S. Lie.

O DZIAŁALNOŚCI NAUKOWEJ SOPHUSA LIEGO

napisał

K. Żorawski.

Wiadomo, jak dalece pożyteczną w nauce matematyki bywa dogodna zamiana zmiennych, lub, wyrażając się geometrycznie, odpowiedni wybór spółrzędnych. Niejednokrotnie zadanie skomplikowane przez wybór odpowiedniego układu odniesienia można znacznie uprościć, a często sprowadzić nawet do takiej postaci, że rozwiązanie żadnych już zgoła nie przedstawia trudności. Przykłady takich faktów są w matematyce bardzo częste, a nawet wiele kwestyj, bądź analitycznych bądź geometrycznych, można traktować jako problematy redukcyi do postaci najdogodniejszych. Ta uwaga wystarcza, aby dojść do przeświadczenia, że wszelkie teorye, któreby bezpośrednio traktowały zamiany zmiennych, czyli przekształcenia, muszą odgrywać w nauce rolę niepoślednią. Historya na uzasadnienie tego zdania coraz liczniejszych dostarcza dowodów.

Przekształcenie można wyobrażać sobie albo jako zamianę układu odniesienia, lub też tak, że układ odniesienia pozostaje bez zmiany, a zmienia się położenie przedmiotów przekształcanych. Pierwsze pojmowanie przekształcenia bardziej jest właściwe analizie, drugie można uważać jako jego interpretacyę mechaniczną. Zależnie od kwestyi, o którą chodzi, dogodniejszym jest jeden lub drugi punkt widzenia.

Zasadniczem w teoryi przekształceń jest przejście od jednego przekształcenia do skupienia przekształceń. Z pośród wszystkich możliwych skupień wyróżniają się skupienia w sobie zamknięte, t. j. takie, że wykonanie kilku przekształceń skupienia zawsze jest równoważne z jednem przekształceniem tego samego skupienia. Takie skupienia nazywają się grupami. Pojęcie grupy łączy się ściśle z pojęciem utworu niezmiennego, bo wszystkie przekształ-

cenia, które dany utwór pozostawiają bez zmiany, tworzą grupę. Właśnie niezmiernie prosty stosunek pojęć „grupa“ i „niezmiennik“ wyróżnia, z pośród innych skupień, skupienia w sobie zamknięte, t. j grupy.

Wartość każdego pojęcia w nauce określa się tem, o ile ono przyczynia się do rozwiązania lub ułatwienia zagadnień jej właściwych. W szeregu różnych zagadnień, w których teorya grup może być stosowaną, wyróżniają się szczególnie dwa typy. Jednym z nich jest kwestya równoważności form matematycznych wewnątrz danej grupy. Chodzi o to, by podać takie warunki konieczne i dostateczne, za pomocą których możnaby rozeznać, czy dwie formy przechodzą jedna w drugą za pomocą przekształceń danej grupy, czy też nie. Drugi typ stanowi bezpośrednie zastosowanie pojęcia grupy do rozwiązywania równań, bądź algebraicznych bądź różniczkowych. Dane jest równanie lub układ równań i grupa przekształceń, której wszystkie przekształcenia równanie to, względnie układ równań, pozostawiają bez zmiany; jakie stąd wynikają korzyści dla rozwiązania lub całkowania owego równania lub układu równań?

Te punkty widzenia są oddawna znane. Do pierwszego z powyższych działów należy ugruntowana przez Gaussa i Mindinga teorya gięcia powierzchni, jakkolwiek w pracach tych autorów nigdzie niema mowy o grupie przekształceń. Do tego samego typu należą kwestye równoważności rzutowej figur w geometryi syntetycznej. Wreszcie tu należy zaliczyć wiele kwestyj z teoryi form, ze względu na ich zachowanie się przy przekształceniach liniowych. Przykładem rozważań drugiej kategoryi jest teorya Galois'a równań algebraicznych. W tej teoryi rolę pierwszorzędną odgrywają grupy podstawień pierwiastków równania. Grupy te najpierwej poddane były gruntownemu badaniu, w którem rozwinięto szereg ważnych pojęć, jako to: niezmiennik, grupa przechodnia i nieprzechodnia, podgrupa, podgrupa niezmienna i t. d. W tej teoryi, dzięki połączeniu dwóch pojęć, grupy i obszaru wymierności, Galois postawił ogólne zasady rozwiązywania równań algebraicznych.

Wszystkie wyżej wymienione teorye doprowadzone już były do znacznego stopnia rozwoju, gdy około roku 1870 rozpoczął dzia-

łalność twórczą na polu matematyki Sophus Lie. Jego główną zasługą jest to, że pojęcia wyżej omówione umiał połączyć z pojęciami ciągłości i różniczkowalności, przeważającemi w analizie i geometryi. To niezmiernie szczęśliwe połączenie dało mu możność znakomicie rozszerzyć pole zastosowań pojęcia grupy na wiele zagadnień całkowania równań różniczkowych i problematów geometryi, a okazało się, że te zmodyfikowane przez Liego pojęcia o wiele szersze od pierwotnych objęły widnokręgi. Teorye swoje doprowadził Lie w krótkim czasie do wyższego stopnia doskonałości, niż do dziś dnia doprowadzoną jest teorya grup podstawień, bo, obracając się w dziedzinach, w których panuje ciągłość i różniczkowalność miał do czynienia z doskonalszemi prawidłowościami.

Nim zwrócimy się do omówienia najważniejszych zdobyczy, które bądź bezpośrednio, bądź też pośrednio, nauka zawdzięcza Liemu, przytoczymy kilka dat z jego życia.

Maryusz Sophus Lie urodził się d. 17 grudnia 1842 r. w Nordfjordeid (koło Florö) w Norwegii, gdzie ojciec jego był pastorem. Nauki uniwersyteckie odbywał w Chrystyanii, gdzie między innemi słuchał wykładu Sylowa o teoryi Galois'a. Jeduakowoż, gdy w roku 1865 opuszczał uniwersytet, jeszcze bynajmniej nie był zdecydowany poświęcić się wyłącznie matematyce. Dopiero później, zachęcony badaniami Plückera z geometryi, studyuje w latach 1869 i 1870 matematykę w Berlinie i w Paryżu, gdzie wraz z F. Kleinem ze szczególnem zamiłowaniem czytają i omawiają ukończoną wówczas teoryę podstawień C. Jordana. Już wówczas tworzy Lie niemal cały obszerny plan swych późniejszych teoryj, które od tej chwili aż do śmierci rozwija w szeregu rozpraw i monografij Po powrocie do kraju zostaje w Chrystyanii docentem matematyki, a w roku 1877 otrzymuje tamże katedrę. W r. 1886 powołuje Liego uniwersytet w Lipsku, gdzie wykłada do roku 1898 i wydaje kilka obszernych monografij z pomocą F. Engela i G. Scheffersa. Wreszcie powraca do Chrystyanii na zarezerwowaną dla niego katedrę i tam umiera dnia 18 lutego 1899 r. na anemię mózgu, której powodem była nadmierna przez długie lata praca umysłowa.

Podstawą bardzo wielu badań Liego jest pojęcie skończonej grupy ciągłej, którego istotę określić można w wyrazach następujących.

Uważajmy skupienie ∞^r przekształceń zmiennych x_i na zmienne $\bar{x}_i$, określone przez równania:

$$(1) \qquad \bar{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

w których a_k oznaczają zupełnie dowolne parametry. Jeżeli, wykonywając jedne po drugich przekształcenia tego skupienia, zawsze otrzymujemy tylko przekształcenia, należące do tego samego skupienia, to równania powyższe określają, według Liego (1871) r — częściową ciągłą grupę przekształceń. Z pomiędzy tych grup najważniejsze i najczęściej spotykane mają do każdego przekształcenia przekształcenie odwrotne, a więc i przekształcenie tożsamościowe.

Liczba parametrów r może mieć rozmaite wartości, a może się zdarzyć, że wszystkie przekształcenia pewnej grupy o mniejszej liczbie parametrów są zawarte w innej grupie o większej liczbie parametrów; wtedy powiadamy, że pierwsza z tych grup jest podgrupą drugiej.

Jednym z najprostszych przykładów grupy ciągłej jest grupa wszystkich liniowych przekształceń jednorodnych:

$$(2) \qquad \bar{x}_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

która ma n^2 parametrów a_{ik}. W wielu dziedzinach odgrywa ona rolę wielkiej wagi, a już teraz możemy omówić znaczenie pewnych jej podgrup w teoryi wyższych liczb zespolonych.

Przez zmniejszanie treści pojęcia liczby matematyka dochodzi do coraz szerszych kategoryj liczb. W ten sposób powstało pojęcie liczby rzeczywistej, liczby zespolonej zwykłej i wreszcie liczb zespolonych wyższych kategoryj. Rolę kierowniczą w tych uogólnieniach mają pewne wymagania co do rezultatu mnożenia. Chodzi o to, aby mnożenie dwu liczb danego układu liczb, wykonane na podstawie prawa rozdzielności, dało liczbę, należącą do tego samego

układu liczb; żeby układ podlegał prawu łączności i żeby w tym układzie możliwe było wykonywanie dzielenia.

Uważajmy liczbę:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n, \tag{3}$$

gdzie x_i są spółczynnikami rzeczywistemi, a e_i oznaczają n nieporównywalnych ze sobą jednostek. Jeżeli tę liczbę pomnożymy przez drugą tego samego układu:

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n, \tag{4}$$

to rezultat, obliczony na mocy prawa rozdzielności:

$$xa = \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^k x_i a_k e_i e_k \tag{5}$$

ma być znów liczbą układu, t. j. musi mieć kształt:

$$\bar{x} = \bar{x}_1 e_1 + \bar{x}_2 e_2 + \ldots + \bar{x}_n e_n. \tag{6}$$

W szczególności każdy iloczyn $e_i e_k$ musi należeć do tego układu, t. j.

$$e_i e_k = \sum_1^n{}^s \gamma_{iks} e_s, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

gdzie γ_{iks} są spółczynniki rzeczywiste. Na mocy wzorów (5), (6) i (7) otrzymujemy tedy:

$$\bar{x}_s = \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^k \gamma_{iks} x_i a_k. \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

Jeżeli tu x_i uważać będziemy jako zmienne, a a_k jako parametry, to mieć będziemy skupienie nieskończenie wielu przekształceń zmiennych x_i na zmienne $\bar{x}_s$. Łatwo dostrzedz, że skupienie to musi tworzyć grupę. Istotnie, jeżeli liczbę (6) pomnożymy jeszcze przez:

$$(9) \qquad b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \ldots + b_n e_n ,$$

to na podstawie prawa łączności rezultat musi być taki sam, jak gdybyśmy pomnożyli x przez iloczyn ab. To znaczy, że jeżeli po przekształceniu (8) wykonamy przekształcenie:

$$(10) \qquad \bar{x}_t = \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^k \gamma_{ikt} \bar{x}_i b_k , \quad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

to z tych dwu przekształceń musi wynikać przekształcenie:

$$(11) \qquad \bar{x}_t = \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^k \gamma_{ikt} x_i c_k , \quad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie parametry c_k mają wartości:

$$(12) \qquad c_s = \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^k \gamma_{iks} a_i b_k \quad (s = 1, 2, \ldots, n) .$$

A zatem w samej rzeczy mamy grupę przekształceń, a ponieważ dzielenie ma być także możliwe w uważanym układzie, więc grupa posiada do każdego przekształcenia przekształcenie odwrotne.

Wyprowadziliśmy tu rezultat, uzyskany przez Poincarégo (1884). Na mocy tego wywodu, do każdego układu liczb należy pewna grupa przekształceń liniowych i jednorodnych. Twierdzenie to może być w pewnym sensie odwrócone, tak iż teorya układów liczb zespolonych, a w szczególności określenie wszystkich układów takich liczb (t. j. wyznaczenie wszystkich możliwych systemów spółczynników γ_{iks}) sprowadza się do określenia wszystkich podgrup grupy (2) pewnej kategoryi. Wobec tego teorya ogólnych liczb zespolonych może być traktowana, jako zastosowanie ogólnych zasad nauki o ciągłych grupach przekształceń. Na tem stanowisku stanęli w swych badaniach w teoryi wyższych liczb zespolonych Study, Scheffers i inni, i znacznie posunęli ten dział nauki. Rzecz oczywista, że między innemi musi stąd wynikać

i najprostszy układ liczb zespolonych; istotnie dla tego układu mamy grupę:

$$(13) \qquad \bar{x}_1 = x_1 a_1 - x_2 a_2 \quad , \quad \bar{x}_2 = x_1 a_2 + x_2 a_1 ,$$

a mnożenia określają się tu tabelką:

	1	2
1	e_1	e_2
2	e_2	$-e_1$.

Podobnież np. dla układu kwaternionów Hamiltona mamy grupę:

$$(14) \qquad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 a_4 - x_2 a_3 + x_3 a_2 + x_4 a_1 , \\ \bar{x}_2 &= x_1 a_3 + x_2 a_4 - x_3 a_1 + x_4 a_2 , \\ \bar{x}_3 &= - x_1 a_2 + x_2 a_1 + x_3 a_4 + x_4 a_3 , \\ \bar{x}_4 &= - x_1 a_1 - x_2 a_2 - x_3 a_3 + x_4 a_4 , \end{aligned}$$

i tabelkę mnożenia:

	1	2	3	4
1	$-e_4$	e_3	$-e_2$	e_1
2	$-e_3$	$-e_4$	e_1	e_2
3	e_2	$-e_1$	$-e_4$	e_3
4	e_1	e_2	e_3	e_4 .

Wśród skończonych ciągłych grup przekształceń, wyróżniają się swą prostotą grupy jednoczęściowe t. j. grupy z jednym parametrem:

$$(15) \qquad \bar{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) .$$

Jeżeli taka grupa posiada do każdego przekształcenia przekształcenie odwrotne, a więc i tożsamościowe, to wprowadzając

zamiast a odpowiedni parametr t, można równania (15) doprowadzić do postaci:

$$(16)\quad \begin{aligned} &\Omega_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \Omega_i(x_1, \ldots, x_n), \quad (i=1,2,\ldots,n-1) \\ &\Omega_n(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \Omega_n(x_1, \ldots, x_n) + t, \end{aligned}$$

zwanej kanoniczną, która spełnia zupełnie określony układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(17)\quad \frac{d\bar{x}_i}{dt} = \xi_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Z tego układu wynika, że przekształcenie grupy jednoczęściowej można interpretować jako trwały ruch cieczy, oraz że do grupy należą przyrosty nieskończenie małe:

$$(18)\quad \delta x_i = \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\,\delta t \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Te nieskończenie małe przyrosty zmiennych, stanowią t. zw. n i e s k o ń c z e n i e m a ł e p r z e k s z t a ł c e n i e, ktore często wyraża się w formie, dającej odrazu nieskończenie mały przyrost jakiejkolwiek funkcyi $f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$(19)\quad \frac{\delta f}{\delta t} = \sum_1^n{}^i\, \xi_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i};$$

a na oznaczenie tego wyrażenia używa się także skróconego symbolu Xf. Każde skończone przekształcenie grupy (15) można wytworzyć, stosując nieskończoną liczbę razy przekształcenie nieskończenie małe.

Pojęcie nieskończenie małego przekształcenia określił L i e w roku 1872. W teoryi ciągłych grup przekształceń, odgrywa ono podobną rolę, jak pojęcie różniczki w nauce o zmienności funkcyj.

Grupy r częściowe, w których do każdego przekształcenia znajduje się przekształcenie odwrotne, można także wytwarzać za pomocą przekształceń nieskończenie małych. Każda taka grupa posiada r niezależnych od siebie przekształceń nieskończenie ma-

rych, t. j. dla wyznaczenia najogólniejszego przyrostu funkcyi $f(x_1, \ldots, x_n)$ mamy:

$$(20) \quad \frac{\delta f}{\delta t} = \sum_1^r{}^k e_k X_k f = \sum_1^r{}^k e_k \sum_1^n{}^i \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

gdzie e_k oznaczają stałe dowolne, których nie można zastąpić mniejszą liczbą stałych dowolnych. Nieskończenie małe przekształcenia każdej grupy czynią zadość pewnym związkom różniczkowym, które zarazem są dostateczne, aby r danych nieskończenie małych przekształceń były nieskończenie małemi przekształceniami jednej i tej samej grupy.

Bardzo ważnem jest pojęcie podobieństwa grup. Dwie grupy są podobne, jeżeli od przekształceń jednej można przejść do przekształceń drugiej za pomocą jakiejkolwiek zamiany zmiennych. Dwie podgrupy danej grupy są wewnątrz tej grupy ze sobą równoważne, jeżeli od jednej z tych podgrup można przejść do drugiej za pomocą zamiany zmiennych, będącej przekształceniem grupy. Podgrupa nazywa się niezmienną, jeżeli wszystkie przekształcenia grupy przeprowadzają tę podgrupę w samą siebie.

Ze względu na zastosowania najważniejszemi są pojęcia niezmiennika, niezmiennego równania i niezmiennego układu równań. Niezmiennikiem grupy nazywa się funkcya, która przy wszystkich przekształceniach grupy ma taki sam kształt w zmiennych przekształconych, jaki miała w zmiennych pierwotnych. W stosunku do przekształceń nieskończenie małych, niezmienniki są rozwiązaniami układu równań cząstkowych:

$$(21) \quad X_k f = \sum_1^n{}^i \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

a więc określanie niezmienników, gdy dane są nieskończenie małe przekształcenia, wymaga całkowania układów zupełnych. Równaniem niezmiennem nazywa się takie równanie, które po przekształ-

ceniu można w nowych zmiennych doprowadzić do tej samej formy, która miała miejsce w zmiennych pierwotnych. Równanie:

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{22}$$

jest równaniem niezmiennem, jeżeli dla wartości zmiennych, spełniających to równanie, wyrażenie $X_k \Omega$ są zerami. Podobną definicyę i podobne kryteryum mamy dla niezmiennych układów równań.

Interesującym przykładem tych rozważań ogólnych są ich zastosowania do przekształceń rzutowych, stanowią one bowiem ważne przyczynki do t. zw. geometryi syntetycznej lub lepiej rzutowej. Przekształcenia rzutowe w płaszczyźnie określają się równaniami:

$$\bar{x} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad \bar{y} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \tag{23}$$

i wszystkie razem wzięte tworzą ośmioczęściową grupę ciągłą, która do każdego przekształcenia posiada odwrotne. Mamy tu więc 8 niezależnych od siebie nieskończenie małych przekształceń i łatwo wyprowadzić, że są one następujące:

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, x\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial x}, x\frac{\partial f}{\partial y}, y\frac{\partial f}{\partial y}, \\ x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y}, xy\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y}. \end{gathered} \tag{24}$$

Można pokazać, że wewnątrz ogólnej grupy rzutowej każde nieskończenie małe przekształcenie rzutowe jest równoważne z jednem z następujących nieskończenie małych przekształceń:

$$\begin{gathered} 1)\ x\frac{\partial f}{\partial x} + ay\frac{\partial f}{\partial y},\ 2)\ \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y},\ 3)\ \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}, \\ 4)\ x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y},\ 5)\ \frac{\partial f}{\partial y}, \end{gathered} \tag{25}$$

gdzie a może przybierać wszystkie możliwe wartości, ale jest odmienne od zera i od jedności. Te typy rdzennie różnią się od siebie własnościami niezmiennikowemi. Jeżeli zwrócimy naprzód uwagę na niezmienne proste i punkty, to grupy jednoczęściowe typu 1) pozostawiają bez zmiany trzy wierzchołki i trzy boki tego samego trójkąta; typu 2) dwie proste, ich punkt spotkania i jeszcze jeden punkt, leżący na jednej z tych prostych; 3) punkt i przechodzącą przezeń prostą; 4) pęk prostych niezmiennych, przechodzących przez punkt niezmienny i nieskończony szereg punktów leżących na prostej nie należącej do pęku; 5) pęk prostych niezmiennych i nieskończony szereg niezmiennych punktów, leżących na jednej z prostych pęku. Przechodząc teraz do niezmiennych linij krzywych, zanotujemy naprzód, że typy 4) i 5), prócz wskazanych prostych, nie pozostawiają bez zmiany żadnych innych linij krzywych. Dla typu 3) niezmiennemi krzywemi są przecięcia stożkowe, które nie rozpadają się na linie proste. Dla typów 1) i 2) mamy linie krzywe, które przez rzutową zamianę zmiennych można odpowiednio zredukować do postaci:

$$y = x^a \quad \text{i} \quad y = e^x . \tag{26}$$

Mamy tedy przegląd (dokonany w roku 1870 przez Kleina i Liego) wszystkich punktów i krzywych, które pozostają bez zmiany przy grupach rzutowych.

Prócz podgrup jednoczęściowych zawarte są w grupie rzutowej różne podgrupy wieloczęściowe. Np. wszystkie przekształcenia rzutowe, które pozostawiają bez zmiany nieskończenie oddaloną prostą, tworzą sześcioczęściową grupę liniową:

$$\bar{x} = a_1 x + b_1 y + c_1 \quad , \quad \bar{y} = a_2 x + b_2 y + c_2 . \tag{27}$$

Z pomiędzy grup liniowych niezmiernie ważną jest grupa ruchów euklidesowych:

$$\bar{x} = x \cos a - y \sin a + a \ , \ \bar{y} = x \sin a + y \cos a + b , \tag{28}$$

gdzie a, b oznaczają przesunięcia, a a kąt obrotu, która charakteryzuje się niezmiennością odległości dwu punktów i t. d.

W przestrzeni trzywymiarowej i w przestrzeniach o jeszcze większej liczbie wymiarów można dla grupy rzutowej przeprowadzać rozważania analogiczne. To też dla przestrzeni trzywymiarowej Lie przeprowadził podział na typy nieprzywiedlne w grupie rzutowej i wystudyował własności niezmiennikowe tych typów. Z pomiędzy podgrup ogólnej grupy rzutowej w przestrzeni, zwrócimy uwagę na grupę ruchów euklidesowych, t. j. grupę, której przekształcenia pozostawiają bez zmiany odległość dwu punktów w przestrzeni, oraz na dwie grupy ruchów nieeuklidesowych, które są rzeczywistemi grupami rzutowemi, pozostawiającemi odpowiednio bez zmiany powierzchnię $x^2+y^2+z^2-1=0$ lub powierzchnię $x^2+y^2+z^2+1=0$. Zobaczymy zaraz, że te grupy odgrywają bardzo ważną rolę w badaniach, dotyczących podstaw geometryi.

Geometrya opiera się na szeregu pewnych aksyomatów. Oddawna starano się liczbę tych aksyomatów zmniejszyć i w szczególności wyprowadzić t. zw. XI-ty aksyomat Euklidesa (o liniach równoległych) z aksyomatów poprzednich. Wszelkie próby jednak nie doprowadzały do rezultatu i sprawa wyjaśniła się dopiero dzięki badaniom Łobaczewskiego (1829), Bolyai'a (1832) i Gaussa, którzy rozwinęli system podobny do systemu Euklidesa, lecz od niego odmienny, bez użycia XI-go aksyomatu. Później Riemann (1854) z pewnego szeregu aksyomatów, odnoszących się przeważnie do własności przestrzeni w bezpośredniej okolicy danego punktu, wyprowadza geometryę Euklidesa, Łobaczewskiego i jeszcze inną nową geometryę, którą później nazwano Riemannowską. Nareszcie Helmholtz (1868) podaje szereg aksyomatów, w których mowa nie o punktach nieskończenie blizkich, jak u Riemanna, lecz o punktach, będących na skończonych odległościach, i z nich znowu wyprowadza geometryę Euklidesa, Łobaczewskiego i Riemanna. Jednakowoż prace Riemanna i Helmholtza nie są pozbawione wielu usterek. Problemat, który w tych zresztą wielkiej wagi pracach jest podjęty, ale nie dostatecznie dobrze rozwiązany, można sformułować w wyrazach następujących: „Należy znaleść układ takich aksyomatów, który z pomiędzy wszystkich możliwych ruchów wyróżnia zarówno

grupę ruchów euklidesowych, jako też i obie grupy ruchów nieeuklidesowych". Widzimy tedy, że problemat ten z natury rzeczy należy do teoryi przekształceń. To też za pomocą swych metod Lie był w możności poddać krytyce prace wcześniejszych badaczy (1886) i sam podać swoje rozwiązania (1890). Rozwiązań tych bynajmniej nie należy uważać za jedynie możliwe, bo problemat jest w ogóle nieokreślony. Podstawą dwu rozwiązań Liego są naprzód założenia następujące: 1) Przestrzeń jest ciągłą, trzywymiarową rozmaitością liczb, t. j. punkty tej przestrzeni mogą być określone za pomocą trzech spółrzędnych, zmieniających się w sposób ciągły. 2) Skupienie wszystkich możliwych ruchów ciała sztywnego w tej przestrzeni jest ciągłą rzeczywistą grupą przekształceń, wytworzoną przez przekształcenia nieskończenie małe. Prócz tego w pierwszem rozwiązaniu, bardziej zbliżonem do badań Riemanna, Lie zakłada, że, gdy zatrzymamy jakikolwiek punkt rzeczywisty P i przechodzący przezeń rzeczywisty element liniowy, to ruch jeszcze jest możliwy; gdy jednakowoż zatrzymamy i rzeczywisty element powierzchniowy, zawierający i ten punkt P i powyższy element liniowy, to ruch już jest niemożliwy. W drugiej metodzie, bardziej zbliżonej do badań Helmholtza, zamiast tego ostatniego założenia, występuje następujące. Jeżeli ustalimy jakikolwiek punkt rzeczywisty x_0, y_0, z_0 ogólnego położenia, to z jednej strony wszystkie rzeczywiste punkty, w które może jeszcze przechodzić inny punkt rzeczywisty x_1, y_1, z_1, leżą na powierzchni, która nie przechodzi przez punkt $x = x_0, y = y_0, z = z_0$; z drugiej zaś można zawsze znaleść taki trzywymiarowy obszar naokoło punktu x_0, y_0, z_0, że każdy inny punkt rzeczywisty x_1, y_1, z_1 zupełnie swobodnie porusza się na wspomnianej powierzchni. W obu przypadkach Lie dochodzi do grupy ruchów euklidesowych i do obu grup ruchów nieeuklidesowych i oczywiście do wszystkich grup im podobnych. Lie wykazuje, że jego układy aksyomatów są doskonalsze od układów aksyomatów jego poprzedników, bo wymagania w nich postawione są mniejsze. Należy zauważyć, że do płaszczyzny i do przestrzeni wielowymiarowych twierdzenia powyższe nie we wszystkich przypadkach można przenieść bez wszelkich zastrzeżeń. Lie szczegółowo omawia i te przestrzenie; my jednak to pominiemy

a przejdziemy do innych kwestyj, które łączą się z ogólną teoryą grup ciągłych.

Rozróżnialiśmy różne typy nieskończenie małych przekształceń rzutowych. Zagadnienie określania różnych typów grup przekształceń jest jednem z najważniejszych w teoryi przekształceń. Można przytem albo szukać typów od siebie odmiennych wewnątrz danej skończonej grupy przekształceń, albo też określać takie typy, które nie przechodzą jedne w drugie za pomocą żadnego przekształcenia. To drugie ogólniejsze stanowisko wymaga pewnego wyjaśnienia. Mogłoby się zdawać, że rozmaitość wszystkich typów np. na płaszczyźnie jest (wyrażając się według G. Cantora) rozmaitością nieprzeliczalną, bo rozmaitość wszystkich grup skończonych jest rozmaitością nieprzeliczalną; tak jednak nie jest, rozmaitość wszystkich typów jest przeliczalna, a więc może być mowa o ich określaniu. Lie dokonał tej klasyfikacyi dla płaszczyzny i przestrzeni trzywymiarowej. Zobaczymy w dalszym ciągu, jakie korzyści wynikają z tej klasyfikacyi dla teoryi całkowania równań różniczkowych.

Mówiliśmy o niezmiennikach i równaniach niezmiennych grup przekształceń. Te ogólne definicye wykazują, że wiele kwestyj z teoryi form są tylko szczególnemi przypadkami ogólnych zasad teoryj Liego. Uważajmy formę dwójkową stopnia n:

$$a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n \tag{29}$$

i czteroczęściową liniową grupę przekształceń:

$$\bar{x} = ax + by \quad , \quad \bar{y} = cx + dy \, . \tag{30}$$

Po wykonaniu tego przekształcenia na formie (29) otrzymamy nową formę:

$$\bar{a}_0 \bar{x}^n + \binom{n}{1} \bar{a}_1 \bar{x}^{n-1} \bar{y} + \ldots + \bar{a}_n y^n \, , \tag{31}$$

gdzie spółczynniki $\bar{a}_i$ są funkcyami liniowemi i jednorodnemi spółczynników a_i:

$$(32) \qquad \bar{a}_i = \sum_1^n {}_k A_{ik} a_k \,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie A_{ik} zależą od a, b, c, d. Równania te tworzą znów grupę czteroczęściową z parametrami a, b, c, d. Wyrażenia, które w teoryi form nazywają się niezmiennikami, otrzymują się bądź z niezmienników, bądź z równań niezmiennych tej grupy (32); spółzmienniki są niezmiennikami grupy określonej przez równania (30) i (32), a najważniejsze zagadnienie w teoryi form o równoważności dwu form, może być rozwiązane na podstawie ogólnych zasad teoryi grup przekształceń. Istotnie, układ wartości $a_0, a_1, \ldots, a_n$ można uważać jako $n+1$ spółrzędnych punktu w przestrzeni o $n+1$ wymiarach; dwie formy są ze sobą równoważne, jeżeli punkt a_i może przejść w punkt $\bar{a}_i$ za pomocą przekształcenia grupy. W teoryi przekształceń udowadnia się twierdzenie, że jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy punkt $\bar{a}_i$ leży na rozmaitości niezmiennej o możliwie najmniejszej liczbie wymiarów przechodzącej przez punkt a_i. Twierdzenie to jest rozwiązaniem problematu o równoważności. Z tych uwag wynika, że wiele ogólnych punktów widzenia w teoryi form podporządkowuje się zasadom teoryi przekształceń. Nie dotyczy to bynajmniej zagadnień algebraicznej natury w teoryi form, które należą do algebry.

Pojęcie niezmienności funkcyj i równań rozszerzył Lie na funkcye i równania, zawierające pochodne jednych ze zmiennych względem drugich. Uważajmy r — częściową ciągłą grupę przekształceń $m+n$ zmiennych x_i i y_k:

$$(33) \qquad \begin{aligned} \bar{x}_i &= \varphi_i(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_n;\ a_1, \ldots, a_r) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \\ \bar{y}_k &= \psi_k(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_n;\ a_1, \ldots, a_r) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Jeżeli w tej grupie traktować będziemy zmienne y_k jako funkcye zmiennych x_i, to można zapytać się, jak przekształcają się pochodne zmiennych y_k względem zmiennych x_i. Dajmy na to, że uwzględnimy wszystkie pochodne aż do rzędu N włącznie. Przekształcenia, którym podlegają te pochodne, stanowią wraz z przekształceniami (33) także grupę r — częściową, którą nazy-

wamy grupą N—krotnie uzupełnioną. Aby dać przykład uzupełniania grupy, uważajmy przypadek możliwie najprostszy, t. j. grupę jednoczęściową w dwu zmiennych:

$$\bar{x} = \varphi(x, y, a) \quad , \quad \bar{y} = \psi(x, y, a) , \tag{34}$$

której nieskończenie małe przekształcenie jest:

$$Uf = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} ; \tag{35}$$

uzupełniając ją względem y', pochodnej y względem x, trzeba będzie do równań (34) dodać jeszcze równanie:

$$\bar{y}' = \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y} y'}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} y'} , \tag{36}$$

a nieskończenie małe przekształcenie tej grupy jednokrotnie uzupełnionej jest:

$$U^{(1)} f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2 \right] \frac{\partial f}{\partial y'} . \tag{37}$$

Funkcya niezmienna przy grupie uzupełnionej nazywa się niezmiennikiem różniczkowym, a równanie niezmienne przy przekształceniach grupy uzupełnionej równaniem różniczkowem niezmiennem. Rzecz oczywista, że dla wyznaczania tych utworów niezmiennych istnieją takie same prawidła, jak dla wyznaczania niezmienników i równań niezmiennych przy grupach nieuzupełnionych. Te nowe utwory niezmienne, odgrywają bardzo ważną rolę w wielu zagadnieniach, a w szczególności pozwalają zupełnie ogólnie wyznaczyć warunki konieczne i dostateczne, którym mają czynić zadość dwie formy matematyczne, aby jedna mogła przechodzić w drugą za pomocą przekształceń danej grupy.

Ten problemat równoważności traktuje Lie w ogólnych zarysach jak następuje. Równania:

$$(38) \qquad y_k = y_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

określają w przestrzeni o $m + n$ wymiarach pewną m wymiarową rozmaitość. Uważajmy drugą taką rozmaitość:

$$(39) \qquad y_k = \overline{y}_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

i zapytajmy, przy jakich warunkach rozmaitości te przechodzą jedna w drugą za pomocą jakiegokolwiek przekształcenia grupy. Wszystkie rozmaitości, które otrzymują się z (38) przez przekształcenia grupy (33) określić można za pomocą układu równań cząstkowych dla niewiadomych funkcyj y_k zmiennych x_i. Układ ten musi być niezmiennym układem, bo określa niezmienne skupienie rozmaitości. Można okazać, że — pomijając przypadki wyjątkowe— równania tego układu są związkami pomiędzy niezmiennikami i niezmiennikami różniczkowemi grupy. Zakładając, że mamy nieskończony szereg niezmienników:

$$(40) \qquad I_1, I_2, \ldots, I_m, I_{m+1}, \ldots, I_\lambda, \ldots$$

obliczamy ich wartości dla rozmaitości (38):

$$(41) \qquad I_l = \sigma_l(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad (l = 1, 2, 3, \ldots)$$

i dla otrzymania rzeczonych związków wystarcza wyrugować z równań (41) wielkości $x_1, x_2, \ldots, x_m$, co daje równania cząstkowe:

$$(42) \qquad I_l = \tau_l(I_1, I_2, \ldots, I_m). \quad (l = m + 1, m + 2, \ldots, \lambda, \ldots)$$

Tym równaniom czyni zadość skupienie naszych rozmaitości. Można okazać, że te równania zawsze redukują się do skończonej liczby takich równań, t. j. że np. z $\lambda - m$ pierwszych z tych równań wszystkie inne otrzymują się przez różniczkowanie. Wówczas układ niezmienników:

$$(43) \qquad I_1, I_2, \ldots, I_\lambda$$

nazywa się pełnym układem niezmienników różniczkowych i za pomocą tych niezmienników rozwiązuje się

w ogóle problemat o równoważności. Jeżeli mianowicie, obliczając wartości tych niezmienników dla rozmaitości (39), otrzymamy:

$$(44) \qquad I_l = \overline{\sigma}_l(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad (l = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

to koniecznym i dostatecznym warunkiem równoważności jest to, żeby te wartości spełniały pierwsze $\lambda - m$ równań układu (42).

Przykładem tej teoryi może być zwykła teorya krzywizny linij i powierzchni krzywych. Cechy krzywiznowe są to takie cechy, które określają tylko kształt utworów geometrycznych, a są niezależne od ich położenia w przestrzeni. Zatem cechy krzywiznowe muszą być niezmienne przy grupie ruchów euklidesowych. Inaczej, teorya krzywizny jest teoryą niezmienników grupy ruchów euklidesowych. Można mianowicie pytać o warunki konieczne i dostateczne, aby dwie krzywe, dwie powierzchnie przechodziły jedna w drugą za pomocą grupy ruchów euklidesowych, t. j. aby były do siebie przystającemi. Odpowiedź na to zapytanie uzyskuje się bezpośredniem zastosowaniem powyższej metody. Niezmienniki różniczkowe grupy ruchów euklidesowych dla krzywych płaskich są:

$$(45) \qquad r = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad \frac{dr}{ds}, \quad \frac{d^2r}{ds^2}, \ldots$$

gdzie r oznacza promień krzywizny, a s długość łuku linii krzywej. Ale już r i $\frac{dr}{ds}$ tworzą układ pełny, więc aby dwie krzywe były przystającemi, muszą obie czynić zadość jednemu i temu samemu równaniu:

$$(46) \qquad \frac{dr}{ds} = w(r).$$

To twierdzenie ma pewne wyjątki, które pomijamy. Podobne rozważania, ale bardziej skomplikowane przeprowadził Lie dla krzywych przestrzennych i dla powierzchni.

Niemal wszystkie do teoryi grup należące rozważania, o których była mowa, można przenieść jeszcze na inną kategoryę ciągłych grup przekształceń. Dotychczas uważaliśmy grupy, które

miały skończoną liczbę dowolnych parametrów, t. j. grupy skończone. Grupę ciągłą, w której znajduje się nieskończona liczba dowolnych parametrów, t. j. funkcye dowolne, nazywa Lie grupą nieskończoną (1882). Można powiedzieć, że takie grupy mają nieskończenie wiele niezależnych od siebie nieskończenie małych przekształceń, t. j. że najogólniejsze przekształcenie nieskończenie małe takiej grupy zależy od funkcyj dowolnych. Niezmienniki, równania niezmienne, niezmienne układy równań, niezmienniki różniczkowe i t. d., definiują się dla grup nieskończonych tak samo jak dla grup skończonych. Tak samo jak dla grup skończonych, określa się podobieństwo grup i można przeprowadzać klasyfikacyę grup nieskończonych. Wreszcie w ten sam sposób można przedstawić teoryę równoważności form matematycznych wewnątrz danej grupy. Należy zauważyć, że w tych rozważaniach, jak i we wszystkich innych, Lie ograniczał się do grup, których przekształcenia mogą być określone w pewien sposób przez równania różniczkowe. Jakkolwiek założenie to bardzo jest ważne, nie będziemy się zajmowali bliższem jego omawianiem, a zauważymy tylko, że rzeczone równania różniczkowe można wziąć za podstawę teoryi niezmienników różniczkowych zarówno skończonych jak i nieskończonych grup przekształceń, i że przy takiem traktowaniu tej teoryi niema pomiędzy jedną i drugą kategoryą grup zasadniczej różnicy. W ten sposób teoryę niezmienników różniczkowych przeprowadził pod kierunkiem Liego jeden z jego uczniów Tresse.

Klasycznym przykładem nieskończonej ciągłej grupy przekształceń jest grupa wszystkich zginań powierzchni. Jeżeli dwie powierzchnie można tak odwzorować jednę na drugą za pomocą jakiegokolwiek przekształcenia:

$$\bar{u} = U(u, v) \quad , \quad \bar{v} = V(u, v) \, , \tag{47}$$

że element liniowy jednej:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{48}$$

przechodzi na mocy tego przekształcenia na element liniowy drugiej:

$$(49) \qquad ds^2 = \bar{E}d\bar{u}^2 + 2\bar{F}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}d\bar{v}^2,$$

to powierzchnie te jedna z drugiej otrzymują się za pomocą gięcia. Z tej odpowiedniości wynikają pewne wyrażenia wielkości $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ przez u, v, E, F, G. Wyrażenia te łącznie z równaniami (47) określają przekształcenie zmiennych niekreskowanych na zmienne kreskowane. Jeżeli w tem przekształceniu funkcye U i V uważamy jako dowolne, to mamy nieskończoną mnogość przekształceń, które wszystkie razem tworzą grupę nieskończoną. Teorya zginania powierzchni jest teoryą równoważności powierzchni wewnątrz tej grupy nieskończonej. Miara krzywizny Gaussa, parametry różniczkowe Beltrami'ego, krzywizna geodezyjna Mindinga, są to jej niezmienniki różniczkowe najniższych rzędów. Wszystkie te kwestye można traktować jako zastosowania teoryi przekształceń Liego.

Inny przykład grupy nieskończonej daje teorya Laguerre'a (1879) przekształcania równań liniowych, która powstała niezależnie od teoryi Liego. Jeżeli uważać będziemy grupę przekształceń w dwu zmiennych:

$$(50) \qquad \bar{x} = X(x) \quad , \quad \bar{y} = y\,Y(x),$$

gdzie $X(x)$ i $Y(x)$ są funkcye dowolne i równanie liniowe jednorodne:

$$(51) \qquad y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\,y = 0,$$

to łatwo dostrzedz, że to równanie, po wykonaniu jakiegokolwiek przekształcenia (50), przechodzi w liniowe jednorodne tego samego rzędu, tylko z innemi spółczynnikami. Przekształcenia, którym podlegają te spółczynniki, tworzą grupę i można uważać niezmienniki tej grupy, a za pomocą tych niezmienników traktować zadanie o przekształcalności jednych równań liniowych w drugie za pomocą grupy Laguerre'a. Zagadnienie to i zagadnienia podobnej treści w zastosowaniu do innych kategoryj grup i równań różniczkowych, traktowane były przez uczonych francuskich, z których

należy przedewszystkiem wymienić Halphena, Appella, R. Liouville'a i Goursata.

Ale zwrócimy się teraz do innej kategoryi zagadnień z teoryi równań różniczkowych. Uważajmy naprzód równanie różniczkowe 1-go rzędu:

$$X(x, y)\,dy - Y(x, y)\,dx = 0 \tag{52}$$

i załóżmy, że to równanie jest niezmiennem równaniem różniczkowem grupy jednoczęściowej z nieskończenie małem przekształceniem:

$$Uf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{53}$$

Pominiemy algorytmiczne kryteryum tego faktu, a nadmienimy tylko, że on oznacza, iż krzywe całkowe naszego równania przechodzą jedne w drugie przy przekształceniach jednoczęściowej grupy Uf. Otóż w tym przypadku Lie podaje wzór (1874) na czynnik całkujący równania (52) mianowicie:

$$\frac{1}{X\eta - Y\xi}. \tag{54}$$

Na podstawie tego twierdzenia łatwo oddawna znane a nie powiązane ze sobą żadną wspólną nicią całkowania najprostszych kategoryj równań rzędu 1-go, przedstawić metodycznie np. odrazu widać, że równania jednorodne zezwalają na grupę przekształceń podobieństwa:

$$\bar{x} = ax \quad , \quad \bar{y} = ay \tag{55}$$

i stąd bezpośrednio wynika czynnik całkujący równania jednorodnego. Na mocy twierdzenia o czynniku całkującym Lie otrzymał wiele różnych twierdzeń w zakresie geometryi różniczkowej, np. znane jest jego twierdzenię: linie asymptotyczne i linie krzywiznowe powierzchni o stałej krzywiźnie (Gaussa) można określić za pomocą kwadratur.

Twierdzenie o czynniku całkującym jest najelementarniejszem w teoryi równań różniczkowych, zezwalających na nieskończenie małe przekształcenia. Lie uogólnił te elementarne rozważania w różnych kierunkach.

Niechaj będzie układ rownań różniczkowych zwyczajnych:

$$(56)\quad \frac{dx_1}{a_1(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{dx_2}{a_2(x_1,\ldots,x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{a_n(x_1,\ldots,x_n)}$$

zezwalający na $n-1$ nieskończenie małych przekształceń:

$$(57)\quad X_k f=\xi_{k1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_{k2}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+\xi_{kn}\frac{\partial f}{\partial x_n}\quad (k=1,2,\ldots,n-1).$$

Pomijając przypadki wyjątkowe, iloraz:

$$(58)\qquad 1:\begin{vmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \\ \xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_{n-1,1}, \xi_{n-1,2},\ldots, \xi_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

jest mnożnikiem Jacobi'ego układu równań (56). Ponieważ układ równań (56) jest równoważny z jednem równaniem cząstkowem, więc dalszych uogólnień możnaby żądać dla układów takich równań cząstkowych. Taką jest teorya Liego całkowania układów zupełnych, zezwalających na przekształcenia grup ciągłych (1874). Teorya ta podobnie do teoryi Galois'a polega w znacznej mierze na stopniowem wyzyskaniu podgrup rzeczonej grupy, a jest teoryą wielkiej wagi, bo w nauce o równaniach różniczkowych bardzo wiele zagadnień sprowadza się do całkowania układów zupełnych.

Inne uogólnienia dotyczą równań różniczkowych zwyczajnych. Aby w krótkich wyrazach scharakteryzować te badania, przypomnimy, że wszystkie grupy w dwu zmiennych można zredukować do przeliczalnej ilości odrębnych typów i że Lie do-

konał tej klasyfikacyi. Przypuśćmy tedy, że pewna grupa G w formie kanonicznej (t. j. typowej) nie zmienia równania różniczkowego:

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'', \ldots, \bar{y}^{(n)}) = 0 . \tag{59}$$

Z jednej strony wynikają stąd uproszczenia całkowania tego równania, np. gdy to równanie pozostaje bez zmiany przy grupie:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}, \bar{y}\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}, \tag{60}$$

to mamy niezmiennik $\frac{\bar{y}''}{\bar{y}'} = u$, który wprowadzony jako nowa zmienna, zmniejsza rząd równania o dwie jednostki. W ten sposób otrzymują się poniekąd metodycznie przytaczane w podręcznikach uproszczenia całkowania równań różniczkowych zwyczajnych rzędów wyższych. Ale można dla teoryi całkowania uzyskać o wiele więcej. Jeżeli w równanie (59) wprowadzimy nowe zmienne:

$$\bar{x} = X(x, y) \quad , \quad \bar{y} = Y(x, y) , \tag{61}$$

gdzie X i Y są funkcye dowolne, to otrzymamy równanie różniczkowe:

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{62}$$

pewnego ogólniejszego kształtu Gdyby należało całkować właśnie jakieś dane równanie kształtu (62), to możnaby to zadanie traktować jako problemat redukcyi do postaci (59). Cała trudność polegałaby na wyznaczeniu przekształcenia (61), które określa się tu całkowaniem pewnego układu równań różniczkowych cząstkowych. Ten układ jest niezmiennym układem grupy G i można okazać, że równania cząstkowe, należące do tego układu, mają postać:

$$I_k(X, Y) = \Phi_k(x, y) , \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{63}$$

gdzie $I_k(X, Y)$ jest niezmiennikiem różniczkowym grupy G, uzupełnionej względem pochodnych funkcyj X, Y względem zmiennych

x, y, a $\Phi_k(x, y)$ jest daną funkcyą zmiennych x, y. Lie udowadnia, że całkowanie takiego układu można w ogóle wykonać za pomocą kwadratur i całkowania jednego równania liniowego jednorodnego drugiego rzędu, a tylko w pewnych mniej dogodnych przypadkach potrzebne jest całkowanie równania liniowego wyższego rzędu.

Nie ulega wątpliwości, że analogiczne teorye mogą być rozwijane i dla równań cząstkowych, a więc idee te są w każdym razie tak ogólnej natury, że samo przez się nastręcza się zapytanie, jak określić ich wartość naukową. W tym celu należy zauważyć, że odnoszą się one tylko do tych przypadków, w których równanie lub układ równań zezwalają na przekształcenia grup ciągłych. To bynajmniej nie zawsze bywa; już wśród zwyczajnych równań rzędu drugiego są równania, które nie zezwalają na żadne grupy ciągłe, a naturalnie te stosunki są jeszcze mniej korzystne, gdy przejdziemy do równań zwyczajnych rzędów wyższych, lub równań cząstkowych. Zatem teorye te, jakkolwiek niezmiernie wielkiej wagi, nie mają cechy zupełnej ogólności. Dalej, w teoryach tych chodzi o redukcyę do kwadratur, względnie do całkowania równań możliwie najniższych rzędów i najmniej skomplikowanej postaci, t. j. o zredukowanie zadania do możliwie najprostszych działań, a niema żadnych elementów teoretyczno-funkcyjnych, t. j. wcale nie stawia się pytania, jakie kategorye funkcyj czynią zadość danym równaniom, tak jak np. w teoryi Fuchsa równań liniowych. Stąd jednakowoż bynajmniej nie wynika, by pojęcia teoryi grup ciągłych nie nadawały się do teoretyczno-funkcyjnego traktowania równań różniczkowych. Takie zastosowanie teoryi przekształceń i — powiedzmy — zastosowanie bardzo wielkiej doniosłości podali Picard (1883) i Vessiot (1892) dla równań różniczkowych liniowych.

Uważajmy równanie liniowe z wymiernemi spółczynnikami:

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0 \tag{64}$$

i oznaczmy fundamentalny układ rozwiązań przez $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Rozwiązania te są w ogóle funkcyami, nie należącemi do funkcyj wymiernych. Równanie (64) możnaby uważać za zcałkowane,

jeżelibyśmy w ten sposób zdołali rozszerzyć zakres znanych nam funkcyj, t. j. obszar wymierności, aby rozwiązania $y_1, y_2, \ldots, y_n$ należały do tego obszaru. Do rozszerzenia obszaru wymierności, możemy dążyć w sposób następujący. Każdemu równaniu liniowemu odpowiada pewna liniowa jednorodna, bądź ciągła, bądź też składająca się ze skończonej liczby ciągłych gromad grupa G przekształceń elementów układu fundamentalnego y_i która określa się własnością następującą. Grupa G jest taką grupą liniową, że każde wymierne wyrażenie różniczkowe rozwiązań y_i, które dla danego równania jest funkcyą wymierną zmiennej x, pozostaje bez zmiany, gdy elementy y_i poddajemy przekształceniom grupy G, i nawzajem; każde wymierne wyrażenie różniczkowe elementów y_i, które pozostaje bez zmiany przy przekształceniach grupy G, jest dla danego równania funkcyą wymierną zmiennej x. Grupa G jest czemś charakterystycznem dla równania różniczkowego w danym obszarze wymierności. Zagadnienie całkowania stałoby się prostszem, gdyby można było tak rozszerzyć obszar wymierności, żeby grupa równania zredukowała się do podgrupy grupy G. Chodzi tedy o to, żeby rozwiązywać takie równania algebraiczne i całkować takie równania różniczkowe, iżby grupa stawała się coraz mniejszą. Gdy nareszcie grupa zredukuje się do przekształcenia tożsamościowego, wówczas obszar wymierności tak już będzie rozszerzony, że do niego należeć będą wszystkie elementy y_i; równanie będzie już zcałkowane.

Mamy tedy prawie dokładną kopię teoryi Galois'a. Te rozważania doprowadziły Vessiota do ustawienia warunków całkowalności równań liniowych za pomocą kwadratur i do wielu innych rezultatów. Rozważania te są tak ogólnej natury, że mogą oczywiście być stosowane i do innych kategoryj równań różniczkowych. Ogólniejsze punkty widzenia w tym względzie rozwinął Drach (1898) i w szczególności zajął się teoryą równania:

$$(65)\quad a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Jeżeli układ niezależnych od siebie rozwiązań tego równania nazwiemy $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, to układ:

$$(66) \qquad \bar{z}_i = P_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

gdzie P_i są funkcye dowolne, przedstawiać będzie także układ rozwiązań tego równania. Równania (66) określają nieskończoną grupę wszystkich przekształceń $n-1$ zmiennych. Całkowanie równania (65) można za pomocą grupy (66) prowadzić w podobny sposób, jak całkowanie równania liniowego z pomocą grupy jednorodnej liniowej. Widoczna, że łatwo przeprowadzić uogólnienie takich rozważań dla układów zupełnych.

Podstawą rozważań, o których mówiliśmy dotychczas, są t. zw. przekształcenia punktowe. Jeżeli w przestrzeni o $n+1$ wymiarach spółrzędne punktu $x_1, \ldots, x_n, z$ przekształcamy na inne spółrzędne punktu na mocy równań:

$$(67) \qquad \begin{aligned} \bar{x}_i &= X_i(x_1, \ldots, x_n, z) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \bar{z} &= Z(x_1, \ldots, x_n, z) \end{aligned}$$

to takie przekształcenie nazywa się punktowem. Jeżelibyśmy przytem z traktowali jako funkcyę zmiennych x_i, t. j. uważali przekształcenie powierzchni, to możnaby zapytać się, jak zmienia się kierunek płaszczyzny stycznej do tej powierzchni w punkcie danym. Kierunek ten określa się za pomocą spółczynników $p_i = \frac{\partial x}{\partial x_i}$, więc należałoby przekształcenie (67) uzupełnić do pochodnych funkcyi z zmiennych x_i. Jeżeli punkt wraz z przechodzącą przezeń płaszczyzną nazwiemy elementem powierzchniowym, to spółrzędnemi elementu powierzchniowego będą właśnie x_i, z, p_i i przekształcenie uzupełnione określi przekształcenie tego elementu. Ale możemy elementy powierzchniowe przekształcać o wiele ogólniej. Takie najogólniejsze przekształcenie można napisać w postaci:

$$(68) \qquad \begin{aligned} \bar{x}_i &= X_i(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n), \\ \bar{z} &= Z(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \bar{p}_i &= P_i(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n). \end{aligned}$$

Z pomiędzy tych przekształceń, mówić będziemy o takiej ich kategoryi, która ma pewną cechę przekształceń punktowych. Jeżeli

ciągłe skupienie elementów powierzchniowych ma tę własność, że punkty wszystkich sąsiednich elementów do danego elementu leżą na płaszczyźnie tego ostatniego, to skupienie nazywa się zjednoczeniem elementów. Zjednoczenie elementów spełnia równanie Pfaffa:

$$dz - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 - \ldots - p_n\, dx_n = 0\,. \tag{69}$$

Przekształcenie punktowe (67) zmienia każde zjednoczenie elementów na zjednoczenie elementów. Przekształcenia (68), które także mają tę własność, że zmieniają każde zjednoczenie elementów na zjednoczenie elementów, nazywają się przekształceniami stycznościowemi. Tedy przekształcenia stycznościowe czynią zadość tożsamości:

$$\begin{aligned} &d\bar{z} - \bar{p}_1\, d\bar{x}_1 - \ldots - \bar{p}_n\, d\bar{x}_n \\ &= \varrho\,(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)\,[dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n]\,. \end{aligned} \tag{70}$$

Definicyę tę podał Lie w roku 1873. Przed nim znane były w nauce przykłady przekształceń tego typu, ale ogólne pojęcie przekształcenia stycznościowego nie było wyrobione.

Do tej kategoryi należą przekształcenia przez biegunowe wzajemne, stosowane tak korzystnie w geometryi syntetycznej przez Ponceleta (1822). Jeżeli mianowicie jako przecięcie stożkowe zasadnicze uważać będziemy koło:

$$x^2 + y^2 = 1\,, \tag{71}$$

to odpowiednie przekształcenie przez biegunowe wzajemne można będzie napisać w postaci:

$$\bar{x} = -\frac{p}{z - xp}\,,\ \bar{z} = \frac{1}{z - xp}\,,\ \bar{p} = -\frac{x}{z}\,. \tag{72}$$

Łatwo sprawdzić, że to przekształcenie elementów liniowych na płaszczyźnie jest istotnie przekształceniem stycznościowem.

Innym przykładem jest nie mniej ważne, podane przez Liego (1870) przekształcenie stycznościowe w trójwymiarowej przestrzeni:

$$(73)\quad \begin{gathered} \bar{x}+i\bar{y}=-z-x\frac{px+qy}{q-x},\ \bar{x}-i\bar{y}=\frac{y+p}{q-x},\ \bar{z}=\frac{px+qy}{q-x} \\ \bar{p}=\frac{qx-1}{q+x},\ \bar{y}=-i\frac{1+qx}{q+x}. \end{gathered}$$

Ma ono tę szczególną własność, że przekształca linie proste na kule. Aby zrozumieć ważność tego przekształcenia, należy zauważyć, że, gdy w zwykłej geometryi traktuje się punkt jako element przestrzeni, można także jako elementy przestrzeni uważać inne utwory geometryczne; widzieliśmy to na przykładzie elementu powierzchniowego. Już Plücker w swych badaniach geometrycznych stał na tem ogólnem stanowisku i taką jest jego geometrya linij prostych. Taką jest też t. zw. geometrya kul. Jeżeli zważymy, że i linij prostych i kul jest w przestrzeni trójwymiarowej ∞^4, to można powiedzieć, że przestrzeń ta jest ze względu na te utwory jako elementy czterowymiarową. Przekształcenie (73) ustanawia związek pomiędzy kulami i liniami prostemi, odgrywa więc podobną rolę, jak przekształcenie dualistyczne, które określają odpowiedniość punktów i płaszczyzn.

Do przekształceń stycznościowych można stosować wszystkie pojęcia teoryi grup przekształceń. Przedewszystkiem z samej definicyi przekształceń stycznościowych wynika, że wszystkie takie przekształcenia razem wzięte tworzą nieskończoną grupę przekształceń. Grupę tę można określić jako grupę wszystkich takich przekształceń punktowych przestrzeni o $2n+1$ wymiarach $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$, które pozostawiają bez zmiany równanie Pfaffa:

$$(74)\qquad dz-p_1\,dx_1-\ldots-p_n\,dx_n=0.$$

Ta grupa nieskończona może mieć różne podgrupy ciągłe skończone i nieskończone, z których zwrócimy przedewszystkiem uwagę na grupy jednoczęściowe. Jeżeli mają miejsce pewne warunki, przekształcenia tych grup można wytworzyć, stosując nieskończoną liczbę razy przekształcenia nieskończenie małe. Każde nieskończenie małe przekształcenie stycznościowe:

$$(75) \qquad \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^n{}_i \left(\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \pi_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \right),$$

gdzie ζ, ξ_i i π_i są funkcyami ilości x_i, z i p_i, ma tę charakterystyczną własność, że wprowadzając oznaczenie:

$$(76) \qquad W = p_1 \xi_1 + \ldots + p_n \xi_n - \zeta,$$

można je napisać w postaci:

$$(77) \qquad [W, f] - W \frac{\partial f}{\partial z},$$

gdzie klamra oznacza symbol Poissona:

$$(78) \qquad [W, f] = \sum_1^n{}_i \left\{ \frac{\partial W}{\partial p_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\}.$$

Nawzajem, jakkolwiek wybralibyśmy funkcyę W zmiennych x_i, z i p_i, to wzór (77) zawsze da nam przekształcenie stycznościowe.

Jeżeli dla przykładu wybierzemy:

$$(79) \qquad W = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

to otrzymamy nieskończenie małe przekształcenie:

$$(80) \qquad \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{\delta y}{\delta t} = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{\delta z}{\delta t} = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\frac{\delta p}{\delta t} = 0, \quad \frac{\delta q}{\delta t} = 0,$$

gdzie t oznacza czas. Odpowiednia grupa jednoczęściowa przeprowadza wszystkie elementy w punkcie danym w elementy do pierwotnych równoległe, leżące na kulach, opisanych z danego punktu jako środka. Zatem z danego punktu otrzymujemy po

czasie t kulę a; elementy każdego punktu tej kuli leżą po nowym przeciągu czasu t_1 na kulach o jednakowych promieniach; ale te z tych elementów, które były styczne do kuli a, leżą na nowej kuli, która jest powłoką kul poprzednich. Można fakt ten traktować jako wynik pojęcia grupy; z innej strony fakt ten znany jest pod nazwą zasady Huygensa w teoryi rozchodzenia się fal w ośrodku jednorodnym. Stąd wniosek o równoważności w tym przypadku pojęcia grupy i zasady Huygensa. Ale wniosek ten można uogólnić, mianowicie łatwo dostrzedz, że każdą grupę jednoczęściową przekształceń stycznościowych można interpretować jako rozchodzenie się fal, pomijając zresztą kwestyę możliwości urzeczywistnienia takiego ruchu. Pojęcie grupy będzie wówczas równoważne z odpowiednią zasadą Huygensa.

Grupy przekształceń stycznościowych stosuje Lie w takim samym sensie do teoryi całkowania równań różniczkowych, jak grupy przekształceń punktowych. Ale te badania pominiemy, a zwrócimy się jeszcze do omówienia ogólnej teoryi równań różniczkowych cząstkowych 1-go rzędu z jedną funkcyą niewiadomą, których całkowanie, dzięki nowym punktom widzenia, znacznie przez Liego zostało wydoskonalone (1874). W pracach poprzedników Liego (Euler, Lagrange, Cauchy, Jacobi, A. Mayer) pod rozwiązaniem układu równań cząstkowych:

$$(81)\quad F_i(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, m;\ m \leqq n+1)$$

rozumiano n-wymiarową rozmaitość punktów:

$$(82)\qquad \Phi(x_1, \ldots, x_n, z) = 0,$$

czyniącą zadość temu układowi. Lie, pojmując równanie różniczkowe jako związek, który z pośród wszystkich ∞^{2n+1} elementów powierzchniowych przestrzeni n-wymiarowej wyszczególnia ∞^{2n} tych elementów, określił problemat całkowania jako zagadnienie wyznaczenia n-wymiarowych rozmaitości elementów powierzchniowych, czyniących zadość danemu układowi równań i stano-

wiących zjednoczenie elementów, t. j. spełniających równanie Pfaffa:

$$dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0\,. \tag{83}$$

Można okazać, że każde zjednoczenie elementów o n-wymiarach składa się ze wszystkich elementów powierzchniowych stycznych do pewnej rozmaitości punktowej, przyczem ta rozmaitość punktowa może mieć dowolną liczbę wymiarów od 0 aż do n. W przestrzeni zwykłej dwuwymiarowe zjednoczenie elementów może składać się albo ze wszystkich elementów, przechodzących przez jeden i ten sam punkt, albo z elementów, stycznych do jednej i tej samej linii krzywej, lub też z elementów, leżących na jednej i tej samej powierzchni. Z definicyi całkowania przyjętej przez Liego widzimy, że jego teorya obejmuje szerszy zakres zagadnień niż teorye dawniejsze, bo gdy w dawniejszych teoryach rozmaitość punktowa jest koniecznie n-wymiarowa, w rozumieniu całkowania Liego może ona mieć i mniejszą liczbę wymiarów. Nadto uogólnienie to wprowadza do teoryi pewną prawidłowość, której nie było poprzednio. Ta prawidłowość uwydatnia się np. w stosowaniu przekształceń stycznościowych do równań cząstkowych. Uważajmy np. równanie Clairauta:

$$z = px + qy + f(p, q) \tag{84}$$

i zastosujmy tu przekształcenie stycznościowe:

$$\bar{x} = p,\ \bar{y} = q,\ \bar{z} = z - px - qy,\ \bar{p} = x,\ \bar{q} = y \tag{85}$$

znane pod nazwą przekształcenia Legendre'a. Wtedy równanie cząstkowe przechodzi w równanie skończone:

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})\,. \tag{86}$$

Rozwiązaniem tego równania jest każde zjednoczenie ∞^2 elementów powierzchniowych, przechodzących przez punkt powierzchni tego ostatniego równania. Odpowiadającem mu rozwiązaniem równania Clairauta są wszystkie elementy położone na pewnej płaszczyźnie.

W dawnych teoryach fakt ten przekształcenia równania różniczkowego na skończone stanowił coś osobliwego; ze stanowiska ogólnych określeń Liego jest on przekształceniem zjednoczeń elementów o rozmaitościach punktowych, mających odmienną liczbę wymiarów. Równania, zawierające i nie zawierające pochodnych, są ze stanowiska tej teoryi zupełnie równo uprawnione.

Przy całkowaniu chodzi tedy o n-wymiarową rozmaitość elementów powierzchniowych, t. j. o rozmaitość, określoną układem równań od siebie niezależnych:

$$(87)\quad F_i(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

który ma obejmować układ dany (81) i określać zjednoczenie elementów. Można okazać, że warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby n-wymiarowa rozmaitość była zjednoczeniem elementów, jest to, żeby równania:

$$(88)\qquad [F_i, F_k] = 0, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n+1)$$

były wynikiem równań (87). Z tego twierdzenia wynika, że całkowanie układów równań cząstkowych rzędu 1-go sprowadza się do całkowania układów, których wszystkie wyrażenia klamrowe znikają dla wartości zmiennych, czyniących zadość równaniom układu. Istotnie, gdyby dany układ nie czynił zadość temu warunkowi, to należałoby dołączać do niego tak długo wszystkie równania, wytwarzane z równań układu za pomocą klamrowych symboli, póki byśmy nie doszli albo do równań ze sobą sprzecznych, t. j. takich, które nie określają żadnego n-wymiarowego zjednoczenia elementów, albo do układu, który ma powyższą własność. Każdy taki układ można doprowadzić do takiej postaci, że wszystkie jego symbole klamrowe znikają tożsamościowo i wówczas układ nazywa się układem inwolucyjnym. Można tedy odrazu założyć, że układ (81) jest układem inwolucyjnym, i wtedy zagadnienie całkowania polegać będzie na tem, aby znaleść wszystkie możliwe takie układy równań:

$$(89)\quad F_k(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0 \quad (k = m+1, \ldots, n+1)$$

niezależnych od siebie i od równań danych (81), któreby wraz z temi danemi równaniami tworzyły układ inwolucyjny. Zagadnienie to rozwiązuje się zawsze za pomocą całkowania układów równań różniczkowych zwyczajnych rzędu 1-go. Ponieważ każdy taki układ jest równoważny z jednem równaniem zwyczajnem takiego rzędu, ile jest równań w układzie, więc można powiedzieć, że dla rozwiązania omawianego problematu należy wykonywać całkowania różnych rzędów. Otóż usiłowania matematyków skierowane były do tego, aby zredukować całkowania układów inwolucyjnych do możliwie najmniejszej liczby całkowań możliwie najniższych rzędów. Lie uzyskał w tym względzie najdalej sięgające uproszczenia, a zdaje się nawet, że w ogólnych przypadkach, które traktował, dalsze uproszczenia są już niemożliwe. Rezultaty te otrzymał przez rozwinięcie szczegółowej teoryi klamrowego wyrażenia Poissona, t. j. przez t. zw. teoryę grup funkcyj, którą można także traktować jako teoryę równoważności funkcyj elementów powierzchniowych wewnątrz nieskończonej grupy przekształceń stycznościowych. Szczegóły tej z wielu względów ważnej teoryi pomijamy.

Powyższe kartki nie stanowią ani sprawozdania o pracach Liego, ani tembardziej oceny jego działalności naukowej. Jako sprawozdanie byłyby one więcej niż niekompletne, a jako ocena jeszcze mniejszą posiadałyby wartość, bo pomijając nawet znaczne trudności, jakie należałoby przezwyciężyć przy ocenianiu działalności tak rozległej, ocena byłaby dziś przedwczesną. Pisząc to wspomnienie pośmiertne, starałem się tylko w formie krótkiej, a jednak, o ile umiałem, przystępnej przedstawić najważniejsze pojęcia teoryi przekształceń Liego i wytknąć najważniejsze jej punkty styczne z innemi gałęziami wiedzy matematycznej, a zauważyć winienem, że nie chcąc być rozwlekłym, musiałem częstokroć poprzestać na mniej ścisłem formułowaniu omawianych teoryj. Chodziło mi przedewszystkiem o wykazanie ważności teoryi przekształceń dla innych działów matematyki, więc pominąłem wiele kwestyj teoretycznych, których przytaczanie nie było

koniecznem do pobieżnego zoryentowania się w istocie zastosowań. Do takich zupełnie pominiętych działów należy np. teorya zestawienia ciągłych grup skończonych, która występuje niemal w każdem zagadnieniu z tej dziedziny, a teoretycznie jest wagi pierwszorzędnej. Ale i z pomiędzy zastosowań przebiegłem nie wszystkie, np. wcale nie wspomniałem o pracach Liego w dziedzinie równań cząstkowych wyższych rzędów, o jego niezmiernie pouczającej dyskusyi zagadnienia Pfaffa na podstawie teoryi przekształceń stycznościowych i t. d. Czytelnik, którego wzmianki moje zachęcą do obznajmienia się z teoryami Liego, znajdzie ich wykład szczegółowy w monografiach: 1) Theorie der Transformationsgruppen unter Mitwirkung von Prof. D-r Friedrich Engel, bearteitet von Sophus Lie, in drei Abschnitten. Leipzig, Teubner. 1888, 1890, 1893. 2) Sophus Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, bearbeitet und herausgegeben von D-r Georg Scheffers. Leipzig, Teubner, 1891. 3) Sophus Lie, Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, bearbeitet und herausgegeben von D-r Georg Scheffers. Leipzig, Teubner, 1893. 4) Sophus Lie, Geometrie der Berührungstransformationen, dargestellt von Sophus Lie und Georg Scheffers, Erster Band. Leipzig, Teubner. 1896, i w szeregu rozpraw, które Lie w ciągu ostatnich lat trzydziestu ogłaszał, przeważnie w czasopismach następujących: Christiania Videnskabs Selskabet Forhandlingar, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Mathematische Annalen i Leipziger Berichte. Dwie z poprzednich monografij, streszczone są w „Pracach matematyczno-fizycznych“; jedna z rozpraw wyszła w tym czasopiśmie w polskim przekładzie, a z czasem będą tam zapewne omówione i niektóre inne prace Liego.

Należy wreszcie zauważyć, że teorya przekształceń i jej zastosowania nie stanowią bynajmniej całości badań Liego. Już w teoryi równań cząstkowych nie wszystkie jego badania stoją w bezpośrednim związku z teoryą przekształceń. Jeszcze bardziej odrębne są pewne jego badania w geometryi różniczkowej, z których przedewszystkiem należy wymienić twierdzenia o tworzeniu powierzchni minimalnych za pomocą minimalnych krzywych i pewne poszukiwania

w dziedzinie algebraicznych powierzchni minimalnych. Bardzo interesującemi są także badania, dotyczące związku powierzchni translacyjnych z teoryą całek abelowych. Poprzestajemy jednak na zanotowaniu tytułów tych poszukiwań, a treści ich omawiać już nie będziemy.

O RÓWNANIACH STOPNIA TRZECIEGO [1]

napisał

J. Sochocki.

1. ***Moduł i mnożnik równania stopnia 3-go.*** Niechaj będzie równanie rzeczywiste postaci:

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0; \tag{1}$$

oznaczmy pierwiastki jego przez e_1, e_2, e_3.

Rozwiązującą, określoną wzorem:

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2, \tag{2}$$

nazywać będziemy modułem równania (1) i dla skrócenia oznaczać przez k^2.

Wskutek wszelkich przestawień ilości e_1, e_2, e_3 we wzorze (2) moduł przybiera sześć wartości, z których dość jest mieć jednę, aby znaleść pozostałe i to przy pomocy działań bardzo prostych, wcale niezależnych od spółczynników g_2, g_3.

---

[1]) Wyjątek z większej rozprawy, która będzie ogłoszona w całości w „Pracach matematyczno-fizycznych".