O KWADRATURACH KRZYWYCH,

UTWORZONYCH RUCHEM POSUWISTYM FIGURY NIEZMIENNEJ

napisał

T. Rudzki.

Jeżeli figura płaska F porusza się jakimkolwiek sposobem w swej płaszczyznie Φ, to, jak wiadomo, ruch ten może być wywołany przez toczenie się pewnej krzywej (p), należącej do figury F, po innej nieruchomej krzywej (π).

Obie krzywe (p) i (π), określające ruch posuwisty figury F, nazywamy centrodyami ruchu. Franke[1]), idąc za geometrami francuskimi, ruch powyższy nazywa ruletowym, tory zaś punktów danej figury — ruletami.

Ostatniemi czasy zajmowano się wielokrotnie badaniem własności ruchu, określonego w sposób powyższy. Ważny ten dział cynematyki rozwinął się głównie dzięki pracom Chasles'a[2]) i Mannheim'a[3]).

W teoryi obliczania pól rulet rozmaitych punktów figury F, zrobił początek Steiner[4]), dowiódłszy zasadniczego twierdzenia, wprawdzie tylko dla szczególnego przypadku, kiedy centrodye (p) i (π) nie mają punktów przegięcia i wogóle punktów osobliwych. Steiner posługiwał się przy swych badaniach jedynie tylko metodą elementarną i to wyjaśnia nam dlaczego inne przypadki wyłączył.

---

1) Pam. Akad. Umiej. T. I, str. 70.

2) Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit etc. Comptes Rendus, T. 16, 51, 52.

3) Mannheim.: Géometrie cinématique. Paris 1894.

4) Von dem Krümmungsschwerpunkte ebener Curven. Crelle's Journ., t. XXI, 1840.

Z późniejszych geometrów[1]) należy wzmiankować Gilberta, Williamsona, Leudersdorfa, Holditcha, Ad. Schumanna[2]), Amslera[3]) i Kempego, którym teorya kwadratury rulet zawdzięcza wiele interesujących twierdzeń.

Wreszcie Darboux[4]) ujął wszystkie powyższe rezultaty w jednę całość, za pomocą bardzo prostej i wykwintnej analizy.

Niniejsza praca ma za zadanie streścić powyższy szereg badań, który, o ile mi wiadomo, nie został jeszcze uwzględniony w naszej literaturze matematycznej, oraz podać niektóre zastosowania i uogólnienia.

1.

Przez punkt O dowolnie obrany na płaszczyznie figury F, poprowadźmy dwie nieruchome osi prostokątne Ξ i Υ, a w dowolnym punkcie O_1 figury F obierzmy dwie osi X i Y, poruszające się razem z figurą F.

Jeżeli a, b oznaczają spółrzędne punktu O względem układu XY, φ zaś kąt, zawarty między dodatniemi kierunkami osi X i Ξ, to można napisać dla spółrzędnych dowolnego punktu M równania:

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi = (x - a) \cos \varphi - (y - b) \sin \varphi \\ \eta = (x - a) \sin \varphi + (y - b) \cos \varphi \,. \end{cases}$$

---

[1]) Patrz artykuł Ligina w Darboux Bulletin 1878, p. 306

[2]) Schömilch's. Ztschr. f. Math. u. Physik 1880, p. 82.

[3]) Amsler. Ueber d. Flächeninhalt u. Volumen der bei einer Bewegung erzeugter Curven u. Flächen und ueber mechanische Integrationen. Schaffhausen 1880. Należy tu wzmiankować jeszcze:

1-o Artykuł Duporcqa drukowany w Journ. de Mathématiques (5) I, p. 443—465.

2-o Kleiber. Hoppe Arch. 1896. Die Amslerschen Flachensätze im Gebiete der affin-veränderlichen Systeme u. auf den Flächen constanter Krümmung. Prace Amslera i Duporcqa znane mi są tylko z referatów.

[4]) Darboux Bulletin 1878, p. 333.

Przy ruchu punktu M i związanej z nim figury możemy uważać wielkości a, b, jako pewne funkcye zmiennej niezależnej φ.

Elementarne pole dS, opisane przez promień wodzący OM, wyraża się wzorem:

$$2dS = \xi d\eta - \eta d\xi, \tag{2}$$

przyczem należy pamiętać, że wielkość dS jest dodatnią lub ujemną, zależnie od kierunku obrotu promienia OM około punktu O.

Różniczkując (1), podstawiając wartości na ξ, η, $d\xi$, $d\eta$ w równanie (2) i oznaczając $a + \frac{db}{d\varphi} = a + b'$ przez α, $b - \frac{da}{d\varphi} = b - a'$ przez β, otrzymujemy:

$$2dS = [(x - a)(x - \alpha) + (y - b)(y - \beta)]\, d\varphi\,. \tag{3}$$

Ostatnie równanie całkujemy w granicach φ_0 i φ_1, uwzględniając, że przy całkowaniu należy x i y uważać jako wielkości stałe:

$$\begin{aligned} 2S = (x^2 + y^2) \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi - x \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (a + \alpha)\, d\varphi \\ - y \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (b + \beta)\, d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (a\alpha + b\beta)\, d\varphi\,. \end{aligned} \tag{3'}$$

Całka $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi = 2\theta$ daje kąt obrotu osi X, a zatem i figury F. Połóżmy:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\alpha + a)\, d\varphi &= 2A\,, \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\beta + b)\, d\varphi &= 2B\,, \\ \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (a\alpha + b\beta)\, d\varphi &= 2C\,, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

gdzie A, B, C, są to wielkości niezależne od położenia punktu M względem układu XY, wtedy można napisać na S wzór:

$$(\mathrm{I})\qquad S=\theta\,.\,U=\theta\,(x^2+y^2)-Ax-By+C\,;$$

pole zatem, opisane przez promień wodzący OM, jest równe połowie iloczynu z kąta obrotu 2θ figury F przez tak zwaną potęgę (Potenz), U punktu danego M względem pewnego koła, równanie którego jest:

$$(5)\qquad S=\theta\,.\,U=0\,.$$

Środek C tego ostatniego nosi z tej przyczyny nazwę środka powierzchni rulet.

Jeżeli figura F porusza się tak, że początkowe i końcowe położenia jej są identyczne, wtedy wszystkie punkty opisują tory zamknięte [1], których pole mierzy wielkość S, obliczona z równania (I).

Łatwo spostrzedz, że miejscem geometrycznem punktów, opisujących pole danej wielkości, jest koło spółśrodkowe z kołem ($S=0$). Punktom zewnątrz tego ostatniego odpowiadają pola dodatnie, na obwodzie pola równe zeru, wewnątrz zaś ujemne. Może wprawdzie się zdarzyć, że koło ($S=0$) jest urojone, co ma miejsce, jeżeli

$$D=\left(\frac{A}{\theta}\right)^2+\left(\frac{B}{\theta}\right)^2-4\left(\frac{C}{\theta}\right)<0\,;$$

wtedy wszystkie punkty figury F opisują pola dodatnie. Wreszcie, jeżeli

$$D=0\,,$$

jak w przypadku obrotu około punktu stałego, wtedy koło ($S=0$), sprowadza się do punktu C, którego rulecie odpowiada pole równe zeru

---

[1] Ruch taki według Darboux'a możemy nazwać peryodycznym.

Przypuśćmy, że w ogólnym przypadku S_0 jest polem rulety punktu C, wtedy:

$$S_0 = \theta\,(\;-R^2)\,, \tag{6}$$

gdzie R jest promieniem koła ($S = 0$).

Odejmując równanie (6) od (I) stronami odpowiedniemi, mamy wzór:

$$S - S_0 = \theta\left(\left(x - \frac{A}{2\theta}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2\theta}\right)^2\right) = \theta\,.\,\overline{MC}^2\,, \tag{7}$$

z którego wynika, że najmniejsze pole (S_0) opisuje punkt C, t. j. środek pól; pole zaś, odpowiadające jakiemukolwiek innemu punktowi M, otrzymujemy, dodając do S_0 powierzchnię wycinka kołowego o promieniu równym odległości punktów M i C i o kącie równym kątowi obrotu figury. (Twierdzenie Steinera).

Przypuśćmy, że dany ruch figury niezmiennej F jest peryodyczny i obliczmy z równań (4) spółrzędne (X, Y) punktu C, środka koła ($S = 0$):

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{A}{2\theta} = \frac{\int (a+\alpha)\,d\varphi}{4\theta} = \frac{\int \alpha\,d\varphi}{2\theta} + \frac{b_1 - b_0}{4\theta} = \frac{\int \alpha\,d\varphi}{2\theta} - \frac{b_1 - b_0}{4\theta}\,, \\ Y &= \frac{B}{2\theta} = \frac{\int (\beta + b)\,d\varphi}{4\theta} = \frac{\int b\,d\varphi}{2\theta} - \frac{a_1 - a_0}{4\theta} = \frac{\int \beta\,d\varphi}{2\theta} + \frac{a_1 - a_0}{4\theta}\,; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

według założenia jednak $b_1 = b_0$, $a_1 = a_0$, zatem:

$$X = \frac{\int \alpha\,d\varphi}{2\theta}\,,\quad Y = \frac{\int \beta\,d\varphi}{2\theta}\,. \tag{8'}$$

Wzory (8′) mają bardzo proste znaczenie geometryczne, wynikające z rozważania obu centrodyj ruchu (p i π). Niech r i ϱ będą odpowiedniemi promieniami krzywizny obu krzywych w punkcie styczności Q, oraz $QQ_1 = QQ_2 = ds$ — wspólnym elementem ich łuku, wtedy można elementarny kąt obrotu $d\varphi$ wyrazić w sposób następujący:

$$d\varphi = ds\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}\right)\,. \tag{9}$$

Jeżeli więc przypuścimy, że gęstość elementów krzywej (p) jest w każdym punkcie równa sumie krzywizn $\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}$, natenczas spółrzędne jej środka ciężkości (x_0, y_0) względem układu XY, otrzymamy z równań:

$$(10) \qquad \begin{cases} 2\theta x_0 = \int \alpha d\varphi \\ 2\theta y_0 = \int \beta d\varphi \, . \end{cases}$$

Porównywając równanie (10) z (8) wnosimy, że środek pól C jest w przypadku ruchu peryodycznego zarazem środkiem ciężkości centrodyi ruchomej (p), jeżeli gęstość w każdym jej punkcie jest równa $\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}$. Z tego względu punkt C został przez Steinera nazwany środkiem ciężkości krzywizn (Krümmungsschwerpunkt).

Oczywiście istnieje on zawsze, niezależnie od tego, czy promień koła $(S = 0)$ jest rzeczywisty [1]), czy też urojony, jeżeli tylko całki $2A$, $2B$ mają wartość skończoną [2]). Ażeby punkt C i środek krzywizn były identyczne, należy w przypadku ruchu peryodycznego kątowi obrotu nadać w ogóle wartość $2\pi n$, gdzie n jest liczbą całkowitą (dodatnią, ujemną lub równą zeru).

Przechodząc do rozważania ruchów nieperyodycznych, w których tory punktów figury F nie są zamknięte, otrzymujemy dla spółrzędnych środka pól równania:

---

[1]) Zależy to od znaku wielkości $\left(\frac{A}{\theta}\right)^2 + \left(\frac{B}{\theta}\right)^2 - 4\left(\frac{C}{\theta}\right)$.

[2]) Kempe (patrz artykuł Ligina p. 316) rozważał przypadek ruchu peryodycznego, w którym figura F wraca do położenia początkowego, nie wykonawszy obrotu całkowitego (t. j. w którym $2\theta = 0$); wtedy środek pól leży w nieskończoności i zamiast kół spółśrodkowych ($S =$ stałej), otrzymujemy układ równoległych do siebie prostych, o czem łatwo można się przekonać, biorąc pod uwagę, że wtedy w równaniu (3') spółczynnik $\int d\varphi = 2\theta$ wyrazu $(\int d\varphi \; (x^2 + y^2)$ równa się zeru.

$$(11) \qquad X = x_0 + \frac{b_0 - b_1}{4\theta}, \qquad Y = y_0 + \frac{a_1 - a_0}{4\theta};$$

zajmuje on zatem w ogóle niejednakowe położenie ze środkiem ciężkości krzywizn ($x_0\ y_0$).

Jeżeli tory punktów figury F mają kształt złożony, przecinają się w pewnych miejscach i t. p., wtedy należy najprzód zbadać, jakie znaczenie geometryczne ma całka

$$S = \frac{1}{2}\int(\xi d\eta - \eta d\xi),$$

do którego to celu służy wiadoma reguła Gaussa [1]).

Rozdział niniejszy zakończymy przykładem ruchu posuwistego, wziętym z „Cynematyki“ Reuleaux'a [2]). Wpiszmy w trójkąt równoboczny *ABC* figurę *HEID* (fig. 1), złożoną z łuków *HEI*, *HDI* dwóch kół, których promienie są równe połowie wysokości danego trójkąta, środki zaś *E*, *D* leżą odpowiednio na przeciwległych łukach *HDI*, *HEI* i dzielą je na dwie równe części.

Figura ta, zwana przez Reuleaux'a dwukątem (Bogen-Zweieck), może się poruszać względem trójkąta *ABC*, pozostając w każdem położeniu styczną do jego boków, przytem jakikolwiek punkt dwukąta opisuje krzywą zamkniętą, składającą się w ogólności z sześciu łuków elips o rozmaitych średnicach [3]). Łatwo okazać geometrycznie, że obie centrodye (p) i (π) są w danym razie krzywemi zamkniętemi, których obwody mają się do siebie, jak 2 do 3. Prócz tego centrodya (p) jest dwukątem, podobnym do *HEID* i zbudowanym na cięciwie *ED*. Jestto zatem krzywa po-

---

[1]) Darboux. Bull. 1878, p. 337.

[2]) Reuleaux. Theoretische Kinematik 1875.

[3]) Ponieważ każde dwa przyległe łuki mają we wspólnym punkcie te same styczne, możemy więc uważać a i b jako różniczkowalne funkcye w obrębie całkowitego obrotu dwukąta.

siadająca środek geometryczny Γ, będący zarazem środkiem płaszczyzn C dla danego ruchu. Możemy łatwo obliczyć pole rulety danego punktu M, zważywszy, że punkty E i D centrodyi (p) posiadają wspólny tor, składający się z trzech prostych ab, aD, bD łączących środki boków trójkąta ABC.

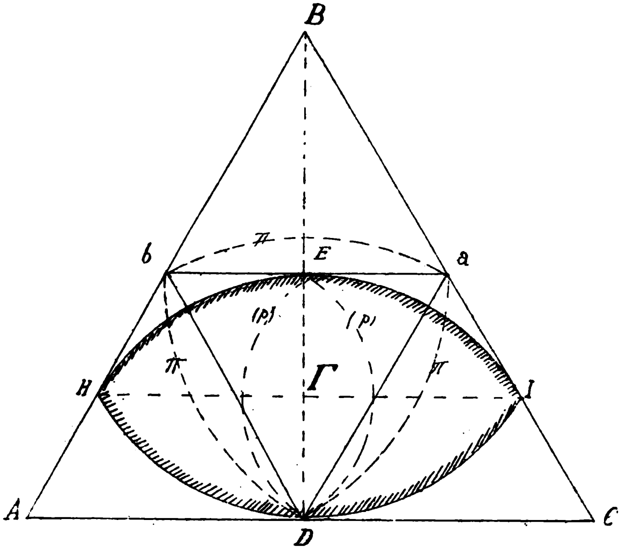

Fig. 1.

Niech $AD = a$, wtedy:

$$S_E = S_D = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = S_\Gamma + \pi \,.\, \overline{\Gamma E}^2 = S_\Gamma + \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2;$$

możemy więc obliczyć S_Γ:

$$S_\Gamma = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3} - \frac{3\pi}{4}\right).$$

Wnosimy, że istnieje koło odpowiadające ruletom równym zeru, gdyż S_E i S_Γ mają znaki przeciwne.

Z równania (7) wynika, że:

$$S_M = S_\Gamma + \pi \overline{M\Gamma}^2 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \pi \left(\overline{M\Gamma}^2 - \frac{3}{16} a^2 \right).$$

2.

Zamiast obliczać pole, opisywane przez promień OM, poprowadzony ze stałego punktu O, możemy, jak to uczynił Steiner, wziąć pod uwagę odcinek prostej, łączącej punkt M ze środkiem chwilowym P obrotu figury F, t. j. z punktem styczności obu centrodyj.

Pole odcinka OM, obliczone według § I, i pole (S_{MP}) odcinka MP, łączącego dwa punkty ruchome, można związać bardzo prostem równaniem. Niech S_{AB} oznacza pole odcinka AB, opatrzone takim znakiem, aby było:

$$S_{AB} + S_{BA} = 0 ;$$

niech (ABC) oznacza pole trojkąta ABC. Wprowadźmy jeszcze skaźniki $'$ i ^{0}, odpowiadające początkowemu i końcowemu położeniu figury; wtedy łatwo okazać, przyjmując O jako punkt stały, równanie:

$$(\alpha) \qquad S_{OA} + S_{AB} + S_{BO} = (OA^0B^0) - (OA'B') .$$

Stosując powyższe prawidło do ruchu trójkąta ABC zmiennego co do kształtu i położenia, otrzymamy równanie:

$$(\beta) \qquad S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} = (A^0B^0C^0) - (A'B'C') ;$$

wreszcie dla danego wielokąta zamkniętego $A_1 A_2 \ldots A_n (A_{n+1} = A_1)$:

$$(\gamma) \qquad \sum_1^n {}_i\, S_{\overline{A_i A_{i+1}}} = (A^0_1 A^0_2 \ldots A^0_n) - (A'_1 A'_2 \ldots A'_n) .$$

Jeżeli w szczególnym przypadku przypuścimy, że pole wielokąta $A_1 \ldots A_n$, zmiennego co do kształtu dla dwóch końcowych położeń jest jednakowe, co ma np. miejsce, kiedy tory wierzchołków A_k są zamknięte, wtedy

$$\sum_{1}^{n}{}_{i}\, S_{A_i} A_{i+1} = 0\,.$$

Duporcq (Journ. de Mathem. (5) I) dowiódł, że suma algebraiczna pól, opisanych przez boki wielokąta zamkniętego przy ruchu posuwistym figury niezmiennej F, jest równa zeru. Ponieważ znam pracę Duporcqa tylko z referatu — nie wiem więc, czy dowiódł on również ogólniejszego równania (γ).

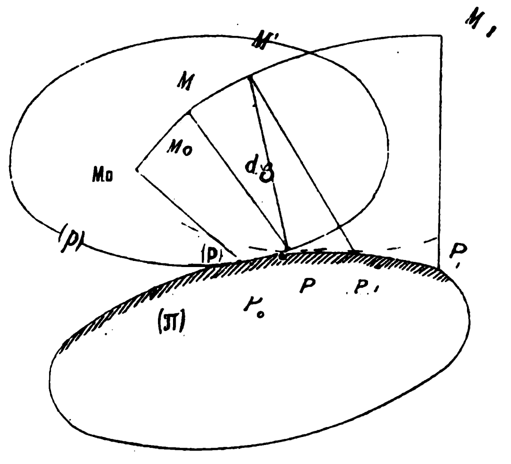

Fig. 2.

Otrzymujemy w ten sposób pole $(S)_M$, ograniczone torem punktu M, nieruchomą centrodyą (π), oraz dwoma krańcowemi położeniami odcinka $\overline{MP}$ ($M_0\, P_0$ i $M_1\, P_1$).

W przypadku ruchu peryodycznego, należy do $(S)_M$ dodać pole zamkniętej centrodyi (π), aby otrzymać pole S_M, obliczone według równania (Γ) w rozdziale poprzednim.

W ogólnym przypadku pole $P_0\, P_1\, M_1\, M_0$ oblicza się najprościej na podstawie rozważania pola elementarnego dS, jako sumy pól dwóch trójkątów:

$$(1) \qquad d(S) = MM'P'P = \Delta\, PMM' + \Delta\, MPP' \,.$$

Otóż z dokładnością do nieskończenie małych 2-go rzędu można przyjąć, że:

$$\Delta\, PMM' = \frac{\overline{MP}^2 d\varphi}{2} \,;$$

prócz tego

$$\Sigma\, MPP' = (P) \,,$$

gdzie (P) jest częścią pola centrodyi ruchomej (p), zawartą między dwoma granicznemi położeniami promienia $\overline{MP}$.

Całkując równanie (1), otrzymamy na (S) wzór:

$$(2) \qquad (S) = \int \frac{\overline{MP}^2 d\varphi}{2} + (P) \,.$$

(Twierdzenie Gilberta).

Ponieważ równanie (1), dające wartości na S, zawiera trzy stałe dowolne, A, B, C wystarcza zatem obliczenie pól, odpowiadających trzem danym punktom (M_1, M_2, M_3), by módz określić pole rulety jakiegokolwiek czwartego punktu M_4.

W tym celu należy z rownań:

$$(\Gamma) \qquad S_k = \theta\,(x_k^2 + y_k^2) - Ax_k - Bx_k + C \,;\ (k = 1, 2, 3, 4)$$

wyrugować stałe A, B, C.

Rezultat tego rugowania przedstawił Leudesdorf w postaci następującej:

$$S_1\,(234) - S_2\,(134) + S_3\,(124) - S_4\,(123) = \theta\,(123)\,P \,,$$

gdzie wyraz (ikl) oznacza pole trójkąta $M_i\, M_k\, M_l$, P zaś potęgę punktu M_4 względem koła opisanego około trójkąta $M_1\, M_2\, M_3$.

Wyjątek od powyższego prawa stanowią punkty, leżące na jednej prostej; w tym przypadku wystarczają pola rulet 2-ch punktów M_1 M_2, aby obliczyć pole, odpowiadające każdemu trzeciemu punktowi tej prostej.

W istocie przyjmując, że punkty M_1 M_2 M_3 leżą na osi X, mamy trzy równania:

$$
\text{(I'')} \qquad
\begin{aligned}
S_1 &= \theta\,(x_1{}^2 - Ax_1 + C)\,,\\
S_2 &= \theta\,(x_2{}^2 - Ax_2 + C)\,,\\
S_3 &= \theta\,(x_3{}^2 - Ax_3 + C)\,,
\end{aligned}
$$

skąd, rugując stałe A, C, otrzymujemy związek postaci:

$$a_1 S_1 + a_2 S_2 + a_3 S_3 + \theta a_4 = 0\ .$$

W szczególności możemy przypuścić, że punkty M_1 M_2 opisują jednę i tę samą zamkniętą krzywą S_1, że przytem $2\theta = 2\pi$, wtedy punktowi M_3 prostej M_1 M_2 M_3 odpowiada pole S_3, takie, iż:

$$S - S_3 = \pi \overline{M_1 M_3}\ .\ \overline{M_3 M_2}\ .$$

Ostatnie równanie wyraża interesujące twierdzenie H o l d i t c h a, które daje możność wykreślenia mechanicznego wstęg, ograniczonych dwiema ruletami i mających daną z góry powierzchnię Q, równą $S - S_3$.

Można również wykreślić mechanicznie nieskończenie wiele krzywych pojedyńczych zamkniętych, ograniczających dane pole S.

W tym celu należy punkty M_1 i M_2 prostej M_1 M_2 M_3 posuwać po dwóch jakichkolwiek przecinających się krzywych (a), (b), położonych tak, by przy obrocie całkowitym ($2\theta = 2\pi$) prostej tworzącej (12) punkt M_3 mógł opisać krzywą zamkniętą (m), podobną z kształtu do elipsy.

Przyjmując punkt M_1 za początek 0 układu XY, oznaczając $\overline{M_1 M_3}$ przez a, $\overline{M_3 M_2}$ przez b, otrzymujemy z równań (I'') uwzględniając, że $S_1 = S_2 = 0$:

$$S = \pi a b\ .$$

Pole krzywej (m) jest przeto niezależne od kształtu krzywych (a) i (b). W szczególności, jeżeli te ostatnie są liniami prostemi, otrzymujemy znany wzór na pole elipsy, utworzonej ruchem punktu M_3 prostej $M_1\, M_2$.

Twierdzenie powyższe okażemy jeszcze innym sposobem. Wziąwszy na płaszczyznie Φ punkt stały 0, według oznaczeń § II i równań α) i β) mamy:

$$S = S_{\overline{OM_3}}\ .$$

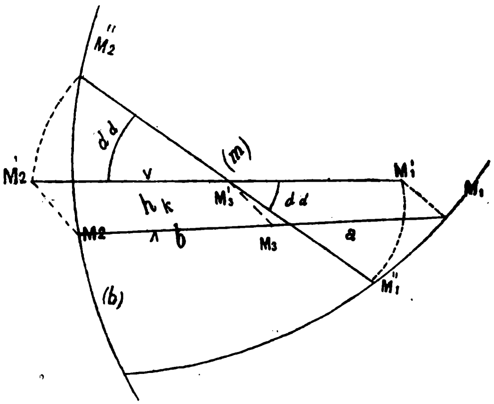

Fig. 3.

Ponieważ dla danego ruchu

$$S_{\overline{OM_1}} = S_{\overline{OM_2}} = S_{\overline{M_1 M_2}} = 0\ ,$$

zatem

(3) $$S_{\overline{M_1 M_3}} + S_{\overline{M_3 M_2}} = 0$$

i

(4) $$S_{\overline{OM_3}} = S_{\overline{M_3 M_1}}\ .$$

Każde zaś pole elementarne, opisane przez dany odcinek, można rozłożyć z dokładnością do nieskończenie małych 2-go rzędu na:

1-o pole wycinka kołowego, który powstaje, jeżeli jeden punkt odcinka uważać za nieruchomy.

2-o pole równoległoboku, utworzonego ruchem posuwistym tegoż odcinka.

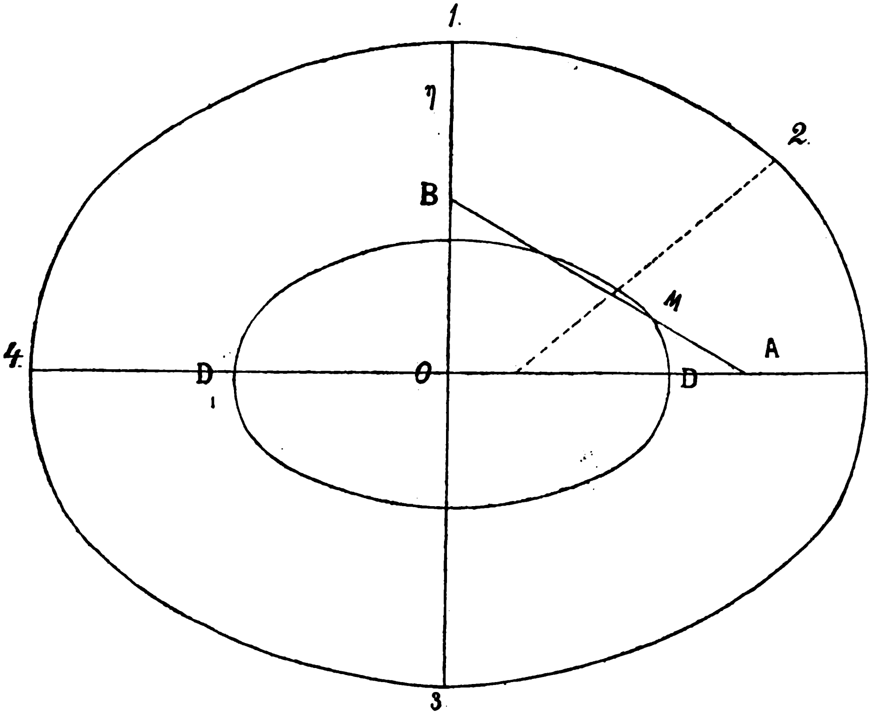

Fig. 4.

W ten sposób otrzymujemy równania:

$$(3')\quad \begin{cases} \underset{M_1M_3}{S} = -\Sigma \dfrac{\overline{M_1M_3}^2}{2}\, da + \Sigma\, \overline{M_1M_3}\, h_k = -\dfrac{a^2 \Sigma\, da}{2} + a\, \Sigma\, h_k \\ \underset{M_2M_4}{S} = \dfrac{b^2 \Sigma\, da}{2} + b \underset{1}{\Sigma}\, h_k, \end{cases}$$

w których h_k, są wysokościami równoległoboków elementarnych.

Zważywszy, że $\sum da = 2\pi$ i przyjmując $\sum h_k = H$, otrzymamy według równań (3) i (3'):

$$S_{M_1 M_3} + S_{M_3 M_2} = 0 = \pi (b^2 - a^2) + H(b + a) ;$$

podstawiając otrzymaną wartość na H, w równanie (3') i uwzględniając (4), mamy:

$$S_{\overline{OM_3}} = S_{\overline{M_3 M_1}} = - a^2\pi + \pi a (a - b) = - \pi ab .$$

Jako zastosowanie powyższego twierdzenia niech służy przykład następujący:

Punkty prostej AB suwają się po dwóch osiach wzajemnie prostopadłych ($\xi\ \eta$). Punkt M prostej opisuje elipsę MC, której obie połowy można uważać wraz z osią 0ξ, za dwa nowe układy krzywych, przecinających się w punktach D i D_1. W ten sposób punkt B opisuje dwie nowe krzywe

$$B\,12\,\xi\,30 \quad , \quad B\,14\,30 .$$

Ponieważ twierdzenie poprzednie stosuje się i do przypadku, kiedy punkt dany leży zewnątrz punktów krańcowych poruszającego się odcinka, więc:

$$\text{Pole}\,(B\,1230) = \text{Pole}\,(B\,1430) = \pi \overline{AM} \, . \, \overline{AB} \; .$$

Wynik ten łatwo sprawdzić, zważywszy, że krzywa ($12\,\xi\,34$) jest elipsą, której osie główne są odpowiednio równe:

$$2\overline{AM} \text{ i } 2\overline{AB} .$$

Jeżeli wreszcie prosta AB suwa się po kolei po n przecinających się krzywych, to pole rulety danego jej punktu M równa się

$$\frac{a \, . \, \overline{AM} \, . \, \overline{BM}}{2} ,$$

gdzie a jest kątem obrotu prostej AB.

3.

Darboux[1]) i Ad. Schumann[2]) rozważali również pola krzywych, powłóczonych przez proste figury F. Okazuje się przytem, że nietylko pomiędzy polami powłóczących rozmaitych prostych, ale i między długościami ich łuków istnieje bardzo prosta zależność. Polega to na tem, że elementarne pole dS i elementarny łuk ds można wyrazić jako funkcye wymierne spółrzędnych prostej

$$ux + vy + w = 0 . \tag{1}$$

Dla prostoty przyjmijmy u, v takie aby było:

$$u^2 + v^2 = 1 .$$

W równaniu tejże prostej, odniesionem do układu $\Xi\,\Upsilon$

$$u_1\xi + v_1\eta + w_1 = 0 , \tag{2}$$

spółczynniki u_1, v_1, w_1 będą dane za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} u_1 &= u\cos\varphi - v\sin\varphi \\ v_1 &= u\sin\varphi + v\cos\varphi \\ w_1 &= w + ua + vb \;;\; u_1{}^2 + v_1{}^2 = 1 , \end{aligned} \tag{3}$$

w których a_1 b_1 φ mają takie same znaczenie, jak i w § 1.

Spółrzędne punktu styczności prostej (2) i jej powłóczącej otrzymamy, rugując ξ i η z równania (2) i z następującego:

$$\xi du_1 + \eta dv_1 + dw_1 = 0 .$$

Oznaczając pochodne względem zmiennej niezależnej φ za pomocą skaźników i różniczkując ξ i η, otrzymamy następujący szereg wzorów:

---

[1]) Darboux. Bulletin, p. 341.

[2]) Schlömilch's Ztschr. 1880, p. 92.

$$(4) \qquad \begin{aligned} \xi &= v_1 w_1' - u_1 w_1 \\ \eta &= - u_1 w_1' - v_1 w_1 , \end{aligned}$$

$$(5) \quad ds = \sqrt{d\eta^2 + d\xi^2} = (w_1 + w_1'')d\varphi = [w + u(a + a'') + v(b + b'')]\, d\varphi ,$$

$$(6) \quad 2dS = \xi d\eta - \eta d\xi = w_1 ds = (w + ua + vb)[w + u(a + a'') + v(b + b'')]\, d\varphi .$$

Z równań (5) i (6), całkując je, jak poprzednio, wyprowadzamy wartości na s i S:

$$(5') \qquad s = 2\theta (w + uA_1 + vA_2) ,$$

$$(6') \quad S = \theta w^2 + B_1 uw + B_2 vw + B_3 u^2 + B_4 v^2 + B_5 uv = \theta W ,$$

gdzie A_k i B_k są stałe, nie zależące od położenia prostej danej.

Wzory (5′) i (6′) są wyrazem analitycznym następujących twierdzeń [1]) Ribaucoura i Darboux'a.

1) Jeżeli figura F porusza się w swej płaszczyźnie sposobem określonym, to wszystkie jej proste powłóczą krzywe, których długości są takie, jak gdyby układ obrócił się o ten sam kąt 2θ około punktu stałego I figury F.

2) Proste, których promienie wodzące (przeprowadzone od punktów styczności z powłóczącemi do punktu stałego 0), zakreślają pole dane, są stycznemi do stożkowej [2]) ($W = 0$). Ogniska tej ostatniej krzywej są stałe, podczas kiedy mimośród $\left(e = \frac{c}{a}\right)$ jest zależny od wielkości S.

---

[1]) Przypuszczamy w nich, że powłóczące prostych figury F nie mają punktów nieskończenie odległych, co jest równoważne z warunkiem analogicznym dla obu centrodyj.

[2]) Każda z tych stożkowych jest parabolą w przypadku ruchu peryodycznego, dla którego $2\theta = 0$, t. j. przy którym figura F nie wykonywa obrotu całkowitego. W istocie, jeżeli $2\theta = 0$ to znika wyraz θw^2 w równaniu (6′), zatem równanie $S =$ stałej czyni zadość prosta nieskończenie odległa: $u = 0$, $v = 0$; parabole równych pól rozważał Amsler (Ueber d. Flächeninhalt etc. ibid. § 1).

Ad. Schumann zwrócił uwagę na to, iż powłóczącym dwóch prostych, prostopadłych do siebie i przecinających się w danym punkcie, odpowiadają pola V_1, V_2 takie, iż

$$V_1 + V_2 = \text{stałej} + \text{pole rulety punktu przecięcia.}$$

W istocie, niech

$$(7) \qquad \begin{aligned} ux + vy + w &= 0 \\ vx - uy + w_1 &= 0 \;, \end{aligned}$$

będą dwie proste (m, n) figury F, przecinające się pod kątem prostym; wtedy

$$(8) \qquad \begin{aligned} y &= uw_1 - wv \\ x &= -vw_1 - uw \;, \end{aligned}$$

są spółrzędnemi punktu przecięcia.

Dla sumy $V_1 + V_2$ oraz dla pola rulety punktu $(x\,y)$, można według równania (I § 1) (6′ § III) napisać wzory:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} V_1 + V_2 &= \theta\,(x^2 + y^2) - B_2 y - B_1 x + B_3 + B_4 \;^{1)} \\ S &= \theta\,(x^2 + y^2) - B y - A x + C \;. \end{aligned} \right.$$

Przypuśćmy, że rozważane przez nas krzywe są zamknięte, wtedy rozciągając całkowanie na jeden okres ruchu, mamy:

$$(10) \qquad \begin{aligned} 2A &= \int 2a d\varphi \;, \\ 2B &= \int 2b d\varphi \;, \\ 2C &= \int (\alpha a + \beta b)\, d\varphi = \int (a^2 + b^2)\, d\varphi + \int (ab' - a'b)\, d\varphi \;, \\ 2B_1 &= \int 2a d\varphi \;, \\ 2B_2 &= \int 2b d\varphi \;, \\ 2(B_3 + B_4) &= \int (a^2 + b^2)\, d\varphi + \int (aa'' + bb'')\, d\varphi \;. \end{aligned}$$

---

[1]) Z równania tego widzimy, że suma pól $V_1 + V_2$ nie zmieni się, jeżeli będziemy obracali dane prostopadłe do siebie proste około ich punktu przecięcia.

Obliczmy jeszcze powierzchnię P centrodyi ruchomej (p), według wzoru $\frac{1}{2}\int(-\alpha\beta'+\beta\alpha')\,d\varphi$ [1]), w którym α, β jak łatwo dowieść na podstawie równań § 1, są spółrzędnemi punktu styczności centrodyj w układzie XY, wreszcie pole Q centrodyi stałej (π):

$$(11)\qquad \begin{aligned} -P &= \frac{1}{2}\int[(ab'-a'b-(aa''+bb'')+a'^2+b'^2-b'a''+a'b'')]\,d\varphi \\ Q &= \frac{1}{2}\int[(a'b''-b'a'')+(a'^2+b'^2)]\,d\varphi\,. \end{aligned}$$

Z podstawienia otrzymanych wartości (11) i (12) w równaniu (9) wynika ostatecznie równanie:

$$(9')\qquad V_1+V_2=S+(P+Q)=S+\text{stała}\,,$$

wyprowadzone sposobem geometrycznym przez Ad. Schumanna.

Jeżeli potoczymy centrodyę (p) po drugiej stronie krzywej (π), wtedy znak wielkości P przechodzi na przeciwny, t. j.

$$(9'')\qquad V_1+V_2=S+(Q-P)\,.$$

W rozdziale 2-im widzieliśmy, że pola rulet czterech punktów figury F są związane równaniem liniowem; z równania (6'), zaś wnosimy, że dość jest mieć wielkości pól, odpowiadających powłóczącym pięciu prostych, aby można było znaleść pole powłóczącej każdej innej prostej figury F. Jeżeli zaś w przypadku szczególnym uważamy proste, należące do jednego pęku (przecinające się w jednym punkcie), to powyższa liczba (5), redukuje się do trzech. W istocie, przypuśćmy, że cztery dane proste przechodzą przez początek układu XY, wtedy z równania (6'), uwzględniając, że $w_k=0$, otrzymamy układ:

---

[1]) $\frac{1}{2}\int(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\,d\varphi$ równa się $-P$, gdyż kierunek obrotu promienia wodzącego jest odwrotny względem obrotu promienia, opisującego pole Q centrodyi (π).

$$(12) \qquad S_k = (B_3 u_k^2 + B_4 v_k^2 + B_5 u_k v_k) \qquad u_k^2 + v_k^2 = 1$$
$$k = 1, 2, 3, 4\,,$$

z którego możemy wyrugować stałe B_3 B_4 B_5:

$$(12') \qquad \begin{vmatrix} S_1 & u_1^2 & v_1^2 & u_1 & v_1 \\ S_2 & u_2^2 & v_2^2 & v_2 & v_2 \\ S_3 & u_3^2 & v_3^2 & u_3 & v_4 \\ S_4 & u_4^2 & v_4^2 & v_4 & v_4 \end{vmatrix} = \sum_1^4 {}^k a_k S_k = 0\,.$$

Jeżeli pary prostych $(1, 2)$ i $(3, 4)$ są do siebie prostopadłe, wtedy równanie (12′) przechodzi na następujące:

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4\,.$$

Przykłady: 1. Jeżeli kąt dany ABC porusza się tak, że jego oba ramiona ślizgają się po tej samej krzywej (c) to proste, przeprowadzone przez punkt B prostopadle do AB i BC, powłóczą pola jednakowe.

2. Jeżeli trzy proste danego pęku powłóczą krzywe, których pola są rowne zeru, to jakakolwiek prosta tego pęku posiada tę samą własność.

4.

Zamiast punktów lub prostych możemy wziąć pod uwagę jakikolwiek układ krzywych o m parametrach

$$(1) \qquad f(x, y, a_1, \ldots, a_m) = 0\,,$$

i obliczać prawo zmienności pola lub łuku powłóczących tych krzywych, w zależności od zmiany parametrów a_k, lub od zmiany prawa ruchu figury F. W ogólności nie dadzą się tu wyprowadzić proste równania, gdyż element powłóczącej nie wyraża się wymiernie przez parametry a_k, tak np. już dla elementu ds **rulety danego punktu** (xy) otrzymujemy funkcyę niewymierną

$$ds = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}\, d\varphi \; .$$

Inną komplikacyę stanowi to, że krzywe (1) mają zwykle więcej niż jednę powłóczącą (koło dwie, stożkowa 4, krzywa algebraiczna rzędu n-tego n^2, z których część może być urojona).

Dla przykładu weźmy koło o promieniu R. Niech x, y będą spółrzędnemi jego środka M względem układu XY i S polem rulety tego punktu (M).

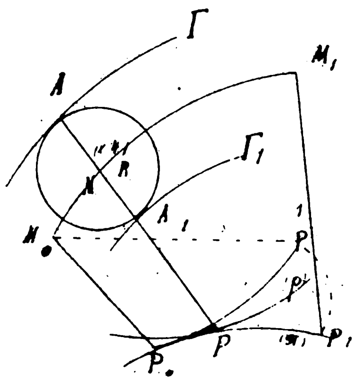

Fig. 5.

Oznaczmy przez S_1 i S_2 pola powłóczących danego koła, przez χ kąt promieni $\overline{M_0P_0}$ i $\overline{M_1P_1}$, łączących oba końcowe położenia punktu M i chwilowego środka obrotu P, wreszcie przez (P), część pola centrodyi ruchomej, zawartą między temi położeniami promienia MP.

Z równania (2) § II wynika, że:

$$S = \frac{1}{2}\int \overline{MP}^2 d\varphi + (P) = \frac{1}{2}\int r^2 d\varphi + (P) \; .$$

Oznaczmy przez A i A_1 punkty przecięcia promienia MP z danem kołem. Ponieważ te ostatnie są zarazem punktami powłóczących Γ, Γ_1, więc z wzoru

$$\overline{PA}^2 + \overline{PA'}^2 = (r + R)^2 + (r - R)^2 = 2(r^2 + R^2),$$

wynika równanie:

$$S_1 + S_2 = \left(\frac{1}{2}\int \overline{PA}^2 d\varphi + (P) \quad \frac{R^2}{2} \cdot \left(\smile P'M_0P_0\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\overline{PA'}^2 d\varphi + (P)\right.$$

$$\left. - \frac{R^2}{2}\left(\smile P'M_0P_0\right)\right) = \int \left(r^2 + R^2\right) d\varphi + 2(P) - R^2\left(\smile P'M^0P_0\right),$$

ponieważ kąt $P'M_0P_0 = 2\theta - \chi$, więc:

(2) $$S_1 + S_2 = \int r^2 d\varphi + 2(P) + R^2\chi = 2S + R^2\chi\,.$$

Widzimy więc, że dla powłóczących koła suma $S_1 + S_2$ zależy tylko od postaci rulety punktu M.

Przypuśćmy teraz ogólniej, że dane krzywe (1)

(1) $$f(x, y, a_k) = 0 \qquad k = 1 \,\ldots\, m\,,$$

są algebraiczne stopnia n-tego w spółrzędnych x, y. Równaniu (1), jak wiadomo, można nadać postać

$$\sum_0^n (a_{k0}x^k + a_{k,1}x^{k-1}y + a_{k,2}x^{k-2}y^2 + \ldots + a_{k,k}y^k) = 0\,,$$

przytem spółczynniki a_{ik} będziemy uważali za wielkości niezależne, jeżeli dany układ obejmuje wszystkie krzywe algebraiczne rzędu n-tego. W przeciwnym przypadku, kiedy

$$m < n_p = \frac{(n+2)\,(n+1)}{2} - 1\,,$$

t. j. jeżeli liczba parametrów m równania (1) jest mniejsza od liczby punktów, określających jednoznacznie krzywą ogólną rzędu n-tego, będziemy uważali $a_{i,k}$ jako funkcye m zmiennych niezależnych $a_1, \ldots, a_m$

$$a_{i,k} = \Psi_{i,k}(a_1, \ldots\, a_m)\,.$$

Warunek dla spółrzędnych x, y punktu przecięcia jakiejkolwiek krzywej układu (1) z pionem spuszczonym na nią z dowolnego punktu (α, β) wyraża się równaniem:

$$(3) \qquad f_1(x, y) \equiv (\alpha - x)\frac{\partial f}{\partial y} - (\beta - y)\frac{\partial f}{\partial x} = 0 ,$$

które, również jak i poprzednie (1), jest w ogólności stopnia n-tego względem zmiennych x, y.

Jeżeli, jak poprzednio, (α, β) są spółrzędnemi chwilowego środka obrotu figury F w układzie ruchomym (XY), wtedy (x, y) jest punktem powłóczącej danej krzywej układu (1).

Rozwiązując (1) i (3) względem niewiadomych x, y otrzymujemy (najwyżej) n^2 rożnych wartości spółrzędnych punktów szukanych. Aby znaleść równanie dla zmiennej x uważamy w (1) i (3) x za ilość stałą i tworzymy t. zw. w y p a d k o w ą czyli r u g o w n i k (Resultante) tych równań. Będzie to w ogólności równanie stopnia n^2 względem x postaci:

$$(4) \qquad A_0 x^{n^2} + A_1 x^{n^2-1} + \ldots + A_{(n^2)} = 0 ,$$

o spółczynnikach A_k, które, jak to wynika ze sposobu tworzenia wypadkowych są funkcyami całkowitemi i wymiernemi wielkości $a_{i,k}$ oraz spółrzędnych punktu danego (α, β).

Takim samym sposobem możemy dla niewiadomej y otrzymać równanie:

$$(4') \qquad B_0 y^{n^2} + B_1 y^{n^2-1} + \ldots + B_{n^2} = 0 ,$$

w którem spółczynniki B_k są funkcyami wymiernemi, całkowitemi od $a_{i,k}$ oraz od (α, β).

Wiadomo, że wymiar wypadkowej jest zawsze równy iloczynowi wymiarów danych równań; dlatego też spółczynniki A_0, B_0 równań (4) i (4'), nie mogą być równe zeru. M o ż n a r ó w n i e ż ł a t w o d o w i e ś ć, ż e s ą o n e w o g ó l n o ś c i n i e z a l e ż n e o d z m i e n n y c h α, β.

W istocie, równanie (1) można, porządkując je według potęg zmiennych x i y, napisać w sposób następujący:

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
f(x, y, a_r) &= a_{00} + (a_{10} x + a_{11} y) + (a_{20} x^2 + a_{21} xy + a_{22} y^2) + \ldots \\
&= \left(\sum_0^n a_{k\,.\,k} y^k\right) + x\left(\sum_1^n a_{k\,.\,k-1} y^{k-1}\right) + x^2\left(\sum_2^n a_{k\,.\,k-2} y^{k-2}\right) + \ldots + a_{n0} x^n = \\
&= \left(\sum_0^n a_{k0} x^k\right) + y\left(\sum_1^n a_{k\,.\,1} x^{k-1}\right) + y^2\left(\sum_2^n a_{k\,.\,2} x^{k-2}\right) + \ldots + a_{nn} y^n = \\
&= \alpha_n + \alpha_{n-1} x + \alpha_{n-2} x^2 + \ldots + \alpha_0 x^n = \beta_n + \beta_{n-1} y + \ldots + \beta_0 y^n .
\end{aligned}
\right.
$$

Podstawmy teraz w równaniu (3) zamiast wyrazów $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, odpowiednio ich wartości, obliczone z równania (5):

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha_{n-1} + 2\alpha_{n-2} x + \ldots + n\alpha_0 x^{n-1} ,
$$

$$
\frac{\partial f}{\partial y} = \beta_{n-1} + 2\beta_{n-2} y + \ldots + n\beta_0 y^{n-1}
$$

i obliczmy spółczynnik γ_l w równaniu (3) wyrazu zawierającego x^l;

$$
\begin{aligned}
\gamma_l = (y - \beta) \,.\, (l+1)\, a_{n-l-1} + \alpha\,(a_{l+1\,.\,1} + 2y a_{l+2\,.\,2} + \ldots \\
+ (n-l)\, y^{n-l-1} \,.\, a_{n,\,n-l}) \\
- (a_{l,1} + 2y a_{l+1\,.\,2} + \ldots + (n-l+1)\, y^{n-l} a_{n,\,n-l+1}) \,.
\end{aligned}
$$

Z ostatniego wzoru wnosimy, że w ogólności wyraz odpowiadający w nim najwyższej potędze y t. j. y^{n-l} nie zawiera wielkości α i β. W szczególnym przypadku, jeżeli spółczynnik

$$
-(l+1)\, a_{n\,.\,n-l-1} - (n-l+1)\, a_{n,\,n-l+1} ,
$$

jest równy zeru, wtedy wyraz ten znika.

W podobny sposób można wyprowadzić analogiczny rezultat dla spółczynników δ_k równania (3), uporządkowanego według potęg zmiennej y, przyczem δ_k są funkcyami zmiennej x rzędu $n-k$.

Utwórzmy wiadomym sposobem wypadkową D równań (5) i (3), uważając w nich którąkolwiek ze zmiennych, np. x za stałą:

$$(6) \qquad D = \begin{vmatrix} \overbrace{0\ 0\ 0}^{n-1} & 0 & \overbrace{\beta_0\ \beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_n}^{n+1} \\ 0\ 0 & & \beta_0\ \beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_n\ 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ \beta_0\ \beta_1 \ldots & \beta_{n-1}\ \beta_n \ldots & 0 \\ 0\ 0 \ldots & 0\ \delta_0\ \delta_1 \ldots & \delta_n \\ 0\ 0 \ldots & \delta_0\ \delta_1\ \delta_2 \ldots & \delta_n\ 0 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \delta_0\ \delta_1 \ldots & \delta_{n-1}\ \delta_n & \underbrace{0 \ldots 0}_{n-1} \end{vmatrix} = 0 .$$

Oczywiście, ażeby w równaniu (6) otrzymać wyraz zawierający najwyższą potęgę niewiadomej x, t. j. x^{n^2} należy pozostawić w elementach β_k, δ_k tylko wyrazy o najwyższych $(n-k)$ potęgach względem x. Wyrazy te w szczególnym przypadku mogą być równe zeru; jednak utworzony w ten sposób wyznacznik (D_1), nie może identycznie znikać, gdyż w przeciwnym razie zawierający się w nim wyraz

$$A_0 x^{n^2} ,$$

byłby równy zeru, co jest przeciwne założeniu.

Z powyższej jednak własności najwyższych potęg względem x elementów δ_k wynika, że są one wolne od α, β; to samo, oczywiście stosuje się do elementów β_k, otrzymanych z równania $(1)_2$ nie zawierającego α i β; a zatem wyznacznik (D_1), a wskutek tego i spółczynnik A_0 jest niezależny od spółrzędnych α, β c. b. d. o.

W ten sam sposób można dowieść, że i spółczynnik B_0 jest li tylko funkcyą parametrów $a_1, \ldots, a_m$.

Przejdźmy teraz do następnych spółczynników $A_1, \ldots A_2, \ldots$ równania (6).

Z uwagi, że elementy β_k są wolne od zmiennych α, β, a elementy δ_k zawierają je tylko w pierwszej potędze, wnosimy, że równanie (6) jest względem α, β stopnia co najwyżej równego n t. j., że spółczynniki A_1, A_2 ... nie zawierają wyższych potęg α i β nad n-tą. To samo oczywiście stosuje się do spółczynników B_1, B_2 równania (4').

Wyłączyć należy ten przypadek, kiedy równanie (3) jest stopnia niższego niż n, np. $n-1$-tego, wtedy wypadkowa jest stopnia $(n-1)\,n < n^2$, spółczynnik zaś potęgi $(n)\,(n-1)$ niewiadomej w wypadkowej jest w ogóle zależny od α, β.

Zastrzeżenie to można wyjaśnić następującym przykładem:

Równaniu:

$$(1') \qquad f(x, y, a_r) \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0 \, ,$$

odpowiada równanie (3):

$$(3') \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\beta - y) - \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha - x) \equiv x\beta - y\alpha = 0 \, ,$$

i dla zmiennej (y) rugownik:

$$y^2(\alpha^2 + \beta^2) - a^2\beta^2 = 0$$

w którym spółczynnik najwyższej potęgi y^2 jest zależny od ξ i η.

Wyłączamy więc, mówiąc geometrycznie, te krzywe (1), które z krzywemi (3) przecinają się w punktach nieskończenie odległych lub też te krzywe, dla których niektóre spodki pionów spuszczonych z punktu (α, β) leżą w nieskończoności.

Ponieważ jednak punkt (α, β) będziemy uważali w następstwie jako ruchomy środek obrotu, mogący przyjąć jakiekolwiek położenie na figurze F', więc i wyżej wymienione spodki prostopadłych w ogóle będą się przesuwały po danej krzywej. Dlatego też cała gałęź tej ostatniej musiałaby leżeć w nieskończoności. Wyjątek stanowią punkty osobliwe (np. punkty podwójne) krzywej, które można zawsze uważać za spodek prostopadłych spuszczonych z jakiegokolwiek punktu (α, β) (gdyż dla tych punktów lewa strona równania (3) identycznie równa się zeru), wreszcie t. zw. punkty urojone kołowe, które przy jakimkolwiek ruchu układu pozostają w spoczynku.

Wyłączając szczególny przypadek $A_0 = 0$ lub $B_0 = 0$, możemy funkcye symetryczne pierwiastków równania (6) $\sum_1^{n^2} x_s$, $\sum_1^{n^2} x_s^2$ wyrazić w sposób następujący przez A_0, A_1, A_2:

$$
(7) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_1^{n^2} x_s = -\frac{A_1}{A_0} \\
&\sum_1^{n^2} x_s^2 = \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 - 2\left(\frac{A_2}{A_0}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

a tem samem i przez m parametrów a_r i przez α, β.

W ten sam sposób dochodzimy do wniosku, iż sumy pierwiastków $\sum^{n^2} y_s$ i $\sum^{n^2} y_s^2$ można zawsze wyrazić wymiernie przez α, β, a_{ik}, a zatem i przez parametry $a, \ldots, a_m$:

$$
(8) \qquad
\begin{aligned}
&\sum y_k = -\frac{B_1}{B_0} = \sum \varphi_s (a \ldots a_m) \,.\, \Phi_s (\alpha, \beta) \\
&\sum y_k^2 = \left(\frac{B_1}{B_0}\right)^2 - 2\left(\frac{B_2}{B_0}\right),
\end{aligned}
$$

przyczem wystarcza obliczenie pierwszych trzech spółczynników w równaniach rugowników (4, 4').

Opierając się na powyższym wyniku, możemy dowieść ogólnego twierdzenia dla pól powłóczących danego układu (1) krzywych algebraicznych.

Niech (p) i (π) będą centrodyami ruchu, $P(\alpha, \beta)$ chwilowym środkiem obrotu. Przypuśćmy, że jedna z krzywych T układu (1) porusza się jakimkolwiek sposobem w swej płaszczyźnie i że A_i jest w danem położeniu punktem styczności tej krzywej z powłóczącą.

Zadanie nasze polega na obliczeniu pola V_i, opisywanego przez odcinek zmienny $\overline{A_i P}$ i zawartego między dwoma danemi jego położeniami

$$A_i^0 P^0 \text{ i } A_i^1 P^1 .$$

Oznaczając przez M_i pole, zawarte między krzywą T, centrodyą ruchomą (p) i powyższemi położeniami promienia $A_i P = r_i$ na figurze ruchomej F, mamy równanie:

$$(9) \qquad V_i = \frac{1}{2} \int r_i^2 d\varphi + M_i \qquad i = 1, \ldots, n^2 .$$

Sumując powyższe równania (9) dla wszystkich skaźników (i) oraz oznaczając $\sum\limits_1^{n^2} (V_i - M_i)$ przez I, mamy:

$$(10) \qquad I = \frac{1}{2} \int \sum_1^{n^2} r_i^2 \, d\varphi .$$

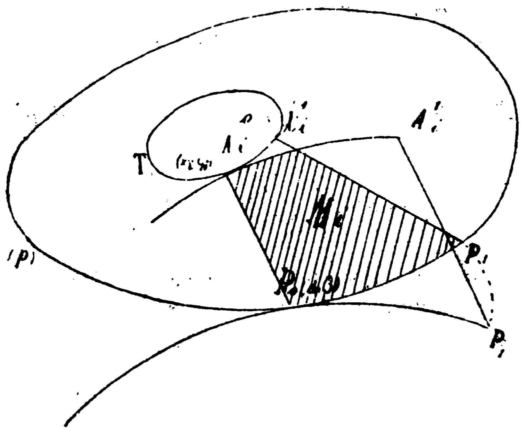

Fig. 6.

Całkę po prawej stronie ostatniego równania można przedstawić w postaci

$$(11) \quad I = \frac{1}{2} \int d\varphi . \sum_1^{n^2} (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_i - 2\beta y_i + x_i^2 + y_i^2) ,$$

przytem $x_i \, y_i$ są to spółrzędne punktu A_i, α i β bieguna chwilowego P w układzie związanym z figurą F. Oczywiście, że między α i β istnieje dla każdego ruchu figury inna zależność.

W równaniu (11) możemy wyrazy $\sum_1^{n^2} x_i$, $\sum_1^{n^2} x_i^2$ i t. d. zastąpić przez ich wartości z równania (7) i (8):

$$2I = n^2 \int d\varphi\,(\alpha^2 + \beta^2) + 2\int d\varphi\,\alpha\,\frac{A_1}{A_0} + 2\int d\varphi\,\beta\,\frac{B_1}{B_0}$$
$$+ \int\left(\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 - 2\,\frac{A_2}{A_0}\right) d\varphi + \int\left(\frac{B_1}{B_0}\right)^2 - 2\left(\frac{B_1}{B_0}\right) d\varphi$$

i dzięki temu, że A_0, B_0 są niezależne od α i β, że A_1, A_2, B_1, B_2 są funkcyami całkowitemi wymiernemi tychże zmiennych, wyprowadzić wielkości zależne od parametrów $a_1, \ldots, a_m$ poza znak całkowania.

W ten sposób otrzymujemy wzór

$$I = \sum \Psi_l\,(a_1 \ldots a_m)\, w_l\,, \tag{12}$$

w którym w_l są to w ogólności całki, zależne tylko od spółrzędnych $\alpha\,\beta$, uważanych podczas danego ruchu jako określone funkcye zmiennej niezależnej φ. Dla tego też wielkości w_l zachowują przy danym ruchu tę samą wartość dla wszystkich krzywych danego układu.

Jeżeli σ jest liczbą spółczynników w_l równania (12), to tworząc $(\sigma + 1)$ takich równań dla rozmaitych krzywych danego układu i rugując z nich σ nie razem wiadomych w_l, możemy otrzymać równanie:

$$\sum_1^{\sigma+1} \varepsilon_l\,.\,I_l = 0$$

i stąd twierdzenie:

Jeżeli dany niezmienny układ krzywych algebraicznych rzędu n-go

$$f(x, y; a_1, \ldots, a_m) = 0\,, \tag{1}$$

porusza się jakimkolwiek sposobem w swej płaszczyźnie, to między sumami pól $I_l = \sum_1^{n^2} (V_{il} - M_{il})$, określonemi jak na str. 28, obliczonemi dla pewnej ilości $(\sigma + 1)$ krzywych układu, istnieje zależność jednorodna i linijna

$$\sum_{1}^{\sigma+1} \varepsilon_l I_l = 0 \;,$$

w której spółczynniki ε_l zależą tylko od parametrów $a_1 \ldots a_m$.

Uwaga. Równanie $(\alpha - x)\frac{\partial f}{\partial y} - (\beta - y)\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, powinno być również jak i równanie (1) stopnia n-go względem spółrzędnych x, y.

Rozważając równanie (11), możemy z łatwością określić górną granicę liczby σ spółczynników w_l; mianowicie jest ona zależna od najwyższej potęgi, w jakiej zmienne α, β występują w wypadkowych (4, 4′) resp. w wielkościach A_1, A_2, B_1, B_2.

Ponieważ α i β znajdują się tylko w wierszach wyznaczników (4, 4′), zależnych od równania (3) i najwyżej w 1-ej potędze, więc rząd równania (4, 4′) względem α, β nie może być większy nad n, a zarazem rząd wyrazów Σx^2 resp. Σy^2 nie może być większy niż $2n$.

Ponieważ dla każdego iloczynu $\alpha^i \beta^k$

$$i + k \leqq 2n \,,$$

musimy utworzyć w równaniu (11) całkę osobną, więc ilość tych wyrazów jest najwyżej równa:

$$\sigma \leqq \frac{(2n + 2)\,(2n + 1)}{2} = (n + 1)\,(2n + 1) \;,$$

np. jeżeli dany układ składa się ze wszystkich prostych figury F, to $\sigma \leqq 6$, co jest w zgodzie z równaniem (6′) rozdziału 3-go.

Przypuśćmy w szczególnym przypadku, że wszystkie krzywe T danego układu są zamknięte i że dany ruch jest peryodyczny, wtedy i każda gałąź powłóczącej będzie w ogólności krzywą zamkniętą, prócz tego wszystkie pola M_i będą równe M, t. j. równe polu wstęgi ograniczonej krzywą T i centrodyą ruchomą (p), t. j.

$$\sum_1^{n^2} M_i = n^2 M = n^2 (P - T) ,$$

gdzie P jest powierzchnią centrodyi (p), T powierzchnią danej krzywej, stąd:

$$I = \sum_1^{n^2} V_i + n^2 (T - P) ;$$

$$n^2 \left(\frac{\sum\limits_1^{n} V_i}{n^2} + T \right) = I + n^2 P = I + \text{stała} ,$$

gdzie wyraz $n^2 P$ jest stały dla wszystkich krzywych układu.

Jako przykład stosowania wyżej wymienionego twierdzenia weźmy równanie:

$$(13) \qquad Ax^2 + By^2 - C = 0 ,$$

oznaczając $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ przez a i b, mamy:

$$(13') \qquad ax^2 + by^2 - 1 = 0 ,$$

według (3) otrzymujemy stąd:

$$(3'') \qquad (\alpha - x)\, by - (\beta - y)\, ax = 0$$

i dla zmiennej y rugownik:

$$(14) \qquad \alpha a^2 b^2 y^2 + (by^2 - 1)\, (y\,(a - b) - \beta a)^2 = 0 ,$$

oraz wartości spółczynników tego równania: B_0, B_1, B_2

$$B_0 = b\,(a - b)^2\,,$$

$$B_1 = -\,2ab\,(a - b)\,\beta\,,$$

$$B_2 = aa^2b^2 + a^2b\,\beta^2 - (a - b)^2\,,$$

i analogiczne wartości spółczynników A_0, A_1, A_2.

$$A_0 = a\,(a - b)^2\,,$$

$$A_1 = 2ab\,(a - b)\,a\,,$$

$$A_2 = B_2 = b\beta^2a^2 + b^2aa^2 - (a - b)^2\,.$$

W równaniu:

$$2I = n^2 \int d\varphi\,(a^2 + \beta^2) + 2\int d\varphi\, a\,\frac{A_1}{A_0} + \ldots \quad \text{i t. d.}$$

zachodzą w danym przypadku trzy rozmaite całki:

$$\int a^2 d\varphi \quad , \quad \int \beta^2 d\varphi \quad , \quad \int d\varphi\,,$$

które oznaczmy odpowiednio przez:

$$N_1 \quad , \quad N_2 \quad , \quad 2\theta\,.$$

A zatem:

$$2I = w_1\,2\theta + w_2 N_1 + w_3 N_2\,,$$

t. j. między wielkościami I, obliczonemi dla 4-ch krzywych układu (1′) istnieje równanie liniowe i jednorodne.

Jeżeli w równaniu (13) przypuścimy, że:

$$C = 0\,,$$

wtedy stożkowe, określone tem równaniem, przechodzą na układ 2-ch prostych, którego powłócząca ma tylko dwie gałęzie.

Lewa strona równania (14) rozpada się przytem na iloczyn 2-ch wielomianów 2-go stopnia względem y, z których jeden odpowiada wyżej wspomnianym powłóczącym, drugi zaś

$$y^2 = 0 \qquad \text{(i analogicznie } x^2 = 0)$$

pokazuje, że punkt przecięcia się prostych, t. j · podwójny punkt krzywej

$$Ax^2 + By^2 = 0 \ ,$$

daje nową gałąź powłóczącej, liczoną do tego podwójnie. Możemy więc w tym szczególnym przypadku sprawdzić słuszność uwagi (na str. 26), tyczącej się punktów osobliwych.

5.

Twierdzenia poprzednich trzech rozdziałów, stosujące się do ruchu figury niezmiennej, próbowano rozszerzyć i na konfiguracye punktów, które podczas ruchu zmieniają się według pewnego prawa [1]); np. według zasady przekształcenia rzutowego.

Na tem miejscu ograniczę się do wyprowadzenia wzorów tylko dla hodografów [2]) punktów figury F, poruszającej się z określoną w każdej chwili prędkością kątową.

[1]) Jeżeli od stałego punktu W kreślimy odcinki równe co do kierunku i wielkości przyspieszeniom n-tego rzędu (w danym przypadku szybkościom) poruszającego się punktu, to punkty końcowe tych odcinków leżą na krzywej zwanej hodografem (przyspieszenia resp. prędkości) danego punktu.

[2]) Kleiber (Hoppe Archiv 1896). Die Amslerschen Flächensätze im Gebiete affin veränderlicher Systeme u. auf den Flächen constanter Krümmung. Amsler, znany wynalazca planimetru (Polarplanimeter) biegunowego, zajmuje się twierdzeniami § 1—3, w rozprawie drukowanej w Szaffuzie w roku 1880. Kleiber dowodzi twierdzeń analogicznych, dla układów, zmieniających się według równań:

$$\left.\begin{aligned} x &= nx_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 \\ y &= ny_1 + \lambda y_2 + \mu y_3 \end{aligned}\right\} \ n + \lambda + \mu = 1 \ ,$$

w których (x_k, y_k), $k = 1, 2, 3$, są trzy punkty o torach wiadomych. Oczywiście ruch układu będzie zupełnie określony przez trajektorye danych punktów i jeszcze dwóch innych punktów układu. Pola, opisane przez siedem rozmaitych punktów układu, połączone są równaniem liniowem etc.

Duporcq (Journ. de Mathém. (5) I, również zajmuje się uogólnieniem twierdzeń Darboux'a na figury płaskie, zmieniające się według zasady podobieństwa.

Polem hodografu prędkości nazwiemy pole S_v, opisane przez promień wodzący $V = \frac{ds}{dt}$; dla prostoty przypuścimy jeszcze, że prędkość kątowa ruchu figury $F\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ równa się 1, t. j. $\varphi' = \frac{d\varphi}{dt} = 1$, że zatem jako zmienną niezależną φ możemy uważać czas trwania ruchu.

Zważywszy, że końcowy punkt odcinka v ma spółrzędne

(1) $\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\varphi} = \xi'$, $\frac{d\eta}{dt} = \eta'$ (ξ, η — spółrzędne punktu danego),

otrzymujemy na dS_v wzór:

(2) $$dS_v = (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')\, d\varphi\,.$$

Ostatnie równanie całkujemy, uwzględniając wartości na ξ, η ξ', η' i t. d. z równań § I.

(3) $$S_v = \theta\left(x^2 + y^2\right) - x\int\left(\alpha + \frac{\beta'}{2}\right)d\varphi - y\int\left(\beta - \frac{\alpha'}{2}\right)d\varphi$$
$$+ \int\frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta' - \beta\alpha')}{2}\, d\varphi\,.$$

Widzimy więc, że rozkład punktów, których hodografy mają to samo pole, jest taki sam jak w § I.

Jeżeli tory punktów figury F są zamknięte, to przy stałej prędkości kątowej i hodografy są krzywemi zamkniętemi, wtedy środek kół spółśrodkowych, danych przez równanie

(3′) $$S_v = \text{stałej},$$

ma spółrzędne

$$\frac{\int a\,d\varphi}{2\theta} \text{ i } \frac{\int b\,d\varphi}{2\theta}\,,$$

jest zatem identyczny z rozważanym w § I (równanie 8′), środkiem ciężkości krzywizn Steinera.

Pole elementarne dS_v można w spółrzędnych biegunowych (v, φ) przedstawić w sposób następujący:

$$2dS_v = v^2 d\tau .$$

Ponieważ kąt $d\tau$ jest proporcyonalny do krzywizny toru punktu danego: $d\tau = \frac{ds}{k}$, gdzie k jest promieniem krzywizny, więc:

$$2dS_v = \frac{v^2}{k} ds = p_n ds . \tag{4}$$

Powierzchnię, określoną równaniem (4), opisuje odcinek równy co do wielkości przyspieszeniu dośrodkowemu p_n danego punktu, jeżeli przypuścimy, że zostaje on podczas swego ruchu normalnym do toru, który go dzieli na dwie równe części.

6.

Dotychczas rozważaliśmy figurę F, poruszającą się w jeden określony sposób w swojej płaszczyźnie. Można również przypuścić, że bierze ona udział w dwóch ruchach posuwistych i przy każdym z nich otrzymamy na pole rulety punktu M inną wielkość S_1, S_2.

Otóż z rozważania równania (I) § 1 wynika, że miejscem geometrycznem punktów figury F, dla których $S_1 = S_2$, jest obwód koła; środek zaś tego ostatniego leży na prostej, łączącej środki pól (C_1 i C_2) obu danych ruchów.

W szczególnym przypadku, kiedy kąty obrotu obu ruchów są równe, koło ($S_1 = S_2$) przechodzi na prostą, prostopadłą do prostej $C_1 C_2$. Jeżeli oba kąty obrotu są równe zeru, otrzymujemy również linię prostą.

Jako dalszy wniosek wynika stąd, że istnieją zawsze dwa punkty rzeczywiste (lub urojone) figury F (oprócz dwóch tak zw. urojonych punktów kołowych), których rulety przy trzech danych ruchach mają równe co do wielkości pola.

Jeżeli kąty obrotu są równe, otrzymujemy tylko jeden punkt, posiadający powyższą własność.

Przykład. Niech $ABCD$ będzie czworokątem stawowym (Gelenkviereck), w którym boki AB, CD wykonywają jednocześnie około punktów A, D obroty całkowite ($\alpha = 2\pi$); możemy przyjąć przy pewnych założeniach co do długości boków czworokąta, że i BC odbywa jednocześnie z AB i CD obrót całkowity.

W tym przypadku punkty równych pól dla (AB — BC) i (CD — BC) leżą na prostych (m_1, m_2), przechodzących odpowiednio przez punkty (B, C), które przy każdej parze ruchów opisują tory jednakowe.

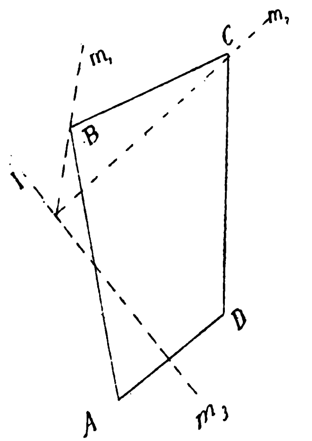

Fig. 7.

Prosta m_3 równych pól dla (AB — CD) przechodzi przez środek odcinka AD, prostopadle do tego ostatniego.

Oczywiście te trzy proste (m_1, m_2, m_3) muszą się przecinać w jednym punkcie [1]) (I). W ten sam sposób można zbadać przy-

[1]) Rozważając równania (6' § III) dochodzimy do wniosku, że w przypadku dwóch ruchów, niezależnych od siebie, istnieje krzywa klasy 2-ej, której styczne powłóczą pola jednakiej wielkości; w przypadku zaś trzech ruchów istnieją cztery proste (rzetelne lub urojone), posiadające powyższą własność.

padek, kiedy nie wszystkie boki czworokąta wykonywają obroty całkowite.

Nowy szereg twierdzeń cynematycznych otrzymujemy, przypuściwszy, że ruchy w których bierze udział figura F nie są od siebie niezależne. Do tego działu należy znane twierdzenie Steinera [1]), którego można dowieść w sposób następujący:

Niech krzywa zamknięta (p) toczy się po prostej (π), wtedy pole rulety punktu M można wyrazić wzorem:

$$S = \frac{1}{2}\int \overline{MP}^2 d\varphi + (P)\,. \tag{1}$$

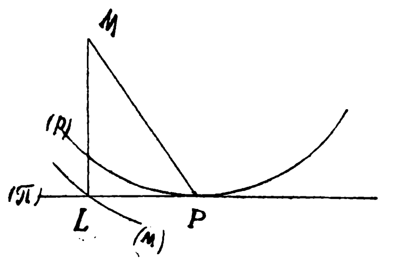

Fig 8.

Przy ruchu odwrotnym prosta (π) toczy się po krzywej (p) i spodek L prostopadłej ML, spuszczonej z M na tę prostą, opisuje krzywą zamkniętą (μ), której pole S_1 jest równe:

$$S_1 = \frac{1}{2}\int \overline{PL}^2 d\varphi + (P) = \frac{1}{2}\int \overline{ML}^2 d\varphi\,; \tag{2}$$

ponieważ zaś:

$$ML^2 = \overline{MP}^2 - \overline{PL}^2$$

$$\int \overline{ML}^2 d\varphi = \int \overline{MP}^2 d\varphi - \int \overline{PL}^2 d\varphi\ ,$$

---

[1]) Rozciągnięte na jeden całkowity obrót krzywej (p) i rozważane jak w § 2.

więc z równania (2) można wyrugować wyraz $\frac{1}{2}\int \overline{PL}^2 d\varphi$, wskutek czego otrzymujemy

$$S_1 = \frac{1}{4}\int \overline{MP}^2 d\varphi + \frac{(P)}{2},\ \text{t. j. } S_1 = \frac{S}{2}$$

(twierdzenie Steinera).

Przypuśćmy teraz, że krzywa (p) toczy się najprzód po jednej, potem zaś po drugiej stronie krzywej (π). Otrzymujemy w ogólności dwa rozmaite ruchy i dla punktu M dwa pola S_1, S_2:

$$S_1 = \frac{1}{2}\int \overline{MP}^2 d\varphi + (P),$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\int \overline{MP}^2 d\psi + (P).$$

W obu przypadkach kąty elementarne obrotu są rozmaite, mianowicie (r, ϱ promienie krzywizny centrodyi)

$$d\varphi = ds\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}\right);\ d\psi = ds\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right),$$

a zatem:

$$S_1 + S_2 = 2(P) + \int \frac{\overline{MP}^2 ds}{r},$$

t. j. suma pól $S_1 + S_2$ jest niezależną od krzywizny krzywej (π), dlatego też przy obliczaniu tejże, można przyjąć, że krzywa (p) toczy się po prostej (twierdzenie Koenigsa [1]).

Weźmy jeszcze przykład następujący:

Ruch posuwisty figury F jest określony, jeżeli oprócz obu centrodyj (p) i (π), dane są dwa punkty tych krzywych, które jednocześnie przyjmują położenie chwilowego środka obrotu P. Niech

---

[1] Koenigs. Leçons de Cinéme tique p. 182.

punktowi A krzywej (p) odpowiada w ten sposób punkt A_1 krzywej (π). Zmieniając położenie punktu A, otrzymujemy w ogólności inny ruch i dla rulety danego punktu M inne pole S'. Przypuściwszy że r i ϱ mają znaczenie, jak w poprzedniem twierdzeniu, mamy:

$$S = \frac{1}{2}\int \overline{MP}^2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\varrho}\right) ds + (P)\,,$$

$$S' = \frac{1}{2}\int \overline{MP}^2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\varrho'}\right) ds + (P')\,,$$

zatem $S - S' = \frac{1}{2}\int \overline{MP}^2\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right) ds + (P) - (P')\,.$

Jeżeli całkowanie rozciąga się między dwoma takiemi położeniami figury, dla których ten sam punkt A (centrodyi p) jest środkiem obrotu, wtedy (P) i (P') oznaczają pole zamkniętej krzywej (p), t. j. $(P) = (P')$ i

$$S - S' = \frac{1}{2}\int \overline{MP}^2\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho'}\right) ds\,.$$

Różnica zatem pól $S - S'$ jest niezależna od kształtu krzywej (p), którą wskutek tego przy obliczaniu wzoru (3) można zastąpić prostą.

O SUMOWANIU LICZB WARYACYJ.

Napisał

M. T. Huber.

Liczba waryacyj r-tej klasy z n elementów bez powtórzeń, t. j. $\overset{(n)}{V_r}$ przedstawia się, jak wiadomo, wzorem:

$$\overset{(n)}{V_r} = \binom{n}{r} r! = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\ldots(n-r+1)\,.$$