pozostaje stałe". Oczywiście tak ogólnie pojęta zasada zachowania energii nic nam dać nie może, ale co więcej, nie cechuje ona nawet w najmniejszym stopniu zjawisk, zachodzących w układach odosobnionych, przez szukanie bowiem prawidłowości rozciągamy tę własność i na układy nieodosobnione. Np. uważając płyn jednorodny, przypuszczamy, że istnieje dla niego równanie charakterystyczne, t. j. że dla wszelkich przemian jest zachowany związek:

$$f(p, v, \vartheta) = 0 .$$

I tutaj zatem — w układzie nieodosobnionym — istnieje coś, co pozostaje stałe, a mianowicie funkcya f. Biorąc szczególne równania charakterystyczne, np. Boyle'a, lub van der Waalsa, spostrzegamy nawet, że w nich funkcya f ma wymiary energii.

Kraków, w grudniu 1898 r.

O PEWNYCH PRĄDACH MATEMATYKI SPÓŁCZESNEJ.

Napisał

K. Żorawski.

Kto zastanawiał się nad kwestyami matematycznemi, ten niezawodnie zauważył, że w wielu z nich należy odróżnić dwa momenty. Zagadnienie bądź analityczne bądź geometryczne, mniej lub więcej ogólnie sformułowane, rozwiązuje się za pomocą pewnych działań, że się tak wyrazimy, formalnie. Aby jednakowoż zdać sobie dokładnie sprawę z rezultatu, należy to formalne rozwiązanie zanalizować; rozróżnić rozmaite rodzaje rezultatów; zbadać, czy owo formalne rozwiązanie we wszystkich przypadkach jest możliwe, i w razie, gdyby istniały przypadki, w których ogólne rozważania nie mogłyby mieć zastosowania, poddać je osobnemu badaniu. Przykładem takiego postępowania jest znane z elementarnej algebry rozwiązanie równań stopnia drugiego; nie dość wyprowadzić wzór na pierwiastki takiego równania, trzeba jeszcze odróżnić przypadki, w których pierwiastki te są rzeczywiste i w których są urojone, oraz określić warunek istnienia jednego tylko pierwiastka podwójnego. Przykładem innym jest określenie funkcyi przez szereg potęgowy; prócz wyznaczenia spółczynników szeregu, trzeba jeszcze określić jego koło zbieżności, zbadać zachowanie się szeregu na obwodzie koła, a także zająć się wyznaczeniem i badaniem szeregów, które określałyby wartości funkcyi poza obwodem koła. Przykładem jeszcze innym jest badanie krzywizny danej powierzchni; niedość wyprowadzić wzory na jej promienie, trzeba jeszcze określić okolice w których powierzchnia zakrzywiona jest eliptycznie, hyperbolicznie lub parabolicznie, i w ogóle wzory te zanalizować.

Przykładów takich możnaby przytoczyć bardzo wiele, ale chodzi nam o rzeczy większej doniosłości, niż drobne przykłady. Skoro dwie części rozumowania matematycznego, z których pierwszą umówimy się nazywać f o r m a l n ą, a drugą r z e c z o w ą, są tak częstym objawem w tej nauce, to łatwo dojść do przypuszczenia, że musiały one odbić się na jej metodach, musiały wytworzyć działy nauki, w których więcej przeważa jeden lub drugi ze sposobów badania. W dzisiejszych prądach matematyki nie trudno odróżnić takie działy; omówieniem pewnych z nich zajmiemy się właściwie w tym artykule.

Wprowadzenie pojęcia ilości nieskończenie małych do badania zależności pomiędzy wielkościami popchnęło matematykę na nowe tory. Przedewszystkiem pozwoliło ono badać takie cechy tych zależności, których badanie poprzednio było w ogóle niedostępne. Do tych należą np. badanie przebiegu funkcyj, badanie kształtu ciągłych form geometrycznych w okolicy danego punktu. Dalej — za pomocą pojęć rachunku całkowego i równań różniczkowych pozwoliło rozwiązać wiele innych zagadnień z geometryi, mechaniki, astronomii i fizyki. Rozwinęły się zastosowania rachunku różniczkowego do geometryi oraz metody wykonywania pewnych kwadratur i całkowania (t. j. redukcyi do kwadratur) pewnych równań różniczkowych. Wszelako wszystkie te badania nie były w stanie odpowiedzieć na liczne zapytania nie tylko ze strony teoryi, ale i ze strony coraz liczniejszych zastosowań. Ogólne metody rachunku różniczkowego nie wystarczały do badania kształtu krzywych i powierzchni algebraicznych, a kwadratury i całkowania równań różniczkowych w bardzo wielu przypadkach nie dały się wykonać. Potrzeba było tedy nowych metod, któreby pozwoliły traktować te zadania. Tych metod dostarczyła nowsza teorya funkcyj. Jej zadaniem jest z jednej strony badać formy analityczne lub przestrzenne w takich miejscach, w których nie stosują się ogólne wzory rachunku różniczkowego, z drugiej— badać funkcye, określone przez kwadratury lub takie równania różniczkowe, których nie można zcałkować za pomocą znanych funkcyj. Te nowe metody bynajmniej jednak nie osłabiają dawniejszych punktów widzenia. Tak samo, jak dawniej, wiele nowych zagadnień geometrycznych traktujemy za pomocą elementarnych pojęć rachunków różniczkowego i całkowego, a redukcya całkowania równań różniczkowych do kwadratur bynajmniej nie może być uważana jako anachronizm. Owszem, w ostatnich czasach i te teorye działań znacznie się posunęły, a metody teoretyczno-funkcyjne pozwoliły ich rezultaty formułować dokładniej.

Streszczając się, powiemy, że w zagadnieniach matematycznych może chodzić albo przeważnie o to, żeby określać i badać działania, za pomocą których dojść można do rozwiązania, albo też o to, aby studyować naturę form matematycznych, będących rozwiązaniami. Mieć można zatem na widoku albo cel bardziej formalny, albo też bardziej rzeczowy. Rzecz jasna, że do celów odmiennych prowadzić muszą i środki mniej lub więcej odmienne; wydaje się tedy, że nie popełnimy błędu, odróżniając w matematyce dwie wielkie kategorye metod: metody formalne i metody rzeczowe.

Rozejrzyjmy się najprzód, jak występują te metody w geometryi. Niechaj będzie dana ogólna ciągła forma geometryczna, a więc np. krzywa lub powierzchnia, kompleks, kongruencya i t. d. Zagadnienia formalne dążą do wyrobienia sposobów badania nieskończenie małych części tej formy geometrycznej. Taką jest np. teorya zginania powierzchni, taką związana z nią teorya krzywizny krzywych i powierzchni, takiemi w znacznej mierze są badania podstaw geometryi. Jeżeli chodzi o kształt całej formy geometrycznej, np. o kształt danej powierzchni algebraicznej, to muszą już przeważać metody rzeczowe, metody odnoszące się specyalnie do powierzchni algebraicznych, a więc traktujące przedewszystkiem osobliwości takich powierzchni. Druga zatem kategorya metod przeważa tam, gdzie mamy do czynienia z pewnemi mniej lub więcej wyspecyalizowanemi gatunkami form geometrycznych i z tego punktu widzenia zadania elementarne geometryi analitycznej winny być zaliczone do tej drugiej kategoryi. Typową przedstawicielką metod formalnych w geometryi jest t. zw. geometrya różniczkowa, a metod rzeczowych teorya krzywych i powierzchni algebraicznych.

Ale w żadnej dziedzinie nie można pomiędzy jednym i drugim punktem widzenia przeprowadzić tak wyraźnej granicy, jak w teoryi całkowania równań różniczkowych.

W tej teoryi zagadnienia formalne mają na celu wskazanie takich działań możliwie najmniej zawiłych, za pomocą których dane równanie lub dany układ równań może być zcałkowany. Jeżeli zastosowanie tych działań w pewnym szczególnym przypadku prowadzi wprost do funkcyj elementarnych, to zagadnienie już jest w zupełności rozwiązane. Lecz najprzód są to bardzo wyjątkowe przypadki, a powtóre metody formalne stosują się w teoryi nie do szczególnych przypadków, a do obszernych kategoryj równań, w których natura funkcyj wiadomych bynajmniej nie jest określona. Takiemi są całkowania równań liniowych 1-go rzędu i innych 1-go rzędu za pomocą kwadratur; takiemi różne uproszczenia w całkowaniu równań zwyczajnych rzędów wyższych, dalej — teorya całkowania układów równań różniczkowych zwyczajnych, redukcya całkowania równań różniczkowych cząstkowych 1-go rzędu do układów równań zwyczajnych, teorye Monge'a i Ampère'a w zakresie równań cząstkowych 2-go rzędu, wreszcie całkowanie równań Pfaffa, równań Monge'a i układów takich równań. Niemal wszystkie z wyszczególnionych teoryj rozpoczęte są u Eulera, a późniejszy ich rozwój zawdzięczamy pracom wielu uczonych, z których najwybitniejsi: Bernoulli, Lagrange, Pfaff, Jacobi. Teorye te jednak w tej epoce ich rozwoju miały w znacznej mierze charakter zbioru luźno dostrzeżonych twierdzeń, niepowiązanych ze sobą żadną wspólną nicią, a pewne z nich, jak np. całkowanie równań cząstkowych 1-go rzędu, wymagały o wiele większej liczby działań, niż koniecznie potrzeba dla rozwiązania tego zadania. A. Mayer i Lie znacznie uprościli to postępowanie, a ostatni przez zastosowanie przekształceń stycznościowych przedstawił rzecz w postaci o wiele doskonalszej. Nadto Lie przez wprowadzenie pojęcia nieskończenie małego przekształcenia i ciągłej grupy przekształceń uzyskał dawne teorye w zakresie równań różniczkowych zwyczajnych drogą systematycznego badania i wskazał ogólne metody redukcyi do całkowań możliwie prostych w zakresie wszelkich równań różniczkowych. Wszystkie te metody, które były i są rozwijane w wielu publikacyach, dążą do tego, aby całkowanie równań za pomocą kwadratur i działań algebraicznych sprowadzić do całkowań możliwie najprostszych typów. Metody zatem te bynajmniej nie służą do badania natury funkcyj, czyniących zadość równaniom różniczkowym. To jest właśnie zadaniem drugiej kategoryi metod, metod rzeczowych.

Początek tych metod należy także odnieść do Eulera, bo z funkcyj nieelementarnych t. zw. całki Eulerowe najwcześniej szczegółowo badane były przez matematyków. Ale istotny rozwój tych metod rozpoczyna się dopiero od chwili, kiedy wprowadzono uważanie funkcyj zmiennej zespolonej, t. j. od prac Cauchy'ego z jednej, a prac Abela i Jacobi'ego z zakresu funkcyj eliptycznych z drugiej strony. Studya nad całkami i funkcyami eliptycznemi są pierwszem teoretyczno funkcyjnem badaniem z zakresu równań różniczkowych; wprawdzie już Fourier całkował za pomocą szeregów trygonometrycznych pewne równania różniczkowe, badania te jednak mają charakter bardziej formalny. Gdy następnie dzięki geometrycznym pomysłom Riemanna z jednej strony a analitycznym Weierstrassa z drugiej, teorya funkcyj zyskała i niewzruszone podstawy logiczne i nowe drogi badania, poprzednie teorye całek eliptycznych, hypereliptycznych i w ogóle abelowych znacznie wydoskonalone zostały. Oprócz tego podjęto nowe zadania: Fuchs dał początek analitycznym metodom całkowania równań różniczkowych liniowych za pomocą szeregów nieskończonych, a Schwarz—geometrycznemu badaniu t. zw. funkcyj automorficznych, które także stoją w związku z całkowaniem pewnych równań liniowych 2-go rzędu. Badania te, których najważniejsze zdobycze zawdzięczamy Kleinowi i Poincarému, stanowią dzisiaj jeden z najbardziej interesujących przedmiotów wyższej matematyki. Niemniejszy interes wzbudzają nowsze badania teoretyczno-funkcyjne równań rzędu 1-go i badania kształtu krzywych, czyniących zadość tym równaniom; a na szczególną uwagę zasługują teoretyczno-funkcyjne prace Brunsa i Poincarégo z zakresu zagadnienia 3-ch ciał. Wreszcie oprócz tych działów, dotyczących równań różniczkowych zwyczajnych, należy tu zanotować te badania w zakresie równań cząstkowych rzędu 2-go, których najmniej zawiłym przypadkiem jest problemat Dirichleta.

Moglibyśmy metody formalne i rzeczowe odróżnić i w innych działach matematyki, np. bardzo wyraźnie, chociaż pod pewnym względem odmiennie, odgraniczyć je można w teoryi rozwiązywania równań algebraicznych; wybitnym przykładem różnicy poglądów formalnych i rzeczowych jest dawniejsze zapatrywanie, że każda funkcya ciągła ma pochodną i tegoczesne badania w tej dziedzinie i t. d. Takich zestawień można przeprowadzić jeszcze bardzo wiele, ale na tem poprzestaniemy, dodając, że celem naszym było tylko zaznaczenie ogólnego tła w dziedzinach, o których była mowa. W każdej z nich możnaby znaleść elementy i jednej i drugiej kategoryi rozumowań. Że zaś przeważającemi są właśnie te, które wskazaliśmy, widać i z uwagi następującej. Różniczkowanie i całkowanie, wprowadzone do ilościowego studyowania zjawisk w założeniu, że te zjawiska odbywają się w sposób ciągły, metody oparte zatem na stosowaniu tych działań przeważają tam, gdzie panuje ciągłość: to też jej istnienie zakładamy w większości kwestyj ogólnych zarówno w zakresie geometryi, jak i teoryi równań różniczkowych. Gdy przechodzimy do szczególnych form geometrycznych lub analitycznych, to tam muszą wejść w grę przedewszystkiem metody inne, bo każdy szczególny gatunek form charakteryzuje się właśnie naturą swych osobliwości, t. j. tych miejsc, w których przerywa się ciągłość. W tem też tkwi przyczyna faktu, że metody formalne są bardziej jednolite, a metody rzeczowe bardziej różnorodne i urozmaicone.

PRZEGLĄD LITERATURY. BIBLIOGRAFIA.

D-r Józef kniaź Puzyna, profesor Uniwersytetu lwowskiego. Teorya funkcyj analitycznych. T. I. Lwów. Nakładem autora z zasiłkiem Akademii Umiejętności w Krakowie 1898. 8^0, str. XVIII + 549.

Gdy chodzi o omówienie rozprawy naukowej, zawierającej bądź nowe rezultaty, bądź też oryginalne ujęcie dawnych, wówczas spra-