wydawnictwa kart (fiches) bibliograficznych [1]) oraz publikacyi „Revue semestrielle“; druga znalazła już zastosowanie w Spisie przedmiotów do 50 tomów poważnego dziennika naukowego (patrz wyżej przypisek str. 197) i pozyska niejako prawo powszechności przez wydawnictwo Encyklopedyi; trzecia wreszcie powołać się będzie mogła na łatwość wprowadzenia jej w związek z ogólną klasyfikacyą wiedzy ludzkiej według układu dziesiętnego. Wobec tych okoliczności, porozumienie się będzie niełatwem. Byłoby ono możliwe tylko wtedy, gdyby komisya międzynarodowa zgodzić się chciała w zasadzie na przyjęcie jednego systemu przynajmniej dla klasyfikacyi bibliograficznej wydawnictw, mających charakter m i ę d z y n a r o d o w y. Dopiero po przyjęciu tej zasady, będzie można wybrać system najdogodniejszy lub najbardziej rozpowszechniony, zaprowadziwszy w nim uprzednio te zmiany, jakie wykazały doświadczenia i krytyka.

G. Loria.

ZARYS ROZWOJU HISTORYCZNEGO TEORYI KRZYWYCH PŁASKICH [2]).

Początki teoryi krzywych płaskich gubią się w mroku czasów: rozważanie ruchu ciał niebieskich i spadku ciał, droga prostoliniowa światła; cień, jaki rzucają ciała nieprzezroczyste, oraz inne tego rodzaju zjawiska zrodziły w umysłach ludzi, umiejących widzieć i pojmować, wyobrażenie linii, jako śladu poruszającego się punktu lub czegoś, co oddziela jednę część powierzchni od innej części przyległej. W samej rzeczy, na ścianach wszystkich da-

[1]) Patrz Wiadomości matematyczne, t I, str. 194—196

[2]) Referat ogłoszony w Pracach 1-go Zjazdu międzynarodowego matematyków, przełożony za zgodą sz. autora. *S. D.*

wnych pomników, szczątków zaginionych cywilizacyi, znajdujemy rysunki krzywych, albo też na podstawie ich postaci wolno przypuszczać, że tych figur używano przy budowie. Nie kuśmy się o wskazanie osoby lub ludu, którym zawdzięczamy pojęcie linii; wielka księga historyi pozostałaby niemą dla każdego, któryby ją o to chciał pytać. Niechaj nam wystarczy uwaga, że u wszystkich ludów, które dosięgły pewnego stopnia rozwoju umysłowego, spotykamy nietylko pojęcia linii prostej i okręgu, ale nadto próby mierzenia długości okręgu oraz pola części płaszczyzny przez nią zamkniętej.

Pewniejszy grunt pod stopami ma już ten, który pragnie dotrzeć do źródeł teoryi stożkowych; M e n a e c h m u s o w i, nauczycielowi Aleksandra Wielkiego, zawdzięczamy odkrycie sławnej trójcy krzywych. Odtąd przez dwadzieścia wieków były one przedmiotem gorliwego i prawie nieustającego badania, które nie zdołało przecież wyczerpać wszystkich ich własności. W jaki sposób doszedł M e n a e c h m u s do stożkowych: czy przecinając stożek prosty kołowy, czy łącząc ślady punktowe w celu rozwiązania zagadnienia o podwojeniu sześcianu? Pewnej odpowiedzi na to niema; lecz tak czy owak geometrya pozyskała metodę, która przy odpowiedniem uogólnieniu prowadzi do wielu krzywych nowych. Metoda ta polega: albo na przecinaniu płaszczyznami znanych powierzchni, albo na ustanawianiu jednoznacznej odpowiedniości pomiędzy krzywą daną a jej rzutem centralnym, albo wreszcie sprowadza się do udowodnienia związku metrycznego, któremu czynią zadość wszystkie punkty krzywej odniesionej do pewnych elementów stałych. Pierwszą z tych metod stosował P e r s e u s, matematyk należący do epoki A p o l l o n i u s a z Pergi; jemu to zawdzięczamy odkrycie krzywych s p e c y a l n y c h. Metoda druga zrodziła sławną klasyfikacyę N e w t o n o w s k ą krzywych trzeciego rzędu i może być uważana za początek całej geometryi rzutowej. Trzecia wreszcie metoda stanowi najodleglejszy zarodek geometryi analitycznej.

Metody te stosuje, rozwija i przekształca już A p o l l o n i u s w wielkiem swem dziele poświęconem stożkowym, lecz nadzwyczajna ich płodność ujawnia się dopiero w wiele wieków po M e n a e c h m u s i e. Nie posługiwali się niemi wprawdzie starożytni geometrowie dla wzbogacenia zbiorów krzywych płaskich, dając raczej pierwszeństwo metodzie cynematycznej. Nie powinno to nas dziwić, gdyż ostatecznie, czyż można określać linie, nie wyłuszczając prawa, rządzącego ruchem punktu tworzącego? Właśnie, składając ruch obrotowy prostej z ruchem postępowym punktu lub prostej, dochodzi się do kwadratycy, którą odkrył Hippias z Elidy [1]), sofista spółczesny Sokratesowi, do spiralnej, wymyślonej przez Archimedesa, do konchojdy Nikomedesa [2]). Ta ostatnia krzywa, jakkolwiek określona przy pomocy ruchu, była pomyślana w celu rozwiązania zagadnień o podwojeniu sześcianu i podziału kąta na trzy równe części; zagadnień, które, jakby widma, budziły ze snu starożytnych geometrów. W podobnym celu utworzona została cysojda Dioklesa, ta krzywa ciekawa, której tworzenie organiczne odkrył później Newton. Należy zauważyć, że wynalezienie cysojdy, podobnież jak i konchojdy, wzbogaciło geometryę wyborną metodą wyprowadzania krzywej z krzywej; metodą której zawdzięczają życie nietylko takie krzywe specyalne, jak ślimakowa Ét. Pascala i kardiojda Castillona, lecz w ogóle całe klasy krzywych cysojdalnych i konchojd. Nadto cysojda i konchojda są pierwszemi elementami długich gromad krzywych, służących do podziału kąta na trzy równe części oraz krzywych do podwajania sześcianu.

Wędrówki ludów, wojny zdobywcze, walki religijne, a następnie prace czystej erudycyi powstrzymują na czas pewien spokojne rozmyślania matematyków i pochłaniają przez piętnaście prawie wieków całkowitą działalność rodzaju ludzkiego. Z tego powodu ziarna, rzucone przez geometrów okresu złotego geometryi greckiej, pozostają bezpłodnemi: dziedzictwo geometryi nietylko trwa w zastoju, lecz doznaje nawet strat poważnych. W epoce bowiem, w której siła brutalna zapanowała nad rozumem, gdy ludzkość

---

[1]) Jest to pierwsza krzywa, pomyślana przy badaniu zagadnienia o kwadraturze koła; z tego samego źródła wypłynęły kwadratyca Tschirnhausena, parabole „przygotowane" Gregoriusa a. S-to Vincentio; znaną jest kwadratyca hyperboli, mająca podobny początek.

[2]) Jest to pierwsza z krzywych, która ze względu na swoją postać otrzymały nazwę konchojd.

zdawała się tracić ów przywilej prawie boski rozumienia wzniosłej nauki oderwanej; w tej epoce zginęły dzieła takie, jak „Miejsca płaskie“ Apolloniusa, „Poryzmy“ Euklidesa i Bóg wie, wiele innych, których tytuły i nazwy autorów nie doszły nas nawet. Przeniesione do Europy przez arabów szczątki wiedzy heleńskiej, uratowane z niezmiernego zalewu, spowodowanego przez panowanie rzymian i najazd barbarzyńców, budzą na Zachodzie uśpionego ducha poszukiwania prawdy. Badanie krzywych rychło występuje na porządek dzienny nauki, dając materyał rozmyślaniom matematyków; przekształca się ono i rozwija nadzwyczajnie, dzięki Descartes'owi i Fermatowi. Metoda spółrzędnych oto czarodziejka, która dokonała tej cudownej przemiany. W rzeczy samej, metoda ta nietylko stwarza jednostajne postępowanie dla symbolicznego przedstawiania wszelkich krzywych, lecz nadto wiedzie do pomysłu ogólnej teoryi krzywych płaskich. Ona to dała narzędzie do tworzenia niezliczonych figur geometrycznych; ona zdemokratyzowała geometryę. Gdy bowiem za dawnego rzeczy porządku najżywsza nawet wyobraźnia posługiwać się musiała środkami bardzo ograniczonemi, to przy nowym stanie rzeczy każdy, kto chciał, mógł badać nowe krzywe, albowiem równanie krzywej jest kryjącą w sobie wszystkie własności krzywej skarbnicą, do której każdy geometra klucz posiada. Od tej chwili badanie krzywej staje się tem samem, co badanie funkcyi; cały postęp analizy odźwierciedla się w postępie geometryi; dwa strumienie, które płynęły dotąd równoległe, łączą się i wytwarzają majestatyczną rzekę: teoryę zmiennych ciągłych. Temu to pamiętnemu zjednoczeniu zawdzięcza życie wiele krzywych ciekawych, jak liść Descartes'a (folium Cartesii), perły Sluzego, parabole i hyperbole rzędu wyższego, spiralne rzędu wyższego i t. d., a także krzywa logarytmowa, sinusojda, krzywa stycznych, krzywa hypergeometryczna Eulera.

Moment ten powstawania teoryi krzywych płaskich jest niezwykle interesujący dla historyka, który może stwierdzić z jednej strony olbrzymią płodność pojedyńczego, bardzo prostego pomysłu, z drugiej zaś wytworzyć sobie pojęcie o licznych i ważnych ulepszeniach, jakich teorya ta następnie doznała. My, władający dziś z taką pewnością tem nowem narzędziem, którem nawet uczniowie nasi posługują się z łatwością już po kilku miesiącach nauki, prawie nie potrafimy wyobrazić sobie tych trudności, jakie stosowanie spółrzędnych sprawiało pierwszym geometrom peryodu kartezyańskiego, ich niepewności w używaniu znaków odciętej i rzędnej, ich obawy przed wielkościami nieskończonemi na x i na y! Historya geometryi przedstawia kilka faktów, świadczących o tym dziwnym stanie rzeczy; warto przytoczyć przynajmniej kilka. Roberval mniemał, że jeden z tytułów jego do sławy stanowiło określenie postaci liścia Descartes'a, a nie widział wcale błędu, jaki popełnił, dodając do zamkniętego pierścienia trzy inne i znosząc gałęzie nieskończone. Descartes dla wprowadzenia w błąd swych przeciwników, każe im wierzyć, że dwie krzywe, przedstawione przez dwa pewne równania różnej postaci, są różnemi. W liście F. de Verdus do Toricelli'ego do strofojdy dołączona jest jej symetryczna, którą autor uważał za konieczne dopełnienie krzywej rozważanej. Nawet w korespondencyi Huygensa z takimi geometrami, jak Leibniz i R. de Sluze, znajdujemy ustępy świadczące, że nie znali oni dobrze postaci niektórych pereł i mieli wątpliwości co do znaku podstycznej. Okoliczności te, o których zaledwie nawiasem mówić tu możemy, przyszły historyk metody spółrzędnych powinien zebrać starannie i zbadać całkowicie.

W epoce Descartes'a i Fermata rozpoczęły też wschodzić nasiona rachunku nieskończonostkowego, rzucone niegdyś przez Archimedesa i przechowane w gruncie bezpłodnym przez setki lat. W tejże epoce teorya pewnych krzywych specyalnych poczyniła ważne postępy, które w języku dzisiejszym określić można, jako wyznaczenie natury analitycznej pewnych funkcyj, napotykanych w geometryi. Istotnie, ten rodzaj poszukiwania doprowadził Pascala do wniosku, że każdy łuk paraboli ma długość równą długości odpowiednio dobranego łuku spiralnej Archimedesa, i odwrotnie. Kilka wierszy rachunku wystarcza dziś do stwierdzenia tej prawdy, lecz jakiejże przenikliwości umysłu trzeba było wówczas do spostrzeżeń tożsamości łuków tak pozornie różnych; zwłaszcza, że zagadnienie o wyprostowywaniu krzywych jest jednem z tych, o które rozbiła się broń dawnych geometrów, jednem z tych, wobec którego sam Archimedes musiał był uznać się za zwyciężonego. Nadspodziewany rezultat, osiągnięty przez autora „Myśli“ (Pensées), zachęcił matematyków do prób wymierzania długości linij nieprostych, a przynajmniej do porównywania wzajemnego linij różnych. Zaraz też po Pascalu Fermat uogólnia twierdzenie powyższe, dowodząc, że każdy łuk paraboli rzędu wyższego równa się odpowiednio dobranemu łukowi jednej z tych spiralnych, które otrzymano, uogólniając określenie spiralnej Archimedesa. Wkrótce potem, prawie jednocześnie i niezależnie francuz Fermat, anglik Neil i holender van Heurat odkryli pierwszą ściśle wyprostowalną krzywą algebraiczną i parabolę półsześcienną [1]). To pamiętne odkrycie doprowadziło później hrabiego Fagnano do innych parabol, gdzie pary łuków mają dającą się wyprostować różnicę, oraz do wielkich badań nad wyprostowaniem elipsy i lemniskaty, stanowiących wspaniały wstęp i doskonałe przygotowanie do teoryi funkcyj eliptycznych. Należy dodać, że liczne poszukiwania krzywych, których rektyfikacya zależy od funkcyj z góry danych, są natury analogicznej; pomiędzy owocami tych badań dość wymienić odkrycie krzywych Serreta i spiralnych sinusojdalnych.

Wskazany przez geometryę kartezyańską sposób otrzymywania nowych krzywych specyalnych nie pozwala dostrzedz bezpośredniego związku pomiędzy postacią równania i wyglądem krzywej, i wogóle tylko z wielkim trudem prowadzi do tworzenia organicznego krzywych. Nie należy przeto dziwić się, że geometra Guido Grandi zajął się badaniem pewnych krzywych (rhodonnées), tylko na podstawie postaci z góry w ogóle znanej, bez wszelkich innych określeń [2]); że niektórzy uczeni wracali do metod starożytnych przy badaniu niektórych krzywych; że inni wre-

---

[1]) Przedtem E. Toricelli zauważył, że spiralna logarytmowa daje się ściśle wyprostować.

[2]) Jakkolwiek pytanie takie jest nieco nieokreślonem, nie mniej jednak jest ono interesującem, gdyż należy do dość rzadkiego typu zagadnienia, na które Comte kładzie nacisk w swojej „Geometryi analitycznej“. Przypadek szczególny tego pytania doprowadził Eulera do odkrycia krzywych trójkątnych i kręgokształtnych (orbiformes); drugi przypadek szczególny prowadzi do trifolium pratense Brocarda i do krzywych botanicznych Habenichta.

szcie powracali do metody cynematycznej. Na stwierdzenie tego zwrotu, dość przytoczyć piękne, za mało dziś studyowane prace Lahire'a, a przedewszystkiem te, których przedmiotem są konchojdy w ogólności. Jako dowód posługiwania się znów metodą cynematyczną, przytaczamy metodę stycznych Robervala i odkrycie niezliczonego szeregu krzywych takich, jak cyklojda ze wszystkiemi krzywemi analogicznemi: epicyklojdami, hypocyklojdami i cykloidami (ruletami) w ogólności (utworzonemi ruchem punktu niezmiennie połączonego z krzywą, toczącą się po krzywej stałej), glisetami (utworzonemi ruchem punktu lub obwiedzionemi przez krzywą, związaną niezmiennie z krzywą, dwoma punktami ślizgającą się na dwu krzywych stałych [1]); do tego dołączyć można pomyślane przez Clairauta krzywe ogólniejsze od spiralnej Archimedesa, t. zw. krzywe ścigania (courbes du chien) i pewne inne mało znane linie (reptoires) Jana Bernoulliego, utworzone ruchem krzywej, przemieszczającej się równolegle do siebie samej i stałe stycznej do innej krzywej danej.

Te poszukiwania doprowadziły bezpośrednio do nowych wniosków i do nowych badań, mających dziś wybitne znaczenie w dziejach nauki geometrycznej. Pomijając niezliczone twierdzenia, które uprawiający analizę stosowaną do geometryi ustanowili o stycznych, rachunku pól i mierze długości, twierdzenia, które pięknością godne są stanąć obok twierdzeń, jakie zapewniły Archimedesowi nieśmiertelną sławę i są niestety zapomniane przez współczesnych nam, nie umiejących pomyśleć równie pięknych, pomijając, powtarzamy, szczegóły, wspomnę o pewnej kategoryi badań zupełnie nowych. Po odkryciu tautochronizmu cyklojdy i po spostrzeżeniu, że ta krzywa jest zarazem brachystochroną w próżni, starano się znaleść krzywe, które, zamiast pewnych właściwości geometrycznych (tych np. które zawdzięczają swoje istnienie sławnemu zagadnieniu Beaune'a), posiadają pewne własności mechaniczne, dane z góry. Z tego pomysłu zrodziły się zagadnienia o krzywej jednakiego spadku, rozwiązane przy pomocy paraboli półsześciennej, o krzywej sznurowej, rozwiązane

[1]) Jako przykład glisety wybieram krzywą Watta.

przez linię łańcuchową, o krzywej sprężystej, któremu czyni również zadość krzywa „courbe lintéaire", wreszcie zagadnienie leibnizowskie o izochronie paracentrycznej. Nie należy też zapomnieć o pytaniu, prowadzącem do krzywej o stycznych równych („tractrice") i o ogólniejszem przez Jana Bernoulli'ego postawionem zadaniu, któremu czynią zadość krzywe, dziś według B. Peirce'a nazwane toutobarydami i barytropami. Do tych krzywych, które można by nazwać fizyko-matematycznemi, można dołączyć owale Descartes'a, uważane za linie aplanatyczne, owale Cassini'ego, uważane jako pozorne trajektorye gwiazd, łańcuchową równego oporu Coriolisa, krzywe Lissajous'a, konchospiralną, krzywą, którą Cornu i Cesàro nazywają elotojdą, dalej kochleojdę, wreszcie krzywe kaustyczne przy załamaniu i odbiciu.

W tem miejscu należy zauważyć, że metoda spółrzędnych nietylko prowadzi wprost do nieskończonej mnogości krzywych specyalnych, lecz nadto daje sposób przekształcania krzywej na inną. Sposób ten, pomyślany przez Varignona, polega poprostu na przemianie w równaniu dekartowskiem krzywej zmiennych na spółrzędne biegunowe. Zastosowanie tego prostego sposobu daje początek (że przytoczę tu krzywe najbardziej znane) spiralnej logarytmowej, spiralnej hyperbolicznej i spiralnej parabolicznej.

Metoda Descartes'a i Fermata, mimo swej niezaprzeczonej użyteczności, ma też niewątpliwe niedogodności. Pierwsza niedogodność tkwi w konieczności rozważania stale osi spółrzędnych, t. j. elementów obcych i często kłopotliwych. Już w końcu poprzedniego stulecia starano się tej niedogodności zaradzić. Lacroix w przedmowie do swego wielkiego „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" (Paryż 1797) pisał (str. XXV): „Usuwając starannie wszelkie konstrukcye geometryczne, chciałem dać poczuć czytelnikowi, że istnieje metoda rozważania geometryi, którą możnaby nazwać analityczną, a która polega na wyprowadzeniu własności rozciągłości z najmniejszej liczby zasad przy pomocy metod czysto-analitycznych, jak to uczynił w „Mechanice" swej Lagrange dla własności równowagi i ruchu". To dążenie w geometryi, któremu hołdowali tacy mistrze, jak Hesse i Clebsch, doprowadziło do utożsamienia badania krzywych z teoryą algebraicznych form trójkowych; temu to dążeniu zawdzięczamy prawie całą nowoczesną teoryę ogólną krzywych algebraicznych, a nawet teoryę pewnych krzywych specyalnych (np. krzywych stopnia 4-go Clebscha — Lürotha, Brioschi'ego i Caporali'ego). Nie ma zatem potrzeby zatrzymywać się tu nad jej znakomitemi zaletami. Zupełne wszakże zalgebraizowanie geometryi nie zadawala pragnienia by wyzwolić się z pod ciągłego rozważania osi spółrzędnych i módz posiąść taką geometryę analityczną, która operuje wyłącznie na elementach samych krzywych. Leibniz usiłował to uczynić za pomocą swej „Caracteristica geometrica", lecz dopiero Grassmann spełnił to w swym dziś tak znanym „Rachunku geometrycznym", rozwinąwszy i wydoskonaliwszy niejasne pomysły spółzawodnika Newtona. Ten sam cel stawiali sobie wszyscy usiłujący przedstawiać krzywą za pomocą równania, które nie zawierając w sobie nic sztucznego, obejmuje tylko elementy, zależne od natury samej krzywej, a więc łuk, promień krzywizny krzywej i jej rozwiniętej. Początki tej metody są bardzo dawne: istotnie Lacroix, już w roku 1798, wyłożywszy pewne zastosowanie, które zawdzięczamy Eulerowi, zauważył, że „ten sposób przedstawiania równania krzywej jest godny uwagi z tego względu, iż używa jedynie wielkości, tkwiących bezwzględnie w krzywej uważanej, pozostawiając tylko do woli wybór pierwszego punktu (Traité du Calcul différ. t. II, str. 392). Tenże sposób znajduje się w pracy: „Essai sur une nouvelle théorie des courbes, déduite de la considération de leurs rayons de courbure succesifs" (Lille 1829), oraz w dwu dziełach, ogłoszonych w 1835 roku, jednem A. Petersa, drugie C. C. F Krausego. Lecz dzieła te miały tak małe powodzenie, iż można powiedzieć, że wpadłyby w zupełną niepamięć, gdyby Plücker nie wspomniał był o nich w swojej „Theorie der algebraischen Kurven" (Bonn 1839, str. 206). Na daleko wyższym poziomie znajdują się analogiczne badania M. H. Onnera; nie osiągnęły one należnego im wpływu jedynie z powodu małego rozpowszechnienia dzienników, w których zostały ogłoszone. Geometrą, któremu nowa metoda geometryi analitycznej zawdzięcza prawa, zapewniające jej prawidłowe funkcyonowanie, jest Cesàro; on to poświęcił tej gałęzi geometryi ogólnej, którą dziś nazywamy geometryą wewnętrzną (intrinséque), wielką liczbę oddzielnych artykułów i osobne wyborne dzieło. Uważaliśmy za właściwe zatrzymać się na chwilę nad fazami rozwoju tego nowego punktu widzenia w geometryi analitycznej, dlatego, że daje on nową metodę, przypominającą sposób Varignona w dochodzeniu do nowych krzywych i polegającą wprost na podstawieniu spółrzędnych „wewnętrznych", za spółrzędne dekartowskie lub biegunowe w równaniu krzywej. Dodamy jeszcze, że bardzo często po otrzymaniu równania „wewnętrznego" krzywej dochodziło się do uogólnień, do których bardzo trudno byłoby dojść na innej drodze. Tym sposobem otrzymano kardiojdy gwiaździste i pseudocyklojdy, krzywe, zwane „pseudo-tractrices" i pseudo-łańcuchowemi.

Jeżeli do tych procesów twórczych lub uogólniających natury zasadniczo-analitycznej dołączymy proces, polegający na stosowaniu do krzywej danej znanego przekształcenia geometrycznego [1]), mającego za podstawę badanie krzywych, odpowiadających samym sobie w przekształceniu danem (krzywe trójkątne, krzywe autopolarne, krzywe W. Kleina i Lie'go, krzywe analagmatyczne i t. d.), wreszcie proces, wypływający z przedstawienia analitycznego liczb zespolonych (krzywe mające środek, krzywe „rhiziques", stelojdy, kasynojdy stopnia wyższego i t. d.), to wyczerpiemy już wyliczenie wielkich dróg, które przebiegli uczeni, wzbogacający zbiory krzywych specyalnych. Drogami tam mogą pójść nawet i dzisiaj ich naśladowcy.

Lecz zwiększający się niemal z dniem każdym zasób i rozmaitość tych elementów rodzi i potęguje coraz bardziej życzenie zaprowadzenia w nim pewnego ładu oraz coraz bardziej naglącą potrzebę poddania go pod prawa ogólne. Klasyfikacye dotąd jeszcze klasyczne krzywych 3 go i 4-go rzędu są próbami tego życzenia,

---

[1]) Pomiędzy temi przekształceniami kładę i te, które ustanawiają odpowiedniość krzywej i jej rozwiniętej, lub krzywej równoległej, spodkowej (podarnej), kaustyki i t. p.: inne metody tworzenia pochodnych prowadzą do krzywych d'Aousta, do aksojd (osiowych) Résala i t. p.

a wykłady metodyczne teoryi krzywych algebraicznych, napisane przed półtora wiekami przez Eulera i Cramera, dowodzą jak dawną jest ta potrzeba. Do tych klasyfikacyj wiek dzisiejszy dorzucił trzy wyborne: jednę analityczną Plückera, drugą, którą nazwać można eklektyczną — Salmona i trzecią półsyntetyczną lub pseudosyntetyczną — Cremony. Elementy wykładu czysto-geometrycznego przygotowali i zebrali R. Paolis i E. Kötter i potrzeba tylko dalszego opracowania, by dojść do pożądanego rezultatu.

Czego brak jeszcze zupełnie — to teoryi krzywych niealgebraicznych, obejmującej, jeżeli nie wszystkie krzywe przestępne, to przynajmniej znaczną ich liczbę wraz z innemi analogicznemi (np. wszystkie krzywe, przedstawione przez równanie $y =$ funkcyi całkowitej przestępnej zmiennej x). Niektóre twierdzenia, podane świeżo przez Schoutego („L'Intermédiaire des mathématiciens" II, str. 7) są może pierwszemi próbami tego rodzaju. Oby wiek XX dodał inne twierdzenia jeszcze ważniejsze, i oby teorya krzywych przestępnych nie pozostała jak dzisiaj życzeniem niespełnionem!

O PEWNEM TWIERDZENIU STOKESA

napisał

Wł. Gosiewski.

Twierdzenie Stokesa, które tu mamy na myśli, polega na przekształceniu pewnej całki pojedyńczej po obwodzie zamkniętym, płaskim lub co najwyżej podwójnie krzywym, na całkę podwójną po powierzchni tym obwodem ograniczonej, a zresztą dowolnej; w artykule zaś niniejszym zamierzamy to twierdzenie uogólnić, t. j. wyrazić je w przypadku, gdy obwód zamknięty jest wielokrotnie krzywym.

Oznaczmy w tym celu przez $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ogólnic X_i, n funkcyj jednowartościowych punktu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ w spółrzędnych prostokątnych i rozważajmy całkę