:

$$u(4u - 3g_2)^2 = \Delta;$$

(5) $$16u^3 - 24g_2u^2 + 9g_2^2u - \Delta = 0.$$

4. ***Wartość liczebna modułu i mnożnika.*** Wszystkie równania stopnia trzeciego rozdzielamy na dwie kategorye, stosownie do tego czy $\Delta > 0$ czy też < 0; przypadek $\Delta = 0$ pozostawiamy na uboczu.

1-o $\Delta > 0$. Wszystkie trzy pierwiastki równania $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$ są rzeczywiste; zgódźmy się oznaczać je tak, aby było $e_1 > e_2 > e_3$; wtedy oczywiście mamy:

(1) $$e_1 > 0 \quad , \quad e_2 g \leqq 0 \quad , \quad e_3 < 0 \,.$$

Z pomiędzy sześciu wartości modułu — dwie, mianowicie:

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \quad \text{i} \quad \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$$

są ułamkami właściwemi i dodatniemi; pozostałe wartości są albo > 1 albo < 0. Pierwszą z tych wartości, t. j. $k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$, nazywać będziemy wartością główną modułu.

Jako wartość główną mnożnika przyjmujemy tę, która odpowiada wartości głównej modułu, t. j. $\lambda = \frac{1}{e_1 - e_3}$; jest ona zawsze dodatnią i może zmieniać się od 0 do ∞.

Odtąd przez „moduł“ i „mnożnik“ rozumieć będziemy wyłącznie ich wartości główne.

2-o $\Delta < 0$. Jeden tylko pierwiastek jest rzeczywisty, dwa pierwiastki są urojone sprzężone. Zgodzimy się oznaczać pierwiastki w sposób następujący:

$$e_1 = \alpha - \beta i \qquad e_2 = \alpha + \beta i \quad (\beta > 0) \quad , \quad e_3 = -2\alpha$$

a zatem:

(2) $$e_3 g_3 \geqq 0 \,.$$

Z pomiędzy sześciu wartości k^2 dwie i tylko dwie będą takie, że ich wartość bezwzględna będzie równa 1, t. j. $|k^2| = 1$; wyjątek stanowi przypadek $k^2 = e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$. Jako wartość główną modułu przyjmujemy następującą:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{3\alpha + \beta i}{3\alpha - \beta i},$$

przy tem oczywiście mamy $|k^2| = 1$. Uczyniwszy następnie $3\alpha + \beta i = \varrho e^{i\frac{\varphi}{2}}$ $(\varrho > 0)$ i dla zupełnego określenia ilości φ dołączywszy warunek $0 < \frac{\varphi}{2} < \pi$, mieć będziemy:

$$k^2 = e^{i\varphi}. \tag{3}$$

Odpowiednia wartość mnożnika jest:

$$\lambda = \frac{1}{e_1 - e_3} = \frac{1}{3\alpha - \beta i} = \frac{3\alpha + \beta i}{9\alpha^2 + \beta^2},$$

$$\lambda = \frac{1}{\varrho} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \tag{4}$$

a więc argument mnożnika głównego równa się połowie argumentu modułu głównego.

Wartość $|\lambda|$ może zmieniać się od 0 do ∞.

5. ***Moduł i mnożnik, jako zmienne niezależne.*** Z powyższego widać, że mamy dwa przypadki oddzielne.

Przypadek 1-y. $0 < k^2 < 1$, $0 < \lambda < \infty$.

Pierwiastki e_1, e_2, e_3 otrzymują się z równań:

$$3\lambda e_1 = 2k^2, \quad 3\lambda e_2 = -1 + 2k^2, \quad 3\lambda e_3 = -1 - k^2, \tag{1}$$

przyczem bezpośrednio wnosimy, że ilości e_1, e_2, e_3 są rzeczywiste i że ich suma równa się zeru; dalej

$$e_1 > e_2 > e_3, \quad e_1 > 0, \quad \left(k^2 - \frac{1}{2}\right) e_2 > 0, \quad e_3 < 0.$$

Ze wzoru na Δ t. j z wzoru

$$\Delta = \frac{16 k^4 (1-k^2)^2}{\lambda^6}$$

widzimy, że $\Delta > 0$.

Przypadek 2-gi. $k^2 = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, $\lambda = re^{i\frac{\varphi}{2}}$.

Ze wzorów (1) bezpośrednio wnosimy, że e_1 i e_2 są ilościami urojonemi sprzężonemi, że czynnik przy i w wyrażeniu na e_1 jest ujemny, że e_3 jest ilością rzeczywistą; wreszcie mamy oczywiście $\Delta < 0$.

6. ***Znaki dwu niezmienników w zależności od modułu.*** Spółczynniki g_2, g_3 noszą zwykle nazwę niezmienników: g_2 — pierwszego, g_3 — drugiego.

Przejdźmy do wzorów:

$$(1) \quad \begin{cases} 3\lambda^2 g_2 = 4(k^2 - k^4 + 1), \\ 27\lambda^3 g_3 = 4(2-k^2)(1-2k^2)(1+k^2), \end{cases}$$

dających wartości na g_2 i g_3.

Przypadek 1-y. $\Delta > 0$. Wartości λ i k^2 są rzeczywiste, a zatem na mocy równań (1) wnosimy bezpośrednio:

$$g_2 > 0 \quad , \quad \left(\frac{1}{2} - k^2\right) g_3 \gtreqless 0.$$

Niezmiennik pierwszy jest zawsze dodatni, drugi zaś jest dodatni lub ujemny, stosownie do tego czy $k^2 < \frac{1}{2}$ lub $> \frac{1}{2}$.

W przypadku $k^2 = 1$ mamy $g_3 = 0$.

Przypadek 2-gi. $\Delta < 0$. Na okręgu koła o promieniu jedność, mającego środek w początku spółrzędnych, odłóżmy od punktu przecięcia A okręgu koła z osią odciętych dodatnich w obie strony dwa łuki AB i AD, każdy po 60^0, i uważajmy na okręgu koła cztery łuki AB, BC (punkt C jest punktem przecięcia okręgu koła z osią odciętych ujemnych), CD, DA [1]). Oznaczmy te łuki dla krótkości przez I, II, III, IV. Gdy punkt zmienny M, przedstawiający nam wartość k^2, wyszedłszy z punktu A, opisze w kierunku dodatnim całkowity okrąg i powróci do punktu A, wtedy k^2 przejdzie przez wszystkie możliwe wartości. Jedynie punkt A powinien być wykluczony, ponieważ daje $\Delta = 0$.

Jeżeli wartość łuku AM oznaczymy przez φ, będzie $k^2 = e^{i\varphi}$, $\lambda = re^{i\frac{\varphi}{2}}$, gdzie r oznacza pewną ilość dodatnią. Podstawiwszy te wartości w równaniu (1) i podzieliwszy obie strony pierwszego równania przez $e^{i\varphi}$, obie strony drugiego przez $e^{i\frac{3}{2}\varphi}$, otrzymamy:

$$3\,r^2 g_2 = 4\,(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 1) = 4\,(2\cos\varphi - 1)$$

$$27\,r^3 g_3 = -\,4\,(2\,e^{-i\frac{\varphi}{2}} - e^{i\frac{\varphi}{2}})\,(2\,e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}})\,(e^{-i\frac{\varphi}{2}} + e^{i\frac{\varphi}{2}})$$

$$= -\,8\,(5 - 4\cos\varphi)\cos\frac{\varphi}{2},$$

co można napisać prościej tak:

$$(2)\qquad \begin{cases} 3\,r^2 g_2 = 4\left(1 - 4\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right) \\[2ex] 27\,r^3 g_3 = -\,8\cos\dfrac{\varphi}{2}\left(1 + 8\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right). \end{cases}$$

Na mocy tych wzorów możemy powiedzieć odrazu, jakiego znaku będą g_2 i g_3, jeżeli tylko zauważymy, na którym z łuków I, II, III, IV znajduje się punkt k^2. W ten sposób otrzymujemy tablicę:

k^2	A	I	B	II	C	III	D	IV	A
g_2	+	+	0	—	—	—	0	+	+
g_3	—	—	—	—	0	+	+	+	+

[1]) Czytelnik sam sobie z łatwością figurę nakreśli.

7. ***Przebieg dwu niezmienników, uważanych za funkcye ilości*** k^2. I tu rozważymy dwa przypadki.

Przypadek 1-y. $\Delta > 0$. Przyjąwszy λ za ilość stałą, chcemy dowiedzieć się, jak zmieniają się ilości g_2 i g_3, gdy k^2 przechodzi przez wszelkie wartości od 0 do 1. Wzory (1) paragrafu poprzedzającego pokazują, że dość jest zbadać przebieg funkcyj.

$$\varphi(k^2) = k^4 - k^2 + 1 \quad ; \quad \psi(k^2) = (2 - k^2)(1 - 2k^2)(1 + k^2),$$

Jeżeli pierwszą z tych funkcyj napiszemy w postaci $\varphi(k^2) = 1 - k^2(1 - k^2)$, to stanie się widocznem, że gdy k^2 wzrastając, przechodzi przez wszystkie wartości od zera do $\frac{1}{2}$, to jednocześnie $\varphi(k^2)$ ciągle malejąc, przechodzi przez wszystkie wartości od 1 do $\frac{3}{4}$; gdy następnie k^2 dalej wzrastając, przechodzić będzie przez wszystkie wartości od $\frac{1}{2}$ do 1, funkcya $\varphi(k^2)$ będzie wzrastała i przechodziła przez wszystkie wartości od $\frac{3}{4}$ do 1. Zresztą na mocy tożsamości $\varphi(k^2) = \varphi(1 - k^2)$, albo — co na jedno wychodzi — tożsamości $\varphi\left(\frac{1}{2} + k^2\right) = \varphi\left(\frac{1}{2} - k^2\right)$ stanie się oczywistem, że przebieg funkcyi $\varphi(k^2)$ w przypuszczeniu, iż k^2 zmienia się od $\frac{1}{2}$ do 1, jest ten sam co i w przypuszczeniu, że k^2 zmienia się od $\frac{1}{2}$ do 0. Co się tyczy funkcyi $\psi(k^2)$, to najprzód należy zwrócić uwagę na tożsamość $\psi(1 - k^2) = -\psi(k^2)$ albo — co na jedno wychodzi — na tożsamość $\psi\left(\frac{1}{2} + k^2\right) = -\psi\left(\frac{1}{2} - k^2\right)$, na mocy czego wolno nam ograniczyć się na zbadaniu przedziału dla k^2 od $\frac{1}{2}$ do 1. W tym celu wprowadzamy zamiast k^2 nową zmienną x, kładąc $k^2 = \frac{1}{2} + x$; będzie:

$$\psi(k^2) = \psi\left(\frac{1}{2} + x\right) = 2x\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) \; ; \; 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Lecz łatwo przekonać się wprost drogą elementarną, że, gdy x rośnie od 0 do $\frac{1}{2}$, iloczyn $x\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)$ ciągle maleje od 0 do -1; a zatem gdy k^2 przechodzi od $\frac{1}{2}$ do 1, $\psi(k^2)$, ciągle malejąc, przechodzi od 0 do 2. Nareszcie, gdy k^2 przechodzi od 0 do $\frac{1}{2}$, wartość $\psi(k^2)$ ciągle malejąc, przechodzi od 2 do 0. Wynik naszego badania, osiągnięty na drodze elementarnej, wyrazimy w następującej tablicy:

k^2	$0 \ldots \frac{1}{2} \ldots 1$	
$\frac{3}{4} g_2 \lambda^2$	$1 \ldots \frac{3}{4} \ldots 1$	(jedno minimum)
$\frac{27}{4} g_3 \lambda^3$	$2 \ldots 0 \ldots -2$	(nieustające ubywanie)

Dla dwóch szczególnych wartości modułu, dopełniających się wzajemnie do 1, odpowiednie wartości g_2 są równe i jednakowych znaków; wartości g_3 są także równe lecz znaków przeciwnych.

P r z y p a d e k 2-gi. $\Delta < 0$. W tym przypadku mamy:

$$k^2 = e^{i\varphi} \quad , \quad \lambda = re^{i\frac{\varphi}{2}}$$

$$\frac{3}{4} r^2 g_2 = 1 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad , \quad \frac{27}{64} r^3 g_3 = -\cos \frac{\varphi}{2}\left(\frac{9}{8} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right).$$

Przyjmiemy tu r za ilość stałą, φ za zmienną niezależną, zawartą w granicach $0 < \varphi < 2\pi$. Z powyższych wzorów jest widocznem, że dla dwóch wartości φ, mianowicie φ i $2\pi - \varphi$, dopełniających się wzajemnie do 2π, odpowiednie wartości g_2 są równe i jednakowych znaków, a wartości g_3 są równe lecz znaków przeciwnych. I dla tego dość jest znać przebieg ilości g_2 i g_3 dla połowy okręgu koła, t. j. od $\varphi = 0$ do $\varphi = \pi$.

Najprzód we wzorze na g_2 mamy funkcyę $1 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2}$, która widocznie maleje ciągle, gdy φ przechodzi od 0 do π. Dalej we wzorze na g_3 mamy funkcyę $f = \cos\frac{\varphi}{2}\left(\frac{9}{8} - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$, której przebieg łatwo daje się zbadać nawet przy pomocy środków elementarnych. Jeżeli oznaczymy przez φ_0 kąt rozwarty, czyniący zadość warunkowi:

$$\sin\varphi_0 = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{lub} \quad \cos\varphi_0 = -\frac{1}{4}$$

i którego wartość przybliżona jest $\varphi_0 = 104^0\,28'\,39''$, a następnie przez φ_1 kąt $2\pi - \varphi$, będziemy mieli następujące prawo: 1-o w przedziale od $\varphi = 0$ do $\varphi = \varphi_0$ funkcya f ciągle maleje; 2-o w przedziale od $\varphi = \varphi_0$ do $\varphi = \varphi_1$ ciągle wzrasta; 3-o w przedziale od $\varphi = \varphi_1$ do $\varphi = 2\pi$ ciągle maleje. Odpowiedni przebieg ilości g_2 i g_3 otrzymuje się wprost z wzorów wyżej podanych; wyrażamy go w tablicy następującej:

φ	$0 \ldots \frac{\pi}{3} \ldots \varphi_0 \ldots \pi \ldots \varphi_1 \ldots \frac{5}{3}\pi \ldots 2\pi$
$\frac{3}{4} r^2 g_2$	$1 \ldots 0 \ldots\ldots -3 \ldots\ldots\ldots 0 \ldots -1$ (1 minimum)
$\frac{27}{4} r^3 g_3$	$-2 \ldots\ldots -3\sqrt{6} \ldots 0 \ldots 3\sqrt{6} \ldots\ldots\ldots\ldots 2$ (1 min. i 1 max.)

gdzie wykazano wszystkie wartości szczególne na φ, przy których jeden z dwu niezmienników osiąga maximum lub minimum lub też zamienia się na zero.

8. ***Niezmiennik bezwzględny.*** Tak nazywamy funkcyę wymierną ilości g_2 i g_3, jeżeli w wyrażeniu jej przez zmienne λ i k^2 zmienna λ odpada. Najprostszą z takich funkcyj jest $\frac{g_2^3}{g_3^2}$, lecz dla

pewnych względów dogodniej rozważać inny niezmiennik bezwzględny, mianowicie:

$$(1) \qquad J = \frac{g_2^{\,3}}{\Delta} = \frac{g_2^{\,3}}{g_2^{\,3} - 27\, g_3^{\,2}};$$

postarajmy się zbadać przebieg tego niezmiennika, gdy k^2 przechodzi przez wszystkie możliwe wartości.

Przypadek 1-y. $\Delta > 0$. Mamy wzór (2) i (5).

$$J = \frac{4\,(1 - k^2 + k^4)^3}{27\, k^4\,(1 - k^2)^2},$$

gdzie k^2 przechodzi przez wszelkie wartości od 0 do 1. Dla łatwiejszego zbadania przebiegu wartości funkcyi J wprowadzamy nową zmienną $t = k^2\,(1 - k^2)$, która widocznie wzrasta od 0 do $\frac{1}{4}$ w przedziale od $k^2 = 0$ do $k^2 = \frac{1}{2}$, a następnie, przy dalszem wzrastaniu ilości k^2, maleje od $\frac{1}{4}$ do 0. Niezmiennik J można napisać w postaci:

$$J = \frac{4}{27}\,\frac{(1 - t)^3}{t^2},$$

skąd wnosimy bezpośrednio, że gdy t rośnie od 0 do $\frac{1}{4}$, odpowiednia wartość J ciągle maleje. Łącząc ze sobą zauważone sposoby zmiany ilości t i J, przychodzimy ostatecznie do wyniku, który daje się zawrzeć w następującej tablicy:

k^2	$0 \ldots \frac{1}{2} \ldots 1$
I	$+\infty \ldots 1 \ldots +\infty$ (jedno minimum).

Przypadek 2-gi. $\Delta < 0$. Kładąc jak poprzednio $k^2\,(1 - k^2) = t$, mamy znowu:

$$J = \frac{4}{27}\,\frac{(1-t)^3}{t^2}\,.$$

Lecz teraz wziąć należy $k^2 = e^{i\varphi}$, przyczem φ przyjmuje wszelkie wartości od 0 do 2π, będzie więc:

$$t = e^{i\varphi}(1 - e^{-i\varphi})\quad,\quad J = -\frac{1}{27}\,\frac{(2\cos\varphi - 1)^3}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

lub lepiej:

$$J = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\left(\frac{1}{4} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^3}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,,$$

skąd bezpośrednio wnosimy, że $J(2\pi - \varphi) = J(\varphi)$. A zatem dość jest zbadać przebieg niezmiennika J w przypuszczeniu, że φ przebiega wartości w granicach od 0 do π. Kładąc $\sin^2\frac{\varphi}{2} = x$, otrzymujemy:

$$J = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\left(\frac{1}{4} - x\right)^3}{x}\,,$$

przyczem x przechodzi przez wartości od 0 do 1. Z tego wzoru widać, że dopóki x pozostaje w przedziale od 0 do $\frac{1}{4}$, wartość J ciągle wzrasta, przechodząc od $-\infty$ do 0; pozostaje więc do zbadania tylko przedział od $x = \frac{1}{4}$ do $x = 1$. W tym celu napiszmy wzór na J tak:

$$J^{-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left[\frac{1}{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{4\left(x - \frac{1}{4}\right)^3}\right];$$

wniesiemy stąd bezpośrednio, że gdy x rośnie od $\frac{1}{4}$ do 1, wartość J^{-1} maleje od ∞ do 1, a zatem wartość J wzrasta od 0 do 1.

Na mocy powyższych spostrzeżeń, dochodzimy do następującej tablicy, przedstawiającej charakter przebiegu ilości J, gdy argument φ przechodzi kolejno przez wszystkie wartości od 0 do 2π

φ	$0 \ldots \frac{\pi}{3} \ldots \pi \ldots \frac{5}{3}\pi \ldots 2\pi$
J	$-\infty \ldots 0 \ldots 1 \ldots 0 \ldots -\infty$ (jedno maximum).

9. ***Równanie rozwiązujące półmodułowe.*** Równanie modułowe jest stopnia szóstego, lecz łatwo sprowadzić się daje do stopnia trzeciego przez wprowadzenie pewnej rozwiązującej pomocniczej, którą nazwiemy półmodułową. Odrazu nasuwają się dwie postaci takiej rozwiązującej. Pierwszą jest:

$$z = k^2(1 - k^2). \tag{1}$$

Napisawszy równanie modułowe tak:

$$\frac{4[1 - k^2(1 - k^2)]^3}{g_2{}^3} = \frac{27[k^2(1 - k^2)]^2}{\Delta}$$

i podstawiwszy z zamiast $k^2(1 - k^2)$, otrzymujemy:

$$(z - 1)^3 + \frac{27}{4} J z^2 = 0. \tag{2}$$

Tak przedstawia się równanie, którego pierwiastkami są ilości:

$$k^2(1 - k^2), \quad \frac{k^2 - 1}{4}, \quad \frac{-k^2}{(1 - k^2)^2}.$$

Inną znów rozwiązującą półmodułową jest:

$$z' = k^2 + \frac{1}{k^2}, \tag{3}$$

Napisawszy równanie modułowe w postaci:

$$\frac{4\,[1-k^2+k^4]^3}{g_2^{\,3}}=\frac{27\,[k^4-2\,k^6+k^8]}{\Delta}$$

dzieląc obie strony przez k^2 i uwzględniając związek (3), otrzymujemy:

$$(4)\qquad (z'-1)^3=\frac{27}{4}J(z'-2)\,.$$

Tak przedstawia się równanie z pierwiastkami:

$$k^2+\frac{1}{k^2}\ ,\quad 1-k^2+\frac{1}{1-k^2}\ ,\quad 2+\frac{1}{k^2\,(k^2-1)}\,.$$

Równanie (4) otrzymuje się z równania (2) przy pomocy podstawienia

$$(5)\qquad z'=2-\frac{1}{z}\,.$$

Równanie (4) uprości się, jeżeli zamiast z' wprowadzimy nową rozwiązującą z'', określoną za pomocą związku:

$$(6)\qquad z''=z'-1=1-\frac{1}{z}\,;$$

otrzymujemy wtedy:

$$(7)\qquad 4\,z''^3=27\,J\,(z''-1)\,.$$

Tak przedstawia się równanie, którego pierwiastkami są ilości:

$$k^2-1+\frac{1}{k^2}\ ,\quad -k^2+\frac{1}{1-k^2}\ ,\quad 1+\frac{1}{k^2\,(k^2-1)}\,.$$

Jeżeli przez Δ' i J' oznaczymy odpowiednio wyróżnik i niezmiennik bezwzględny równania (7), znajdziemy:

$$(8)\qquad \Delta'=27\,J^2\,(J-1)=\frac{27^4\,g_2^{\,6}\,g_3^{\,2}}{\Delta^3}\,,$$

$$J' = 1 + \frac{1}{J-1},$$

albo

(9) $$(J-1)(J'-1) = 1.$$

A zatem jeżeli wartość J znajdować się będzie poza przedziałem 0 i 2, to wartości J' znajdować się będą wewnątrz tego przedziału, i odwrotnie.

10. ***Związek pomiędzy pierwiastkiem równania stopnia 3-go i odpowiednim pierwiastkiem równania rozwiązującego półmodułowego.*** Okażemy, że każdy pierwiastek równania

(1) $$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$$

jest funkcyą wymierną odpowiedniego pierwiastka równania rozwiązującego półmodułowego

(2) $$4z''^3 - 27Jz'' + 27J = 0,$$

tak, iż równanie (2) otrzymuje się z równania (1) za pomocą przekształcenia T s c h i r n h a u s a. W samej rzeczy mamy:

$$z'' = k^2 + \frac{1}{k^2} - 1 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} + \frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3} - 1 = \frac{(e_1-e_3)^2 + (e_2-e_3)^2}{(e_1-e_3)(e_2-e_3)} - 1$$

$$= \frac{(e_1-e_3+e_2-e_3)^2 - 3(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)},$$

$$z'' = \frac{9e_3^2 - \frac{3}{4}X'(e_3)}{\frac{1}{4}X'(e_3)},$$

gdzie

$$X(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3;$$

a zatem:

$$z'' = \frac{3g_2}{12e_3^2 - g_2}; \quad \frac{1}{z''} = \frac{4e_3^2}{g_2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{g_3}{g_2 e_3},$$

$$(3) \qquad \frac{2g_2}{3g_3}e_3 = -1 - \frac{3}{2z'' - 3}.$$

Tak wyraża się w sposób najprostszy związek między odpowiedniemi pierwiastkami równań (1) i (2). Z powyższego wynika wniosek, że wszelkie równanie stopnia trzeciego daje się przy pomocy podstawienia liniowego sprowadzić do postaci:

$$4x^3 - 27Jx + 27J = 0,$$

w której zawiera się jeden tylko parametr J, przyczem założyć można zawsze, że $0 < J < 2$. W samej rzeczy, jeżeli wartość niezmiennika bezwzględnego J zawiera się pomiędzy 0 i 2, wtedy równanie (2) czyni zadość wymaganiu. W razie przeciwnym należy równanie pierwotne (1) przekształcić za pomocą podstawienia:

$$\frac{g_2}{g_3}x = -y;$$

otrzymujemy wtedy:

$$4y^3 - \frac{g_2^3}{g_3^2}y + \frac{g_2^3}{g_3^2} = 0,$$

albo

$$(4) \qquad 4y^3 - 27J'y + 27J' = 0,$$

gdzie J' określa się z wzoru $(J' - 1)(J - 1) = 1$; a zatem zawiera się między 0 i 2. Równanie (4) czyni zadość wymaganiom. Na okoliczność tę należałoby zwrócić uwagę, gdyby szło o ułożenie tablicy do znajdowania pierwiastków jakiegokolwiek równania stopnia 3-go.