ego (1820—1827), Lorda Rosse (1848—1854), Sir. G Airy'ego (1871—1873), Spottiswoode'a (1878—1883), T. H. Huxley'a (1883—1885), Sir G. G. Stokes'a (1885—1890), lorda Kelvina (1890—1895), Lorda Lister (od 1895). Sekretarzem (1885—1896) był lord Rayleigh. Medal im. Copley'a otrzymali: Regnault (1869), Joule (1870), J. R. Mayer (1871), Wöhler (1872), Helmholtz (1873), Pasteur (1874), Hoffmann (1875), Clausius (1879), Sylvester (1880), Würtz (1881), Cayley (1882), Kelvin (1883), Kékulé (1885), F. Neumann (1886), Salmon (1889), Newcomb (1890), Cannizaro (1891), Stokes (1893), Weierstrass (1895). Te nazwiska mówią tyle, że nic do nich dodawać niema potrzeby.

Medal imienia Sylvestera. Dla uczczenia pamięci i zasług naukowych zmarłego w roku zeszłym matematyka angielskiego Sylvestera [1]), utworzoną zostanie fundacya medalu jego imienia, której celem jest zachęta do badań matematycznych. Nad urzeczywistnieniem tego projektu pracuje Komitet międzynarodowy którego członkami są: Hermite, Poincaré, Jordan i Darboux we Francyi; Schwarz, Klein, Fuchs, Gordan i Lindemann w Niemczech, Brioschi (zmarł 13 grudnia r. z [2]) i Cremona we Włoszech; Mittag-Leffler w Szwecyi; Lord Kelvin, Tait, Mac-Mahon, Forsyth, Greenhill i Henrici w Anglii; Newcomb i Gibbs w Ameryce. Skarbnikiem jest lord Rothschild, sekretarzem Meldola.

Zebrano już podpisów na 15000 fr. Towarzystwo królewskie w Londynie zarządzać będzie fundacyą. Jest zamiar przyznawania co trzy lata medalu za prace matematyczne autorom bez różnicy narodowości.

ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA 6-go,

podanego przez

księdza Al. Dąbrowskiego (Kowno) [3]).

Rozwiązanie Autora. Aby znaleść równanie krzywej szukanej, oznaczmy spółrzędne punktu ε (Fig. 1) względem osi KL i LX odpowiednio przez x_1, y_1, spółrzędne tegu punktu względem osi EU i $U\Omega$ przez x_2, y_2; będzie wtedy na mocy znanego twierdzenia geometrycznego:

---

[1]) Patrz „Wiadomości matematyczne“, t. I, 1897, str. 176—177.
[2]) Patrz „Wiadomości matematyczne“, t. II, 1898, str. 66—67.
[3]) Patrz „Wiadomości matematyczne“. T. II, str. 73.

$$y_1^2 = x_1 (2 R_1 - x_1), \quad y_2^2 = x_2 (2 R_1 - x_2),$$

stąd rugując R_1, otrzymamy równanie:

$$(1) \qquad \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1} = \frac{x_2^2 + y_2^2}{x_2}.$$

Wyobraźmy sobie przez punkt U poprowadzoną prostą, prostopadłą do prostej UX, i oznaczmy spółrzędne punktu ε względem tych dwóch prostych, jako osi spółrzędnych, przez x, y.

Zależność pomiędzy spółrzędnemi x_2, y_2 a x, y wyraża się, jak wiadomo, za pomocą wzorów:

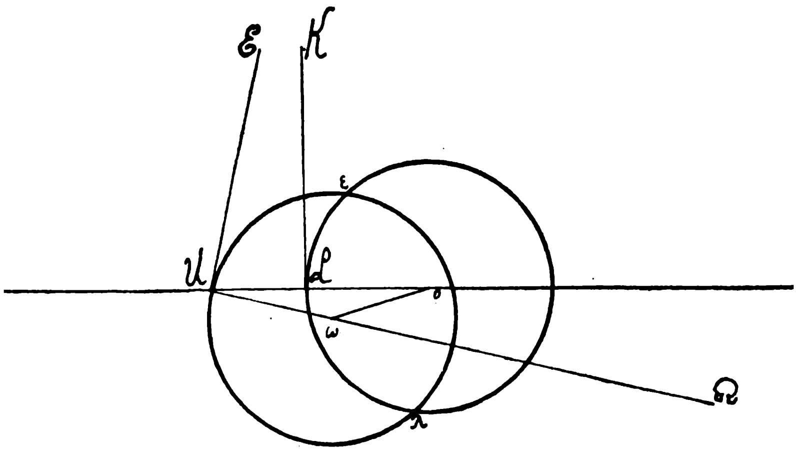


Fig. 1.

$$x_2 = x \sin \vartheta - y \cos \vartheta$$
$$y_2 = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta.$$

ϑ jest kąt EUX; zależność zaś między spółrzędnemi x_1, y_1 a x, y wyraża się tak:

$$y = y_1; \quad x = a + x_1;$$

skąd

$$x_1 = x - a.$$

Zastępując we wzorze (1) spółrzędne x_1, y_1 i x_2, y_2 powyższemi ich wartościami, wyrażonemi za pomocą spółrzędnych x, y, otrzymamy równanie krzywej szukanej:

(2) $$\frac{(x-a)^2+y^2}{x-a} = \frac{x^2+y^2}{x\sin\vartheta - y\cos\vartheta}$$

albo w spółrzędnych biegunowych:

(3) $$\frac{\rho^2-2\rho\cos\omega+\alpha^2}{\rho\cos\omega-\alpha} = \frac{\rho}{\sin(\vartheta-\omega)}\ .$$

Z równania (2), redukującego się do równania 3-go stopnia, widzimy, iż krzywa szukana jest 3-go stopnia.

Krzywa ta składa się z dwóch rozchodzących się w nieskończoność gałęzi z wygięciem w pośrodku jak to widać na figurze 2-iej

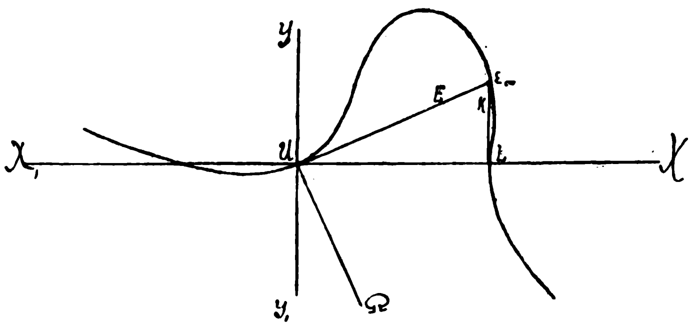


Fig. 2.

Przy $\vartheta = 0$ równanie przyjmie postać:

$$x^3 + x(x+y)(y-a) - ay(x+y-a) + y^3 = 0\ ;$$

krzywa będzie miała kształt jak na figurze 3-ej.

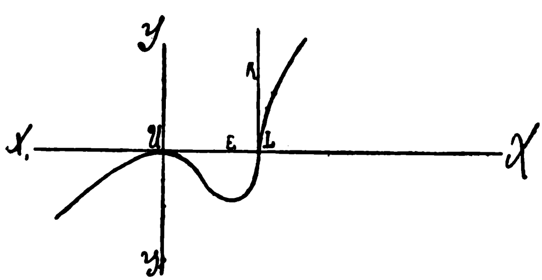


Fig. 3.

Przy $\vartheta = 90^0$ równanie zniża się o jeden stopień i przekształca się na równanie hyperboli:

(4) $$y^2 = x(x - a).$$

Nadając tu na x wartości dodatnie od $+a$ do $+\infty$ i ujemne od 0 do $-\infty$, otrzymamy dwie rozchodzące się w nieskończoność gałęzie tej krzywej Gałęź pierwsza, odpowiadająca wartościom dodatnim x będzie styczną do prostej KL w punkcie L; gałęź druga, odpowiadająca wartościom ujemnym x będzie styczną do prostej EU w punkcie U.

W końcu zakładając, że ϑ jest stałem, a zmiennem, znajdziemy, iż w miarę zbliżania się a do zera, krzywa będzie się wyprostowywała coraz bardziej i przy $a = 0$ całkiem się przekształci na prostą, przechodzącą przez początek spółrzędnych. Jakoż, czyniąc w równaniu (5) $a = 0$, mamy:

$$x \sin\vartheta - y \cos\vartheta = x,$$

skąd:

$$y = -\frac{x(1-\sin\vartheta)}{\cos\vartheta} = -x \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\vartheta}{2}\right).$$

Jeżeli przytem i $\vartheta = 0$, otrzymujemy równanie:

$$y = -x.$$

Koła styczne do prostych EU i KL jak widzimy na fig. 1, stykają się z temi prostemi z prawej strony. Lecz można też oczywiście nakreślić podobne koła styczne do tych samych prostych i w tychże samych punktach ze strony przeciwnej — lewej. Przy uwzględnieniu podwójnego położenia powyższych kół, jeżeli promień łuku $L\varepsilon$, należącego do koła, stycznego do prostej KL w punkcie L z prawej strony, oznaczymy przez $+R$, to promień łuku $L\eta$, należącego do koła, stycznego do tejże prostej, w tymże samym punkcie L, tylko ze strony przeciwnej lewej, wypadnie oznaczyć przez $-R$. W podobnyż sposób promienie łuków $U\varepsilon$, $U\eta$ oznaczmy przez $+r$, $-r$. Łuki $L\varepsilon$, $L\eta$ i $U\varepsilon$, $U\eta$, przecinając się wzajemnie, wyznaczą trzy punkty: ε, e i η (fig. 6).

Punkt ε wykreśla się łukami $L\varepsilon$, $U\varepsilon$ o promieniach $+R$, $+r$
„ e „ „ $L\eta$, $U\varepsilon$ „ $-R$, $+r$
„ η „ „ $L\eta$, $U\eta$ „ $-R$, $-r$,

Przy promieniu dosyć wielkim można otrzymać też czwarty punkt ϑ z przecięcia się łuków $L\varepsilon$, $U\eta$ o promieniach $+R$, $-r$. Wszystkie te cztery punkta ε, e, η, ϑ, w miarę jak promienie powyższych łuków dążą do ∞, zbliżają się nieograniczenie do punktu ε_∞, jako swej granicy.

Biorąc pod uwagę powyższe rozróżnienie kół i promieni, widzimy iż krzywą można wykreślić dwojakim sposobem:

albo kombinując koła o promieniach $+R$, $+r$ i $-R$, $-r$,
„ „ „ „ $-R$, $+r$ i $+R$, $-r$.

Pierwszym sposobem krzywa nakreśloną jest na fig. 2, mianowicie — gałęź prawa do punktu ε_∞ przez kombinacyę kół o promieniach $+R$, $+r$, reszta zaś krzywej od punktu ε_∞ w lewo — za pomocą kół o promieniach $-R$, $-r$.

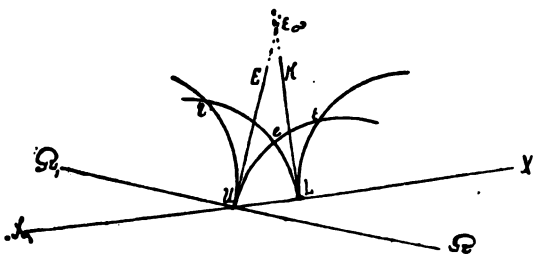


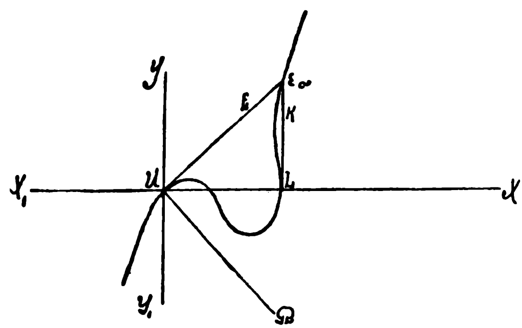
Fig. 4.

Z podobnąż łatwością wykreśla się też krzywa sposobem drugim. Jej równanie:

$$\frac{(a-x)^2+y^2}{a-x} = \frac{x^2+y^2}{x\sin\vartheta - y\cos\vartheta} \tag{5}$$

otrzymuje się drogą wskazaną, albo wprost z równania (2) zastępując w niem wyraz $+(x-a)$ przez $-(x-a) = a-x$.

Postać krzywej, określonej tem równaniem (5), będzie następująca:



Eig 5.

Przy $\vartheta = 90^0$ równanie (5) rozpada się na dwa:

$$2x - a = 0;$$

skąd

$$x = \frac{a}{2}$$

i

$$y^2 = x\,(a - x)\,.$$

Pierwsze jest równaniem prostej, przechodzącej przez środek linii $UL = a$, i równoległej do osi y, drugie jest równaniem koła o promieniu $= \frac{a}{2}$.

W końcu przy $a = 0$ otrzymujemy:

$$y = \frac{x\,(1 + \sin \vartheta)}{\cos \vartheta} = x \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\vartheta}{2}\right),$$

a gdy przytem $\vartheta = 0$, równanie redukuje się do:

$$y = x\,.$$

W tym przypadku krzywa przekształca się na prostą, przechodzącą przez początek spółrzędnych pod kątem 45^0 względem osi x.

Rozwiązanie p. M. F e l d b l u m a. Niech LX będzie oś x, a LK — oś y układu spółrzędnych (fig. 1); w innym układzie niech $U\Omega$ będzie osią x', a UE — osią y'.

Równanie koła o w pierwszym układzie spółrzędnych jest:

(1) $$x^2 + y^2 = 2\,Rx\,,$$

zaś równania koła ω w drugim układzie jest:

$$x'^2 + y'^2 = 2\,Rx'\,.$$

Aby równanie koła ω odnieść do poprzedniego układu spółrzędnych, kładziemy:

$$x' = (a + x)\sin\vartheta - y\cos\vartheta$$

$$y' = (a + x)\cos\vartheta + y\sin\vartheta\,,$$

wtedy równanie koła ω przyjmie kształt:

(2) $$(a + x)^2 + y^2 = 2R\,[a + x)\sin\vartheta - y\cos\vartheta]\,.$$

Równania (1) i (2) mają oczywiście tylko dwie pary pierwiastków, które są spółrzędnemi punktów ε i λ; aby otrzymać równanie miejsca geometrycznego tych punktów, należy z równań (1) i (2) wyrugować zmienny promień R: znajdziemy wtedy:

$$\frac{(a+x)^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{(a+x)\sin\vartheta - y\cos\vartheta}{x} .$$

Równanie to przedstawia krzywą 3-go rzędu. Jeżeli sprowadzimy je do kształtu:

$$(x^2 + y^2)\,[(1 - \sin\vartheta)\,x + \cos\vartheta\,.\,y] + a\,[2\,x^2 - \sin\vartheta\,(x^2 + y^2)] + a^2x = \vartheta ,$$

to spostrzeżemy, że krzywa ta przechodzi przez urojone punkty kołowe w nieskończoności, oraz posiada asymptotę rzeczywistą, tworzącą z kierunkiem X, X kąt φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1-\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right),$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} .$$

Poniżej określimy czysto geometrycznie charakter krzywej szukanej.

Jeżeli pewien punkt ruchomy M znajduje się w jakiemś swem położeniu na tej krzywej, to wyznaczywszy na prostych LX, $U\Omega$ punkty P i Q takie, że $MP=LP$ i $MQ=UQ$, mieć będziemy $LP=UQ$ (fig. 6). Zbadajmy w ilu punktach dowolna prosta m przecina krzywą szukaną (nazwijmy ją dla krótkości krzywą k). Niech powyższy punkt M przebiega prostą m; dla każdego położenia punktu M na prostej m wyznaczajmy, jak wskazaliśmy, punkt P na prostej X, X i punkt Q na prostej $U\Omega$ (będziemy te proste nazywali odpowiednio przez p i q); w ogólności nie będzie przytem $LP = UP$; równość ta zachodzi tylko dla tych położeń punktu M na prostej m, w których ta prosta przecina krzywą k. Gdy punkt M przebieży całą prostą m, otrzymamy na prostych p i q dwa szeregi punktów. Wykażemy, że te dwa szeregi punktów są utworzone przez przecięcie prostych, na których się szeregi te znajdują (p resp. q), odpowiednio z dwoma pękami promieni 2-go rzędu, stycznych do parabol. Prowadźmy w tym celu z punktu L promienie do punktów szeregu m; otrzymamy pęk promieni (Lm), perspektywiczny z tym szeregiem; przetnijmy pęk Lm prostą m', równoległą do prostej m i jednakowo oddaloną od niej i od punktu L; prosta m' przetnie każdy z promieni pęku Lm pośrodku, na prostej m' zaś otrzymamy szereg punktów M', również perspektywiczny z pękiem Lm, albo Lm'. W każdym punkcie M' wykreślmy prostopadłą do odpowiedniego promienia pęku; ta prostopadła przetnie prostą p w odpowiednim punkcie P. Wszystkie tak wykreślone prostopadłe są styczne do pewnej paraboli α. (Dowodzi się bowiem w geometryi rzutowej, że prostopadłe, spuszczone z punktów szeregu prostoliniowego na odpowiednie promienie jakiegokolwiek rzutowego z nim pęku 1-go rzędu, tworzą pęk promieni 2-go rzędu, stycznych do pewnej paraboli). Tak samo punkty Q otrzymują się w przecięciu prostej q z promieniami pęku 2-go rzędu, stycznemi do pewnej paraboli β. Pęki α, β są rzutowe odpowiednio z pękami Lm, Um, a ponieważ ostatnie dwa pęki są perspektywiczne, to pęki α i β są wzajemnie rzutowe.

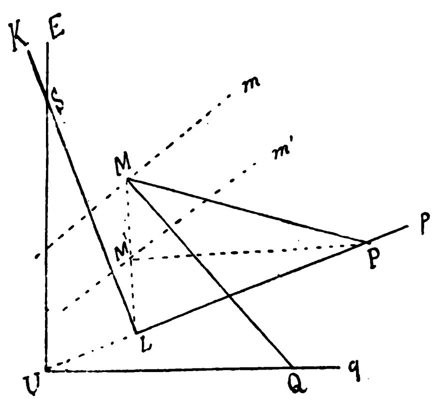


Fig. 6.

Ileż jest położeń punktu M na prostej m, którym odpowiadają takie położenia punktów P i Q, iż $LP = UQ$? Aby rozstrzygnąć to pytanie, przekształćmy figurę w sposób następujący. Rozważmy niezmienny w sobie układ; prostych UE, q, m, z szeregami punktów m, q, pękiem 1-go rzędu Um i pękiem 2-go rzędu β. Cały ten układ przesuńmy w jego płaszczyźnie tak, ażeby proste UE i q zeszły się odpowiednio z prostemi LK i p, co do położenia i kierunku. Niech β_1 będzie nowe położenie pęku β. Pęki α i β_1 są więc paraboliczne i rzutowe. Pęk β_1 wyznacza na prostej p szereg punktów Q_1 (który jest nowem położeniem poprzedniego szeregu punktów Q na prostej q). Jeżeli jakiś punkt Q wyznacza na q odcinek UQ równy odcinkowi odpowiedniemu LP, to odpowiedni punkt Q_1 schodzi się z odpowiednim punktem P; pozostaje nam więc oznaczyć, ile odpowiednich punktów wspólnych posiadają szeregi P i Q_1. W geometryi rzutowej dowodzi się. że punkty przecięcia promieni odpowiednich dwóch pęków rzutowych drugiego rzędu tworzą krzywą 4-go stopnia; wnioskujemy stąd, że na prostej p znajdują się 4 punkty, przez które przechodzą pary promieni odpowiednich pęków α i β_1 Łatwo się przekonać (z figury), że nieskończenie odległa prosta, jako wspólny promień pęków α i β_1

(wspólna styczna wszystkich parabol), odpowiada sama sobie podwójnie, a więc jednym z powyżej wzmiankowanych 4-ch punktów jest nieskończenie daleki punkt prostej p, a że punkt przecięcia odpowiednich promieni pęków α i β_1, prostych zlewających się z prostą w nieskończoności, jest nieokreślony, nie możemy przeto z góry orzec, czy punkt w nieskończoności na prostej p odpowiada zadaniu. Z drugiej strony widzimy, że kiedy punkt P jest w nieskończoności, to $R = \infty$, a wówczas koła o i ω przekształcają się odpowiednio na proste LK i UE, których przecięcie S w ogóle nie leży na dowolnie obranej prostej m. A więc, jeżeli prosta m nie przechodzi przez punkt S, to na niej znajdują się 3 położenia punktu M, przy których $LP = UQ$, czyli prosta m, nie przechodząca przez punkt S, przecina krzywą k w trzech punktach. Lecz z łatwością przekonamy się, że jeżeli prosta m przechodzi przez punkt S, to i wtedy przecina krzywą k tylko w trzech punktach; rzeczywiście, w tym razie punkt S, jako należący do prostej UE, po wyżej opisanem przekształceniu figury, zajmie położenie pewne S' na prostej LK; pęki więc Lm i Lm_1 (Lm_1 jest nowem położeniem pęku Um po przekształceniu) mają wspólny promień LK, odpowiednie więc promienie pęków α i β_1 są równoległe do prostej p; w rozpatrywanym więc przypadku punkt w nieskończoności na prostej p leży nie tylko na wspólnym promieniu pęków α i β_1 w nieskończoności, lecz i na przecięciu dwóch odpewiednich promieni, znajdujących się na odległości skończonej; punkt więc w nieskończoności na prostej p w tym przypadku odpowiada zadaniu, lecz oprócz tego znajdują się na prostej p jeszcze tylko dwa inne punkty P, zlewające się z odpowiedniemi punktami Q_1. Możemy więc twierdzić, że wszelka prosta przecina krzywą k w 3-ch punktach, krzywa ta jest przeto krzywą 3-go rzędu.

Jeszcze jedno rozwiązanie nadesłał nam p. Z. C...ski z Warszawy.

Дозволено Цензурою, Варшава 1 Іюня 189? г. Druk J. Sikorskiego, Warecka Nr. 14.