a wykłady metodyczne teoryi krzywych algebraicznych, napisane przed półtora wiekami przez Eulera i Cramera, dowodzą jak dawną jest ta potrzeba. Do tych klasyfikacyj wiek dzisiejszy dorzucił trzy wyborne: jednę analityczną Plückera, drugą, którą nazwać można eklektyczną — Salmona i trzecią półsyntetyczną lub pseudosyntetyczną — Cremony. Elementy wykładu czysto-geometrycznego przygotowali i zebrali R. Paolis i E. Kötter i potrzeba tylko dalszego opracowania, by dojść do pożądanego rezultatu.

Czego brak jeszcze zupełnie — to teoryi krzywych niealgebraicznych, obejmującej, jeżeli nie wszystkie krzywe przestępne, to przynajmniej znaczną ich liczbę wraz z innemi analogicznemi (np. wszystkie krzywe, przedstawione przez równanie $y =$ funkcyi całkowitej przestępnej zmiennej x). Niektóre twierdzenia, podane świeżo przez Schoutego („L'Intermédiaire des mathématiciens" II, str. 7) są może pierwszemi próbami tego rodzaju. Oby wiek XX dodał inne twierdzenia jeszcze ważniejsze, i oby teorya krzywych przestępnych nie pozostała jak dzisiaj życzeniem niespełnionem!

O PEWNEM TWIERDZENIU STOKESA

napisał

Wł. Gosiewski.

Twierdzenie Stokesa, które tu mamy na myśli, polega na przekształceniu pewnej całki pojedyńczej po obwodzie zamkniętym, płaskim lub co najwyżej podwójnie krzywym, na całkę podwójną po powierzchni tym obwodem ograniczonej, a zresztą dowolnej; w artykule zaś niniejszym zamierzamy to twierdzenie uogólnić, t. j. wyrazić je w przypadku, gdy obwód zamknięty jest wielokrotnie krzywym.

Oznaczmy w tym celu przez $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ogólnic X_i, n funkcyj jednowartościowych punktu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ w spółrzędnych prostokątnych i rozważajmy całkę

$$(1) \qquad I = \int_s \sum_i X_i \, dx_i \, ,$$

wziętą po obwodzie zamkniętym s, w ogóle $n-1$ krotnie krzywym.

Gdy przechodzimy od obwodu s do obwodu nieskończenie sąsiedniego $s + \delta s$, całka I doznaje waryacyi

$$(2) \qquad \delta I = \int_s \sum_i (\delta X_i \, . \, dx_i + X_i \, . \, d\delta x_i) \, ;$$

albo raczej, ponieważ obwód s jest zamknięty:

$$(3) \qquad \delta I = \int_s \sum_i (\delta X_i \, . \, dx_i - dX_i \, . \, \delta x_i) \, ,$$

gdzie:

$$(4) \qquad \delta X_i = \sum_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \delta x_j \, ,$$

$$(5) \qquad dX_i = \sum_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \, .$$

Na mocy zatem (4) i (5), wyrażenie (3) przyjmuje postać:

$$(6) \qquad \delta I = \int_s \sum_i \sum_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} (dx_i \, \delta x_j - dx_j \, \delta x_i) \, ,$$

lub także

$$(7) \qquad \delta I = \int_s \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) (dx_i \, \delta x_j - dx_j \, \delta x_i) \, .$$

Wyznacznik $dx_i \, \delta x_j - dx_j \, \delta x_i$ wyobraża rzut na płaszczyznę spółrzędnych x_i, x_j, pola równoległoboku nieskończenie małego, mającego za boki, wychodzące z jego wierzchołka najbliższego początkowi spółrzędnych, wektory $(dx_1 \, dx_2 \, \ldots \, dx_n)$ i $(\delta x_1 \, \delta x_2 \, \ldots \, \delta x_n)$, z których pierwszy jest elementem obwodu s, a koniec drugiego leży na obwodzie $s + \delta s$.

Strona prawa równania (7) odnosi się przeto do paska nieskończenie wązkiego rozciągłości dwuwymiarowej, ograniczonego obwodami zamkniętemi s i $s + \delta s$. Jeśli więc obie strony tego równania zcałkujemy względem znaku δ, począwszy od obwodu $s = s_0$, któremu, według (1), odpowiada równanie:

$$I_0 = \int_{s_0} \sum_i X_i \, dx_i \,, \tag{8}$$

aż do obwodu $s = s$, któremu odpowiada równanie (1), otrzymamy:

$$I - I_0 = \int\int \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) (dx_i \, \delta x_j - dx_j \, \delta x_i), \tag{9}$$

gdzie całkowanie po prawej rozciąga się do całego pola rozciągłości dwuwymiarowej, ograniczonej dwoma obwodami zamkniętemi s_0 i s.

Owóż, w przypadku gdy obwód zamknięty s_0 ma długość nieskończenie małą, jest oczywiście $I_0 = 0$, a tem samem równanie (9) przywodzi się do równania:

$$I = \int\int \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) (dx_i \, \delta x_j - dx_j \, \delta x_i), \tag{10}$$

w którem, wobec obwodu s_0 znikającego, całkowanie po prawej rozciąga się do całego pola rozciągłości dwuwymiarowej, ograniczonej tylko obwodem zamkniętym s, i które łącznie z równaniem (1) wyraża twierdzenie S t o k e s a w całej ogólności.