SYSTEM GRUPOWY OBLICZANIA REZERWY W UBEZPIECZENIACH Z TERMINEM STAŁYM.

Napisał

B. Danielewicz.

Powszechnie wiadomą w kole specyalistów jest rzeczą, że najmozolniejszą część rachunkowości w ubezpieczeniach życiowych stanowi obliczanie rezerwy premiowej. Dla skrócenia pracy używa się często t. zw. systemu grupowego obliczania rezerwy, za pomocą którego oznacza się rezerwę nie dla każdej osoby oddzielnie, lecz dla całej grupy osób jednego wieku, ubezpieczonych według tej samej kombinacyi. Sposób ten jest wprawdzie mniej ścisły od metody jednostkowej, ale niewątpliwie skraca robotę, skutkiem czego posiada duże znaczenie dla wielkich towarzystw.

W książce p. t.: „Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych" (Warszawa, 1896) opisaliśmy system grupowy dla ubezpieczeń pośmiertnych ze skróconym czasem płacenia premij, dla ubezpieczeń mieszanych i na dożycie bez zwrotu premij. Z tych trzech kombinacyj dają się, bez wielkiego trudu, wyprowadzić sposoby i dla innych kombinacyj; lecz z pośród tych ostatnich stoi całkiem na uboczu ubezpieczenie kapitałów z terminem stałym, t. j. kapitałów płatnych bezwarunkowo w terminie oznaczonym, podczas gdy premie wnoszą się tylko do chwili ewentualnie wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej.

Sposobów grupowego obliczania rezerwy, podanych dla powyżej wzmiankowanych trzech kombinacyj, do tej kombinacyi zastosować nie można. Sposób taki wyprowadzić trzeba bezpośrednio i ten właśnie przedmiot stanowić ma treść niniejszego artykułu.

Gdy przez r oznaczymy czynnik oprocentowujący, przez ϱ czynnik dyskontujący $\left(r = \dfrac{1}{\varrho}\right)$; przez ${}^{n}p_x$ roczną premię netto, płaconą przez osobę x letnią za jednostkę kapitału, ubezpieczonego z terminem stałym, n letnim; wreszcie przez ${}^{n}R_x$ wartość jednostki renty czasowej, płatnej rocznie z góry przez n lat, to rezerwą od ubezpieczonego kapitału k po ν latach ubezpieczeniowych będzie:

$$\text{Res}\,(x, \nu) = k\,.\,\varrho^{n-\nu} - k\,.\,{}^{n}p_x\,.\,{}^{n-\nu}R_{x+\nu} = k\,.\,\frac{\varrho^{x+n}}{\varrho^{x+\nu}} - k\,.\,{}^{n}p_x\,.$$

$$.\,\frac{\Sigma v_{x+\nu} - \Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu}}\,.$$

Rezerwą po ν—1 latach ubezpieczeniowych jest:

$$\text{Res}\,(x, \nu - 1) = k\,.\,\frac{\varrho^{x+n}}{\varrho^{x+\nu-1}} - k\,.\,{}^{n}p_x\,.\,\frac{\Sigma v_{x+\nu-1} - \Sigma v_{x+n}}{v_{x+\nu-1}}\,.$$

Gdy, przybliżenie, za rezerwę na d. 31 grudnia, t. j. przy końcu roku rachunkowego, przyjmiemy średnio-arytmetyczną z powyższych dwóch rezerw i gdy nadto za przeniesienie premij przyjmiemy, również przybliżenie, połowę rocznej premii netto, t. j. $\frac{{}^{n}p_x\,.\,k}{2}$, wtedy wzorem dla przybliżonej rezerwy (łącznie z przeniesieniem premii netto) na d. 31 grudnia, czyli średnio po upływie $\nu-{}^1/_2$ lat, dla osoby x letniej, ubezpieczonej na kapitał k, jest:

$$(\alpha)\;\left\{\begin{aligned} &\text{Res}\,(x, \nu - {}^1/_2) = \frac{1}{2}\left(r^{x+\nu-1} + r^{x+\nu}\right)k\,.\,\varrho^{x+n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{x+\nu-1}}\right. \\ &\left. + \frac{1}{v_{x+\nu}}\right).\,{}^{n}p_x\,k\,.\,\Sigma v_{x+n} - \frac{R_{x+\nu-1} + R_{x+\nu} - 1}{2}\,.\,{}^{n}p_x\,k\,. \end{aligned}\right.$$

Przypuśćmy teraz, że w rok po osobie x letniej ubezpiecza się osoba $x+1$ letnia na kapitał k' z terminem n' lat. Rezerwa, obliczona dla tej osoby jednocześnie z poprzednią, będzie rezerwą po upływie $\nu-1$ resp. ν—2 lat ubezpieczeniowych, średnio, na d. 31 grudnia, po upływie $\nu-1{}^1/_2$ lat; wyrażeniem na nią będzie:

$$(\beta)\;\left\{\begin{aligned} &\text{Res}\,(x+1, \nu - 1{}^1/_2) = \frac{1}{2}\left(r^{x+\nu-1} + r^{x+\nu}\right).\,k'\,.\,\varrho^{(x+1)+n'} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{x+\nu-1}} + \frac{1}{v_{x+\nu}}\right).\,{}^{n'}p_{x+1}\,k'\,.\,\Sigma v_{(x+1)+n'} \\ &- \frac{R_{x+\nu-1} + R_{x+\nu} - 1}{2}\,.\,{}^{n'}p_{x+1}\,k'\,. \end{aligned}\right.$$

Jeżeli więc wszystkich rówieśników, ubezpieczonych na różne kapitały i na rozmaite terminy, zapisywać będziemy pod tem samem kontem w księdze rezerwowej, to wzorem na zbiorową rezerwę dla wszystkich tych osób, obliczoną na chwilę gdy wszyscy mieć będą średnio $y-{}^1/_2$ lat, jest suma wyrażeń tego rodzaju, jak (α) i (β), czyli:

$$\left\{\begin{aligned} &\text{Res}\left\{\text{dla}\,(y-{}^1/_2)\text{ letnich}\right\} = \frac{1}{2}\left(r^{y-1}+r^y\right).\,\Sigma k\,.\,\varrho^{x+n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{y-1}}\right.\\ &\left.+\frac{1}{r_y}\right).\,\Sigma\left({}^n p_x k\,.\,\Sigma v_{x+n}\right) - \frac{R_{y-1}+R_y-1}{2}\,.\,\Sigma\,{}^n p_x\,k\,. \end{aligned}\right.$$

W wyrażeniu tem $r^{y-1}+r^y$, $\frac{1}{v_{y-1}}+\frac{1}{v_y}$ oraz $\frac{R_{y-1}+R_y-1}{2}$ są wspólne dla wszystkich osób zapisanych pod tem samem kontem i dla nich posiadają towarzystwa odpowiednie tablice. Wyrażenie ${}^n p_x\,.\,k$ stanowi roczną premię netto, wnoszoną przez każdą osobę ubezpieczoną w różnej wysokości; zaś $k\,.\,\varrho^{x+n}$ i ${}^n p_x\,k\,.\,\Sigma v_{x+n}$ stanowią t. zw. liczby pomocnicze, stałe przez cały czas trwania ubezpieczeń, lecz różne dla każdej oddzielnej osoby. Skoro zatem wartość każdej z trzech ostatnio wymienionych wielkości wprowadzimy, zaraz przy zapisywaniu osób ubezpieczonych do księgi rezerwowej, to sumy odnośnych kolumn dadzą nam $\Sigma\,{}^n p_x\,k$; $\Sigma k\,\varrho^{x+n}$ i $\Sigma({}^n p_x\,k\,.\,\Sigma v_{x+n})$, t. j. mieć będziemy wszystkie składowe części wzoru na rezerwę zbiorową, czyli otrzymaliśmy to, o co nam w niniejszej pracy chodziło.

Gdy ubezpieczenie zawiera się za pośrednictwem premii jednorazowej, należy oczywiście za ${}^n p_x$ podstawić zero, co należy uczynić i w takim razie, jeżeli osoba ubezpieczona umiera przed upływem terminu płatności kapitału.