Rugując r^2 z równań (20), otrzymamy:

$$(21) \quad 2(a-a')x_0+2(\gamma-\gamma')y_0+2(\varepsilon-\varepsilon')z_0=a^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2 + \varepsilon^2-\zeta^2-(a'^2-\beta'^2+\gamma'^2-\delta'^2+\varepsilon'^2-\zeta'^2)\,.$$

Trzy równania pierwszego stopnia: (19) i (21) wyznaczają zupełnie określone wartości parametrów x_0, y_0, z_0, jeżeli tylko wyznacznik tych równań jest różny od zera, t. j. jeżeli nie spełnia się warunek (8). Każde z równań (20) daje wówczas wartość czwartego parametru r.

O WZORZE KEUCHELA
NA OBLICZANIE REZERWY PREMIOWEJ W UBEZPIECZENIACH ŻYCIOWYCH.

Podał

B. Danielewicz.

Do obliczania rezerwy od ubezpieczeń życiowych używa się wzorów:

$$(1) \qquad \mathrm{Res}\,(\nu) = P_{x+\nu} - {}^{n}p_x \,.\, {}^{n-\nu}R_{x+\nu}\,, \text{ lub}$$

$$(2) \qquad \mathrm{Res}\,(\nu) = ({}^{n-\nu}p_{x+\nu} - {}^{n}p_x)\,.\,{}^{n-\nu}R_{x+\nu}\,^{1)}\,,$$

gdzie x oznacza wiek osoby w chwili zawierania umowy; n czas płacenia premij za dane ubezpieczenie; ν liczbę lat, po upływie której obliczamy rezerwę; $P_{x+\nu}$ premię jednorazową, jaką ubezpieczony musiałby jednokrotnie zapłacić, gdyby zawierał to samo ubezpieczenie w chwili obliczania rezerwy; ${}^{n}p_x$ oznacza premię opłacaną rocznie przez

[1] W niektórych przypadkach $\mathrm{Res}\,(\nu) = 1 - \dfrac{{}^{n-\nu}R_{x+\nu}}{{}^{n}R_x}$.

n lat; ${}^{n-\nu}p_{x+\nu}$ premię roczną, jaką ubezpieczony musiałby opłacać (przez $n-\nu$ lat) za to samo ubezpieczenie, gdyby je zawierał w chwili obliczania rezerwy. Wreszcie ${}^{n-\nu}R_{x+\nu}$ przedstawia wartość jednostki renty czasowej rocznej, płatnej z góry od chwili obliczania rezerwy przez $n-\nu$ lat, t. j. do końca terminu płacenia premij.

Oba te wzory stosują się, bez żadnych zastrzeżeń, do wszystkich przypadków, zarówno ubezpieczania kapitałów jak i renty, w których warunki ubezpieczenia, z biegiem lat, nie ulegają zmianie; stosują się zarówno dla premij rocznych jak i dla jednorazowych, gdyż w tym ostatnim razie ${}^{n}p_{x} = 0$, skutkiem czego rezerwa staje się równą premii jednorazowej $P_{x+\nu}$, jak być istotnie powinno.

Wrazie, jeżeli warunki ubezpieczenia zmieniają się, a więc gdy opłacane premie lub ubezpieczony kapitał resp. renta, z biegiem lat, rosną lub maleją, ubezpieczenie rozkłada się na części składowe niezmienne, do których zastosowawszy te same wzory po szczególe, otrzymujemy wzór złożony — więcej lub mniej skomplikowany, zależnie od warunków ubezpieczenia.

Dla przykładu weźmy np. pod uwagę ubezpieczenie kapitału pośmiertnego rosnącego o premiach rocznych również rosnących.

Wysokość pierwotnie ubezpieczonego kapitału oznaczmy przez b, następnie co lat l kapitał rośnie stopniowo o β_1; β_2; β_3; ... premie zaś, poczynając od ${}^{n}p_x$, wzrastają również co lat l o α_1; α_2; α_3; ... premii pierwotnej.

Wówczas, jeżeli oznaczymy

$$ {}^{n}p_x . (1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m) = A \, , $$

$$ b + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \ldots + \beta_m = B \, , $$

to wyrażeniem na rezerwę po $\nu = ml + a$ latach będzie:

$$ (1') \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Res}\,(\nu) = \left\{ B \, . \, P_{x+\nu} - A \, . \, {}^{n-\nu}R_{x+\nu} \right\} + \dfrac{v_{x+(m+1)l}}{v_{x+\nu}} \, . \\ \left\{ \beta_{m+1} \, . \, P_{x+(m+1)l} - \alpha_{m+1} \, . \, {}^{n}p_x \, . \, {}^{n-(m+1)l}R_{x+(m+1)l} \right\} + \dfrac{v_{x+(m+2)l}}{v_{x+\nu}} \, . \\ \left\{ \beta_{m+2} \, . \, P_{x+(m+2)l} - \alpha_{m+2} \, . \, {}^{n}p_x \, . \, {}^{n-(m+2)l}R_{x+(m+2)l} \right\} + \ldots \, , \end{array} \right. $$

albo, pisząc oddzielnie wyrazy odejmowane,

$$\mathrm{Res}\,(\nu) = B\,.\,P_{x+\nu}$$

$$+\frac{\beta_{m+1}\,.\,v_{x+(m+1)l}\,.\,P_{x+(m+1)l}+\beta_{m+2}\,.\,v_{x+(m+2)l}\,.\,P_{x+(m+2)l}+\ldots}{v_{x+\nu}}$$

$$-\Big(A\,.\,{}^{n-\nu}R_{x+\nu}$$

$$\frac{a_{m+1}\,.\,{}^{n}p_x\,.\,v_{x+(m+1)l}\,{}^{n-(m+1)l}R_{x+(m+1)l}+a_{m+2}\,.\,{}^{n}p_x\,.\,v_{x+(m+2)l}\,.\,{}^{n-(m+2)l}R_{x+(m+}}{v_{x+\nu}}$$

Wrazie, gdyby oprócz tego był jednocześnie ubezpieczony kapitał na dożycie, płatny po upływie n lat, do (1′) resp. (1″) dodaćby tylko należało odpowiednią premię jednorazową o symbolu ${}^{n-\nu}P_{x+\nu}\,(\partial)$, gdzie przez (∂) symbolizujemy kapitał na dożycie.

W ubezpieczeniach ze zwrotem premij zaraz po przedwczesnej śmierci osoby ubezpieczonej, które stanowią właśnie szczególny przypadek ubezpieczeń zmiennych, wyrażenia (1′) i (1″) prowadzą do bardzo prostego wzoru

$$\mathrm{Res}\,(\nu) = \frac{{}^{n}p_x\,(\partial, z)}{{}^{\nu}p_x\,(\partial, z)},$$

gdzie licznik oznacza premię opłacaną, a mianownik premię, jaką ubezpieczony musiałby płacić rocznie za ubezpieczenie 1-ki kapitału na dożycie ze zwrotem premij, gdyby ubezpieczenie było zawarte na ν lat, t. j. na czas, po upływie którego obliczamy rezerwę.

Rozumie się, że wszędzie jest tu mowa o premiach netto.

Owóż w numerze 49 czasopisma „Oesterreichische Versicherungs-Zeitung“ z 1895 r., p. C. Keuchel do powyższych dwóch wzorów dodaje trzeci, istotnie kształtu bardzo interesującego, mianowicie:

(3) $$\mathrm{Res}\,(\nu) = \frac{p_x - {}^{\nu}p_x\,(c)}{{}^{\nu}p_x\,(\partial)},$$

w którym: p_x oznacza premię, rocznie opłacaną za dane ubezpieczenie; ${}^{\nu}p_x\,(c)$ premię roczną za czasowe ubezpieczenie kapitału pośmiertnego, aż do chwili obliczania rezerwy; ${}^{\nu}p_x\,(\partial)$ roczną premię za ubezpieczenie 1-ki kapitału na dożycie z terminem ν letnim.

Wywód wzoru, dla ubezpieczeń pośmiertnych, dokonywa się w sposób następujący:

Gdy przez λ_x oznaczymy liczbę osób ubezpieczonych i żyjących w wieku lat x, przez τ_x liczbę zmarłych w ciągu roku z pośród λ_x osób żyjących na początku tegoż roku, a przez $\varrho = \frac{1}{r}$ czynnik dyskontujący, to, oczywiście, ogólna rezerwa od 1-ki kapitału dla wszystkich osób ubezpieczonych:

po roku wynosi $\lambda_x \,.\, p_x \,.\, r - \tau_x$,

po 2-ch latach $(\lambda_x \,.\, p_x \,.\, r - \tau_x) \,.\, r + \lambda_{x+1} \,.\, p_x \,.\, r - \tau_{x+1} = p_x \,.\, (\lambda_x \,.\, r^2$
$+ \lambda_{x+1} \,.\, r) - (\tau_x \,.\, r + \tau_{x+1})$, i t. d.

Gdy więc, jak poprzednio, przez Res (ν) oznaczymy rezerwę od pojedynczego ubezpieczenia po ν latach, to, ponieważ po ν latach pozostaje przy życiu $\lambda_{x+\nu}$ osób, mamy:

$$\lambda_{x+\nu} \,.\, \mathrm{Res}\,(\nu) = p_x\,(\lambda_x \,.\, r^{\nu} + \lambda_{x+1} \,.\, r^{\nu-1} + \ldots + \lambda_{x+\nu-1} \,.\, r)$$
$$- (\tau_x \,.\, r^{\nu-1} + \tau_{x+1} \,.\, r^{\nu-2} + \ldots + \tau_{x+\nu-1});$$

po podzieleniu obu stron przez $r^{x+\nu}$, a następnie przez $v_{x+\nu}$, wypada:

$$\mathrm{Res}\,(\nu) = \frac{p_x \,.\, (\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}) - (\Sigma m_x - \Sigma m_{x+\nu})}{v_{x+\nu}},$$

skąd:

$$(3) \qquad \mathrm{Res}\,(\nu) = \frac{p_x - \dfrac{\Sigma m_x - \Sigma m_{x+\nu}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}}}{\dfrac{v_{x+\nu}}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+\nu}}} = \frac{p_x - {}^{\nu}p_x(c)}{{}^{\nu}p_x\,(\partial)}.$$

P. Keuchel wyprowadzonemu przez się wzorowi przypisuje kilka donioslego znaczenia zalet, skutkiem czego radzi, aby nim zastąpić obecnie w powszechnem użyciu będący wzór (1).

Przedewszystkiem wzór swój nazywa „uniwersalnym", dając tem do zrozumienia, że się stosuje do wszelkiego rodzaju kombinacyj. Istotnie jest on bardzo ogólny, ale dla niektórych ubezpieczeń nie jest literalny, gdyż za ${}^{\nu}p_x(c)$ należy podstawiać odpowiednio zmodyfikowane premie.

W ubezpieczeniach rent odroczonych i kapitałów na dożycie bez zwrotu premij, potrzeba założyć ${}^{\nu}p_x(c) = 0$, podczas gdy wzór (1) dla rzeczonych ubezpieczeń może być zastosowany bez żadnych zastrzeżeń.

Dla ubezpieczeń z terminem stałym [1]), wzór (1) stosuje się bez zastrzeżeń, gdy tymczasem we wzorze (3) należy za ${}^{\nu}p_x(c)$ podstawić premię roczną za ubezpieczenie kapitału bezwarunkowo płatnego, po n latach, po tych osobach, które w ciągu ν lat zmarły, czyli wzór (3) przybiera postać:

$$\frac{p_x}{{}^{\nu}p_x(\partial)} - \varrho^{n-\nu} \cdot \left(\frac{\lambda_x - \lambda_{x+\nu}}{\lambda_{x+\nu}}\right).$$

W ubezpieczeniach rent i kapitałów na dożycie ze zwrotem premij należy we wzorze (3) założyć ${}^{\nu}p_x(c) = 0$, a przez ${}^{\nu}p_x(\partial)$ rozumieć premie roczne za ubezpieczenie 1-ki kapitału na dożycie również ze zwrotem premij.

Za główną jednak zaletę wzoru (3) uważa p. K. możność stosowania go i do ubezpieczeń o warunkach zmiennych, a więc np. do ubezpieczeń z powiększającemi się premiami i kapitałem.

Posiłkując się zupełnie takiem samem rozumowaniem, jak poprzednio, na rezerwę po $\nu = m \cdot l + a$ latach, dla ubezpieczenia, którego premia roczna zwiększa się co l lat o $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ pierwotnej premii p_x, zaś kapitał o $\beta_1, \beta_2, \beta_3; \ldots$ przy pierwotnym kapitale b, otrzymujemy wyrażenie

$$(3') \left\{ \begin{aligned} \text{Res}(\nu) = {} & \frac{p_x - b \cdot {}^{\nu}p_x(c)}{{}^{\nu}p_x(\partial)} + \frac{\alpha_1 \cdot p_x - \beta_1 \cdot {}^{\nu-l}p_{x+l}(c)}{{}^{\nu-l}p_{x+l}(\partial)} \\ & + \frac{\alpha_2 \cdot p_x - \beta_2 \cdot {}^{\nu-2l}p_{x+2l}(c)}{{}^{\nu-2l}p_{x+2l}(\partial)} + \ldots + \frac{\alpha_m \cdot p_x - \beta_m \cdot {}^{\nu-ml}p_{x+ml}(c)}{{}^{\nu-ml}p_{x+ml}(\partial)}. \end{aligned} \right.$$

---

[1]) Kapitał wypłaca się bezwarunkowo w terminie oznaczonym, bez względu na to, czy ubezpieczony w tym terminie żyje lub nie; naodwrót premie

Porównywając (3′) z (1′) resp. (1″) widzimy, że i pod tym względem wzór (1) nie stoi niżej od wzoru (3); powiedzielibyśmy raczej, że wzór (1) stoi wyżej, w razie bowiem, jeżeli okresy wzrostu premij i kapitału nie są jednakie, albo gdy i one ulegają zmianie, łatwiej jest stosować wzór (1″), aniżeli (3′).

Trzecią wreszcie zaletą wzoru (3), zdaniem p. K., jest okoliczność, iż dla zastosowania go w praktyce potrzeba dwóch tylko tablic raz na zawsze ułożonych, tablicy premij rocznych za czasowe ubezpieczenie kapitałów pośmiertnych oraz tablicy premij rocznych za ubezpieczenie kapitałów na dożycie, podczas gdy wzór (1) wymaga ich więcej, mianowicie wymaga tablicy wartości rent czasowych i tablic premij jednorazowych dla używanych w praktyce kombinacyj.

Na to p. K. Wagner, w numerze 23 „Oersterreichische Versicherungs Zeitung“ z 1896 r., słuszną czyni uwagę, że żadne towarzystwo bez tablic premij jednorazowych i wartości rent czasowych obejść się nie może, bez względu na to, tą czy inną metodą oblicza rezerwy; dla wszystkich zaś towarzystw nieuprawiających ubezpieczeń na dożycie bez zwrotu premij, odnośna tablica jest zbyteczną. My do słów powyższych dodajemy od siebie, iż formowanie tablic pomocniczych, jako praca jednorazowa, w rachunek oceniania praktyczności danego wzoru wchodzić nie powinna, oraz, że dla niektórych kombinacyj (jak to np. widzieliśmy dla ubezpieczeń kapitałów z terminem stałym) wzmiankowane dwie tablice nie wystarczają; wzór zaś (1) jest, według nas, przedewszystkiem dla tego praktyczniejszy od wzoru (3), ponieważ jednocześnie określa istotę rezerwy (jako różnicy pomiędzy wartością zobowiązań instytucyi i wartością zobowiązań osoby ubezpieczonej); oprócz tego mieści w sobie mnożenie nie dzielenie, co dla praktyki ma znaczenie dodatnie.

wnoszą się przez ten sam czas lub do chwili wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej.