Przy 30° C. mamy:

$$v_2 \varrho_2 + v_1 \varrho_1 = 0{,}5\, v\, .\, 0{,}598 + 0{,}5\, v\, .\, 0{,}334 = 0{,}466\, v\, .$$

O PUNKTACH UROJONYCH

napisał

M. Feldblum.

Matematyka nowożytna zawdzięcza swój rozwój znakomity duchowi uogólniania, którego wpływ zauważyć się już daje w tworzeniu pojęć elementów zasadniczych, służących za materyał do badania. Tak w analizie uogólnia się stopniowo pojęcie o liczbie, o funkcyi, o całce określonej; w geometryi rozwija się pojęcie o punktach urojonych i, co za tem idzie, o liniach i powierzchniach urojonych. Gdy jednak w analizie oddawna liczby ujemne, ułamkowe, niewymierne, urojone weszły w użycie powszechne i przestały budzić powątpiewanie co do swego uzasadnienia i użyteczności, w geometryi długo jeszcze, bo do połowy bieżącego stulecia, ograniczano się uporczywie na rozważaniu takich tylko elementów, które mogłyby być uplastycznione naocznie; wszelkie uogólnienie uważano za obce naturze geometryi i wzdragano się przed niem [1]).

Prace Ponceleta i Chasles'a (poniekąd także Steinera) wykazały bezzasadność owego konserwatyzmu w geometryi; w pracach tych rozwinięte są ogólne metody geometryczne; utworzyły one również grunt do systematycznego i ścisłego wprowadzenia do czystej geometryi elementów urojonych; teoryę tych elementów zbudował von Staudt w „Beiträge zur Geometrie der Lage“ (część I,

[1]) Les imaginaires „ont été constamment repoussées du sanctuaire étroit de la Géométrie rationelle“, — mówi Poncelet we wstępie do swego dzieła: „Traité des propriétés projectives des figures“ (1822).

1856), nie posiłkując się zgoła rachunkiem, opierając się tylko na rozważaniach czysto geometrycznych [1]).

Zobaczmy, jak w geometryi określamy punkty urojone.

Weźmy dowolną prostą l i jakąkolwiek krzywą drugiego stopnia k, przecinającą prostą l w dwóch punktach rzeczywistych. Jeżeli na prostej l będziemy wyznaczali punkty sprzężone względem krzywej k, to pary punktów sprzężonych utworzą inwolucyę. Punkty przecięcia prostej l i krzywej k odpowiadają samym sobie, są więc p u n k t a m i p o d w ó j n e m i inwolucyi; środek cięciwy, utworzonej przez prostą l i krzywą k, jest sprzężony, oczywiście, z nieskończenie odległym punktem prostej l i jest przeto ś r o d k i e m inwolucyi; iloczyn odległości środka od dwóch punktów sprzężonych jest stały, dodatni i równy kwadratowi odległości środka od każdego z punktów podwójnych inwolucyi; iloczyn ten zwie się p o t ę g ą inwolucyi. W tym więc przypadku podwójne punkty inwolucyi wyznaczają się w zupełności za pomocą środka i potęgi inwolucyi.

Niech teraz prosta l nie przecina krzywej k. Punkty prostej l, sprzężone względem krzywej k, znowu tworzą inwolucyę; inwolucya ta wszakże różni się od poprzedniej tem, że podczas gdy w poprzedniej dwie pary punktów odpowiednich znajdowały się bądź całkowicie jedna wewnątrz drugiej, bądź całkowicie jedna zewnątrz drugiej, w obecnym przypadku dwie pary punktów odpowiednich leżą tak, że jeden punkt

---

[1]) R e y e, autor znanego dzieła: „Die Geometrie der Lage", tak się wyraża: „L'un des plus grands services qu'ait rendus von S t a u d t c'est d'avoir établi d'une manière purement géométrique la théorie des éléments imaginaires et de l'avoir amenée à un très haut dégré de perfection" (cytujemy według wydania francuskiego). Do uprzystępnienia i rozpowszechnienia pomysłów von S t a u d t a przyczynili się, oprócz R e y e'go, następujący matematycy: L ü r o t h (Math. Annalen VIII, 1875, XI, 1877), S t o l z Math. Annalen IV, 1871), H e n r i J. S t e p h e n S m i t h (Annali di Matematica III (ser. 2), 1869—1870), A u g u s t („Programm der Friedrichs-Realschule", Berlin 1872), H. W i e n e r („Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf den Geraden", Darmstadt 1885), S e g r e (Memorie dell'Academia reale delle Scienze di Torino XXXVIII (ser. 2), 1886, Journal für r. und ang. Mathematik C, 1886). (Cytowane według dzieła G. L o r i a: Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche, wyd. 2-ie, Turyn 1896, str. 14).

pierwszej pary leży między punktami drugiej pary, drugi zaś punkt pierwszej pary leży zewnątrz punktów drugiej pary; inwolucya pierwszego rodzaju nazywa się inwolucyą hyperboliczną, drugiego rodzaju — eliptyczną. W inwolucyi eliptycznej możemy również wyznaczyć środek, który jest sprzężony z punktem w nieskończoności na prostej l, oraz potęgę, która w tym przypadku jest ujemną. Dane, wyznaczające punkty podwójne inwolucyi (środek i potęga), są rzeczywiste, jednakże punkty te w rzeczywistości nie istnieją; gdybyśmy te punkty wyznaczyli analitycznie, to na odległości tych punktów od rzeczywistego środka inwolucyi otrzymalibyśmy wartości urojone zespolone sprzężone; mówimy przeto, że inwolucya eliptyczna posiada dwa punkty podwójne urojone; nazywamy je punktami urojonemi sprzężonemi prostej l. Dla zachowania analogii z poprzednim przypadkiem mówimy, że te punkty urojone są punktami przecięcia prostej l i krzywej k; a więc krzywa drugiego stopnia i linia prosta zawsze mają dwa punkty przecięcia, rzeczywiste albo urojone; środek tych punktów jest zawsze rzeczywisty; kwadrat odległości środka od każdego z tych punktów jest również zawsze rzeczywisty (dodatni albo ujemny).

Ażeby geometrycznie odróżniać punkty urojone sprzężone, rozumujemy w sposób następujący. Jeżeli w inwolucyi hyperbolicznej będziemy rozpatrywali punkty, postępując od jakiegoś punktu A w kierunku do pewnego punktu B, to natrafimy najprzód na jeden z punktów podwójnych (rzeczywistych); postępując od punktu A w kierunku przeciwnym natrafimy na drugi punkt podwójny. Analogicznie więc możemy i w inwolucyi eliptycznej odróżniać jeden punkt podwójny urojony od drugiego przez oznaczenie kierunku, w jakim rozpatrujemy punkty inwolucyi. Von Staudt oznacza na tej zasadzie punkty podwójne urojone inwolucyi eliptycznej $AA_1BB_1\ldots$ przez symbole: ABA_1B_1 (albo: BA_1B_1A, A_1B_1AB, B_1ABA_1) resp. AB_1A_1B (albo: BAB_1A_1, A_1BAB_1, B_1A_1BA).

Punkty przecięcia prostej i powierzchni drugiego stopnia możemy określić, bądź to wyznaczając inwolucyę punktów prostej, sprzężonych względem powierzchni, bądź to przecinając powierzchnię drugiego stopnia dowolną płaszczyzną, przechodzącą przez daną prostą, i wyznaczając punkty wspólne prostej i krzywej drugiego stopnia, otrzymanej w przecięciu. Zawsze linia prosta i powierzchnia drngiego stopnia przecinają się w dwóch punktach (rzeczywistych albo urojonych) z rzeczywistym środkiem i rzeczywistym kwadratem odległości każdego z tych punktów od środka.

Oczywiście, że punkty przecięcia prostej z krzywą lub powierzchnią drugiego stopnia mogą się schodzić w jednym punkcie rzeczywistym; środek inwolucyi jest wtedy w tym samym punkcie, potęga jest równa zeru.

Analitycznie punkty urojone oznaczamy za pomocą spółrzędnych zespolonych; punktom urojonym sprzężonym odpowiadają spółrzędne zespolone sprzężone.

Sposoby oznaczania punktów urojonych w geometryi czystej i analitycznej są zupełnie odpowiadające sobie; albowiem, jeżeli analitycznie będziemy szukali punktów przecięcia prostej z krzywą albo powierzchnią drugiego stopnia, to w samej rzeczy otrzymamy spółrzędne zespolone sprzężone.

Wprowadzenie elementów urojonych do geometryi tak się przyczyniło do jej rozwoju, że zbytecznem by było dowodzić ich znaczenia; wskażemy dla przykładu: powstanie geometrycznej teoryi linij i powierzchni „geometrycznych" (zwanych w geometryi analitycznej „algebraicznemi"), ogólnej teoryi podwójnej styczności krzywych drugiego stopnia (Poncelet), jednolitość w teoryi utworów jednokreślnych (rzutowych), w teoryi inwolucyi i pokrewnych teoryach; następnie — znaczenie koła urojonego w nieskończoności, punktów urojonych kołowych na płaszczyznie, np. dla teoryi układów kół, wreszcie przy badaniu zasad geometryi (patrz np. wykłady F. Kleina: „Nicht-Euklidische Geometrie").

W artykule niniejszym mamy zamiar podać zasadnicze związki geometryczne, istniejące między punktami urojonemi i elementami rzeczywistemi; badamy więc, jak wpływa na rozmieszczenie linij i powierzchni rzeczywistych warunek, aby one posiadały dane punkty urojone, oraz jakim warunkom powinny zadość czynić punkty urojone, aby znajdowały się na danej linii lub powierzchni rzeczywistej. Posiłkujemy się dla dogodności przeważnie metodą analityczną, wszakże dość często uzupełniamy rozumowanie interpretacyą czysto geometryczną.

Nim przejdziemy do związków szczególnych, które głównie mamy na celu, poczynimy jeszcze kilka uwag natury ogólnej.

Jeżeli przy rozwiązywaniu jakiegoś zagadnienia geometrycznego szukamy punktu, wspólnego dwóm powierzchniom albo liniom, to w przypadku, kiedy punkt ten w rzeczywistości nie istnieje, mówimy, że on jest urojony. Skoro napiszemy równania danych linij lub powierzchni i rozwiążemy zagadnienie analitycznie, to otrzymamy w rezultacie spółrzędne zespolone punktu szukanego, i w ten sposób otrzymamy analitycznie liczby zespolone, które tak samo odpowiadają punktom urojonym, jak w ogóle liczby rzeczywiste odpowiadają punktom rzeczywistym. Jeżeli dane linie resp. powierzchnie były algebraicznemi („geometrycznemi"), to szukane spółrzędne będą pierwiastkami równań algebraicznych, a więc będą po dwa sprzężone między sobą (nie potrafimy wszakże oznaczyć, któremu z punktów urojonych sprzężonych odpowiada ten lub ów z pierwiastków sprzężonych równania algebraicznego). Możemy dowieść następującego twierdzenia ogólnego:

P o w i e r z c h n i a a l g e b r a i c z n a d o w o l n e g o r z ę d u, z a w i e r a j ą c y d a n y p u n k t u r o j o n y, m u s i z a w i e r a ć r ó w n i e ż p u n k t u r o j o n y, s p r z ę ż o n y z d a n y m.

Jakoż, niech $F(x, y, z) = 0$ przedstawia równanie powierzchni algebraicznej jakiegokolwiek rzędu w postaci ogólnej. Kładąc w tem równaniu na x, y, z wartości spółrzędnych punktu urojonego:

$$x = \alpha + \beta i,\ y = \gamma + \delta i,\ z = \varepsilon + \zeta i, \tag{1}$$

otrzymamy: $P + iQ = 0$, gdzie P i Q są funkcyami spółczynników równania $F = 0$ i sześciu parametrów: α, β, γ, δ, ε, ζ. Ostatnie równanie rozpada się na dwa następujące:

$$P = 0,\ Q = 0, \tag{2}$$

które są tożsamościami, jeżeli przyjmujemy, że punkt (1) należy do powierzchni $F = 0$. Możemy z łatwością spostrzedz, że P jest sumą algebraiczną wyrazów kształtu $A\beta^m\delta^n\zeta^p$, gdzie A jest funkcyą spółczynników równania $F = 0$ oraz parametrów: α, γ, ε, a liczby całkowite dodatnie m, n, p są takie, że $m + n + p$ jest liczbą całkowitą dodatnią parzystą (albo zerem), Q zaś jest sumą algebraiczną wyrazów takiegoż kształtu, w których jednak suma $m + n + p$ jest liczbą całkowitą dodatnią nieparzystą. Jeżeli tedy w równaniu $F = 0$ damy na x, y, z wartości spółrzędnych punktu urojonego, sprzężonego z punktem (1):

$$x = \alpha - \beta i, \; y = \gamma - \delta i, \; z = \varepsilon - \zeta i,$$

to równanie to przyjmie kształt $P - iQ = 0$ i będzie tożsamością na zasadzie tożsamości (2).

Z dowiedzionego twierdzenia wynika, że krzywa algebraiczna, dowolnego rzędu, płaska albo o krzywiźnie podwójnej, zawierająca punkt urojony dany, musi zawierać punkt urojony, sprzężony z danym.

Dopóki więc mamy do czynienia z liniami i powierzchniami algebraicznemi, powinniśmy brać pod uwagę nie oddzielne punkty urojone, ale pary punktów urojonych sprzężonych.

Z łatwością możemy twierdzenie powyższe stwierdzić geometrycznie dla linij i powierzchni 1-go i 2-go rzędów.

Wyznaczmy na prostej l dwa punkty urojone, jako podwójne punkty inwolucyi. utworzonej na niej przez krzywą drugiego stopnia k (krzywa k i prosta l znajdują się w jednej płaszczyźnie i nie przecinają się w punktach rzeczywistych). Przekonamy się poniżej, że oprócz prostej l, żadna inna prosta nie może przejść przez jakikolwiek z tych dwóch punktów urojonych, czyli, że wszelka prosta, przechodząca przez jeden z tych punktów urojonych, zlewa się zupełnie z prostą l i przechodzi więc przez drugi z tych punktów urojonych. Co się tyczy płaszczyzn, to przekonamy się, że wszelka płaszczyzna, przechodząca przez jeden z powyższych punktów urojonych, zawiera prostą l, a więc i drugi z tych punktów urojonych.

Przypuśćmy, że inna krzywa drugiego stopnia k' przechodzi przez jeden z punktów urojonych sprzężonych, będących punktami przecięcia krzywej k i prostej l. Mamy tedy na prostej l dwie inwolucye eliptyczne z jednym punktem podwójnym (urojonym) wspólnym. Dowiedziemy, że i pozostałe 2 punkty podwójne urojone schodzą się w jednym punkcie (urojonym), tak że każda z krzywych k i k' wyznacza na prostej l jednę i tę samą inwolucyę. W tym celu szukamy pary punktów sprzężonych, wspólnej obydwóm inwolucyom. (Niech punktom a, b odpowiadają w pierwszej inwolucyi punkty A, B, w drugiej — punkty A', B'. Obieramy dowolną krzywą drugiego stopnia, np.

krzywą k, i dowolny jej punkt P łączymy z punktami a, b, A, B, A', B' promieniami Pa, Pb, PA i t. d., które przetną krzywą k odpowiednio w punktach m, n, M, N, M', N'; niech punkt przecięcia prostych mM i nN będzie O, a prostych mM', nN' — O'. Wskutek tego, że obie inwolucye są eliptyczne, punkty m, n, M, N, M', N' tak są rozmieszczone na krzywej k, że punkty O i O' muszą znajdować się wewnątrz krzywej k [1]); prosta OO' przecina tedy krzywą k w dwóch punktach rzeczywistych: Q, Q'; punkty X, X', w których promienie PQ, PQ' przecinają prostą l, są punktami szukanemi: punktowi X odpowiada punkt X' tak w jednej, jak w drugiej inwolucyi). Punkty te X, X' w przypadku, kiedy obie inwolucye są eliptyczne, jak to właśnie mamy, są zawsze rzeczywiste; te dwa punkty są więc harmonicznie podzielone przez punkty podwójne (jakkolwiek urojone) [2]) każdej inwolucyi, a ponieważ dwie te inwolucye mają po jednym punkcie podwójnym wspólnym, więc i pozostałe punkty podwójne schodzą się w jednym punkcie (urojonym), czego też należało dowieść.

Zupełnie identycznem rozumowaniem możemy dowieść własności omawianej i dla powierzchni drugiego stopnia.

L i n i a a l g e b r a i c z n a r z e c z y w i s t a, p ł a s k a a l b o o k r z y w i ź n i e p o d w ó j n e j, z a w i e r a ∞^2 p u n k t ó w u r o j o n y c h, p o w i e r z c h n i a z a ś a l g e b r a i c z n a r z e c z y w i s t a z a w i e r a ∞^4 p u n k t ó w u r o j o n y c h.

Rzeczywiście, jeżeli punkt:

$$x = \alpha + \beta i,\ y = \gamma + \delta i \tag{3}$$

ma należeć do krzywej algebraicznej płaskiej $f(x, y) = 0$, to mamy dwie zależności warunkowe między 4 parametrami: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, tak że dwa z tych parametrów są nieoznaczone.

---

[1]) Czytelnik zechce nakreślić odpowiednią figurę.

[2]) W grupie harmonicznej czterech punktów dwa punkty sprzężone mogą być urojone (są tedy urojone sprzężone), pozostałe dwa muszą wtedy być rzeczywiste. Patrz C h a s l e s: „Traité de géométrie supérieure“ ed. II. 1880, str. 58.

Warunek, aby punkt:

$$(4) \qquad x = \alpha + \beta i, \; y = \gamma + \delta i, \; z = \varepsilon + \zeta i$$

należał do powierzchni algebraicznej $F(x, y, z) = 0$ wyraża się przez dwie zależności między sześciu parametrami: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, tak że z tych sześciu parametrów nieoznaczonemi zostają cztery.

Wreszcie, wyrażając warunek, aby punkt (4) należał do krzywej algebraicznej o podwójnej krzywiźnie:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

otrzymamy 4 zależności między sześciu parametrami, dwa więc z nich mogą przyjmować wartości dowolne.

Jako przypadek szczególny zaznaczymy, że prosta rzeczywista posiada ∞^2 punktów urojonych, płaszczyzna zaś rzeczywista ∞^4 takich punktów.

Ostatni ten wynik możemy z łatwością stwierdzić czysto-geometrycznie.

Obierzmy na prostej dowolne dwa punkty stałe: A i B, i następnie dowolnie wyznaczajmy pary punktów A', B', oznaczając je literami A', B' tak, ażeby para punktów A, A' przecinała parę punktów B, B' (aby to było możliwe, należy dowolną parę punktów A', B' wybierać tak, by obydwa te punkty leżały bądź wewnątrz, bądź zewnątrz odcinka AB). Każda taka para punktów A', B', łącznie z parą stałych punktów A, B wyznacza inwolucyę eliptyczną, w której punktom A, B odpowiadają punkty A', B'; tym sposobem otrzymamy wszystkie możliwe na prostej inwolucye eliptyczne. Każdej z tych inwolucyj odpowiada para punktów urojonych sprzężonych. Dwie różne z tych inwolucyj, np. określone przez pary punktów A', B' i A'', B'', nie mogą dać tych samych punktów urojonych, albowiem miałyby wtedy obydwa punkty podwójne urojone wspólne, i jeżeli np. punkty A' i A'' nie są identyczne, to zarówno punkty A, A'. jakoteż punkty A, A'' byłyby harmonicznie podzielone przez te same dwa punkty urojone, co jest niedorzecznem. Otrzymamy więc na prostej tyle różnych par punktów urojonych sprzężonych, ile inwolucyj eliptycznych otrzymamy w sposób wyżej wskazany; liczba ta jest równa ∞^2.

Na płaszczyznie istnieje ∞^2 prostych, z których każda posiada ∞^2 punktów urojonych, a ponieważ, jak zobaczymy, dwie proste rzeczywiste nie mogą mieć wspólnego punktu urojonego, więc mamy na płaszczyznie rzeczywistej ∞^4 punktów urojonych.

Łatwo też wyznaczyć geometrycznie liczbę punktów urojonych na krzywej drugiego stopnia. Istnieje na płaszczyznie tej krzywej ∞^2 prostych, z których każda przecina krzywą w dwóch punktach urojonych sprzężonych; dwie różne proste nie mogą przecinać krzywej w tym samym punkcie urojonym (miałyby bowiem ten punkt wspólny, co, jak zobaczymy dalej, jest niemożliwe), więc krzywa drugiego stopnia posiada ∞^2 punktów urojonych.

Możnaby też z łatwością stwierdzić geometrycznie, że powierzchnia drugiego stopnia posiada ∞^4 punktów urojonych.

Powoływaliśmy się wyżej na twierdzenie, że d w i e p r o s t e r z e c z y w i s t e n a p ł a s z c z y z n i e n i e m o g ą s i ę p r z e c i n a ć w p u n k c i e u r o j o n y m. Geometrycznie jest to oczywiste, albowiem dwie proste rzeczywiste na płaszczyznie przecinają się w określonym punkcie, znajdującym się bądź na odległości skończonej, bądź w nieskończoności, ale zawsze rzeczywistym; innej alternatywy pomyśleć nie możemy. Stwierdzimy to samo analitycznie.

Jeżeli punkt urojony (3) ma należeć do dwóch prostych rzeczywistych:

$$y = ax + b \,, \quad y = a'x + b' \,,$$

to winno być:

$$\gamma + i\delta = a\alpha + ia\beta + b \,,$$

$$\gamma + i\delta = a'\alpha + ia'\beta + b' \,,$$

czyli:

$$\delta = a\beta \,, \quad \delta = a'\beta \,,$$

$$\gamma = a\alpha + b \,, \quad \gamma = a'\alpha + b' \,;$$

stąd zaś wynika:

$$a = a', \; b = b',$$

tak, że obie proste zlewają się w jednę.

Przez każdy punkt urojony przechodzi jedna (i, na zasadzie poprzedniego, tylko jedna) prosta rzeczywista.

Jeżeli bowiem prosta rzeczywista $y = ax + b$ ma przechodzić przez punkt urojony (3), to musi być spełniony warunek:

$$\gamma + i\delta = a\alpha + ia\beta + b,$$

czyli:

$$\delta = a\beta, \; \gamma = a\alpha + b,$$

skąd otrzymujemy jedyne, zupełnie określone wartości spółczynników a i b:

$$a = \frac{\delta}{\beta}, \; b = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\beta};$$

a więc przez punkt:

$$x = \alpha + i\beta, \; y = \gamma + i\delta$$

przechodzi prosta:

$$\beta y - \delta x = \beta\gamma - \delta\alpha,$$

t. j.

$$\frac{x - \alpha}{\beta} = \frac{y - \gamma}{\delta}. \tag{5}$$

(Geometrycznie wynika przytoczone tu twierdzenie z określenia punktu urojonego i z twierdzenia poprzedniego).

Z równania (5) wyciągamy wniosek następujący:

Prosta rzeczywista, przechodząca przez punkt urojony:

$$x = a + i\beta, \ y = \gamma + i\delta,$$

przy dowolnych wartościach parametrów β i δ przechodzi przez punkt rzeczywisty:

$$x = a, \ y = \gamma.$$

Znajdźmy warunek analityczny aby dwa dane punkty urojone znajdowały się na jednej prostej rzeczywistej.

Przez punkt (3) przechodzi prosta rzeczywista (5); podobnież przez punkt:

$$x = a' + i\beta', \ y = \gamma' + i\delta'$$

przechodzi prosta rzeczywista:

$$\frac{x - a'}{\beta'} = \frac{y - \gamma'}{\delta'};$$

te dwie proste zlewają się w jednę, jeżeli zachodzi zależność:

$$\frac{\beta}{\delta} = \frac{\beta'}{\delta'} = \frac{a' - a}{\gamma' - \gamma}. \tag{6}$$

Przez punkt urojony w przestrzeni przechodzi jedna jedyna prosta rzeczywista.

Załóżmy, że prosta:

$$x = mz + n, \ y = pz + q$$

ma przechodzić przez punkt urojony (4); wówczas otrzymamy:

$$a + i\beta = m\varepsilon + im\zeta + n,$$

$$\gamma + i\delta = p\varepsilon + ip\zeta + q,$$

czyli:

$$\beta = m\zeta\,,\ \delta = p\zeta\,,\ a = m\varepsilon + n\,,\ \gamma = p\varepsilon + q$$

skąd otrzymamy:

$$m = \frac{\beta}{\zeta}\,,\ p = \frac{\delta}{\zeta}\,,\ n = \frac{a\zeta - \beta\varepsilon}{\zeta}\,,\ q = \frac{\gamma\zeta - \delta\varepsilon}{\zeta}\,;$$

a więc prosta wyżej wymieniona jest:

$$\zeta(x - a) = \beta(z - \varepsilon)\,,$$

$$\zeta(y - \gamma) = \delta(z - \varepsilon)\,,$$

t. j.:

$$\frac{x - a}{\beta} = \frac{y - \gamma}{\delta} = \frac{z - \varepsilon}{\zeta}\,. \tag{7}$$

Że przez punkt urojony nie może w przestrzeni przechodzić więcej, jak jedna prosta rzeczywista, można stwierdzić geometrycznie w sposób następujący. Przypuśćmy, że proste l i l' posiadają jeden wspólny punkt urojony, oznaczony na nich za pomocą pewnej powierzchni drugiego stopnia. Biorąc rzuty tych prostych z dowolnego punktu, nie leżącego na prostych l i l', na dowolną płaszczyznę, otrzymamy na tej ostatniej dwie inwolucye eliptyczne punktów, leżące na dwóch różnych prostych i mające jeden podwójny punkt urojony wspólny, co, jak wiemy, jest niemożliwe.

Z kształtu równania (7) wyciągamy wniosek następujący:

Prosta, przechodząca przez punkt urojony:

$$x = a + i\beta\,,\ y = \gamma + i\delta\,,\ z = \varepsilon + i\zeta\,,$$

przy dowolnych wartościach parametrów β, δ, ζ przechodzi przez punkt rzeczywisty:

$$x = a\,,\ y = \gamma\,,\ z = \varepsilon\,.$$

Przez punkt urojony przechodzi ∞^1 płaszczyzn rzeczywistych; wszystkie te płaszczyzny przecinają się wzdłuż jednej linii prostej.

Jakoż, wszelka płaszczyzna, przechodząca przez prostą rzeczywistą, zawierającą dany punkt urojony, musi przechodzić przez tenże punkt, żadna zaś inna płaszczyzna nie może zawierać danego punktu urojonego, albowiem wyznaczałaby ona na każdej z poprzednich płaszczyzn prostą, różną od wymienionej, i mającą z nią dany punkt urojony wspólny, co, jak wyżej stwierdziliśmy, jest niemożliwe.

Inaczej możemy o omawianej własności przekonać się w sposób następujący. Jeżeli analitycznie wyrazimy warunek, aby płaszczyzna przechodziła przez dany punkt urojony (4), to w równaniu płaszczyzny jeden parametr zostanie nieoznaczony, i z łatwością przekonamy się, że przy wszelkich dowolnych wartościach tego parametru równaniu płaszczyzny czynią zadość spółrzędne punktów prostej (7).

Znajdźmy warunek, aby dwa dane punkty urojone znajdowały się na jednej płaszczyznie rzeczywistej.

Oczywiście, że warunek szukany jest identyczny z warunkiem, aby proste rzeczywiste, zawierające dane punkty urojone, przecinały się.

Punkty:

$$x = \alpha + i\beta\,,\ y = \gamma + i\delta\,,\ z = \varepsilon + i\zeta\,,$$

$$x = \alpha' + i\beta'\,,\ y = \gamma' + i\delta'\,,\ z = \varepsilon' + i\zeta'$$

należą odpowiednio do prostych rzeczywistych:

$$\frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{y-\gamma}{\delta} = \frac{z-\varepsilon}{\zeta}\,,$$

$$\frac{x-\alpha'}{\beta'} = \frac{y-\gamma'}{\delta'} = \frac{z-\varepsilon'}{\zeta'}\,.$$

Te dwie proste przecinają się wzajemnie przy istnieniu zależności:

$$\left(\frac{\beta}{\zeta} - \frac{\beta'}{\zeta'}\right)\left(\frac{\gamma\zeta-\delta\varepsilon}{\zeta} - \frac{\gamma'\zeta'-\delta'\varepsilon'}{\zeta'}\right) = \left(\frac{\delta}{\zeta} - \frac{\delta'}{\zeta'}\right)\left(\frac{\alpha\zeta-\beta\varepsilon}{\zeta} - \frac{\alpha'\zeta'-\beta'\varepsilon'}{\zeta'}\right)$$

Warunek ten łatwo sprowadza się do kształtu następującego:

$$
(8)\qquad \begin{vmatrix} \alpha-\alpha', & \gamma-\gamma', & \varepsilon-\varepsilon' \\ \beta, & \delta, & \zeta \\ \beta', & \delta', & \zeta' \end{vmatrix} = 0.
$$

Ten sam rezultat możemy otrzymać jeszcze w sposób następujący. Jeżeli punkty:

$$
(9)\qquad x = \alpha + i\beta,\ y = \gamma + i\delta,\ z = \varepsilon + i\zeta,
$$

$$
(10)\qquad x = \alpha' + i\beta',\ y = \gamma' + i\delta',\ z = \varepsilon' + i\zeta',
$$

należą do płaszczyzny rzeczywistej:

$$
z = ax + by + c,
$$

to mamy zależności:

$$
\varepsilon + i\zeta = a(\alpha + i\beta) + b(\gamma + i\delta) + c
$$

$$
\varepsilon' + i\zeta' = a(\alpha' + i\beta') + b(\gamma' + i\delta') + c,
$$

czyli:

$$
\varepsilon = a\alpha + b\gamma + c;\ \zeta = a\beta + b\delta
$$

$$
\varepsilon' = a\alpha' + b\gamma' + c;\ \zeta' = a\beta' + b\delta'.
$$

Rugując z tych czterech równań: a, b, c, otrzymamy warunek żądany:

$$
\begin{vmatrix} \varepsilon, & \alpha, & \gamma, & 1 \\ \zeta, & \beta, & \delta, & 0 \\ \varepsilon', & \alpha', & \gamma', & 1 \\ \zeta', & \beta', & \delta', & 0 \end{vmatrix} = 0,
$$

czyli:

$$\begin{vmatrix} a-a', & \gamma-\gamma', & \varepsilon-\varepsilon' \\ \beta, & \delta, & \zeta \\ \beta', & \delta', & \zeta' \end{vmatrix} = 0.$$

Znajdźmy jeszcze warunek, aby dwa dane w przestrzeni punkty urojone znajdowały się na jednej prostej rzeczywistej.

Proste:

$$\frac{x-a}{\beta} = \frac{y-\gamma}{\delta} = \frac{z-\varepsilon}{\zeta},$$

$$\frac{x-a'}{\beta'} = \frac{y-\gamma'}{\delta'} = \frac{z-\varepsilon'}{\zeta'},$$

na których znajdują się punkty (9) i (10), zlewają się ze sobą, jeżeli mają miejsce zależności następujące:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\delta}{\delta'} = \frac{\zeta}{\zeta'} \\ \frac{a-a'}{\beta} = \frac{\gamma-\gamma'}{\delta} = \frac{\varepsilon-\varepsilon'}{\zeta} \end{aligned}\right\}.$$

Przez dany na płaszczyznie punkt urojony przechodzi $\infty^{\frac{1}{2}(m+4)(m-1)}$ rzeczywistych krzywych algebraicznych m-go rzędu, gdyż ogólne równanie takiej krzywej zawiera $\frac{1}{2}(m+3)m$ parametrów niezależnych, a warunek, aby krzywa ta przechodziła przez dany punkt urojony, daje dwie zależności między temi parametrami, zupełnie więc nieoznaczonemi zostaje $\frac{m(m+3)}{2} - 2$,

t. j. $\frac{(m+4)(m-1)}{2}$ parametrów. W szczególności, przez dany punkt urojony przechodzi ∞^3 przecięć stożkowych; wśród nich jest ∞^2 parabol. Równanie koła zawiera 3 parametry niezależne, więc przez punkt urojony na płaszczyznie przechodzi ∞^1 okręgów kół. Jakże rozmieszczone są na płaszczyznie te koła?

Jeżeli okrąg:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

przechodzi przez punkt urojony (3), to mamy:

$$(\alpha-x_0+\beta i)^2+(\gamma-y_0+\delta i)^2=r^2\,,$$

skąd otrzymujemy dwa równania:

$$(x_0-\alpha)\beta+(y_0-\gamma)\delta=0\,, \tag{11}$$

$$r^2=(x_0-\alpha)^2+(y_0-\gamma)^2-\beta^2-\delta^2\,. \tag{12}$$

Pierwsze z tych równań wskazuje, że środki kół rozpatrywanego układu znajdują się na linii prostej; prosta ta jest prostopadła do prostej (5), zawierającej dany punkt urojony, i przecina ją w punkcie $x=\alpha$, $y=\gamma$. Równanie (12) wyznacza promień każdego z kół układu.

Dowiedziemy jeszcze następującej własności prostej (5) względem danego układu kół: prosta (5) jest wspólną osią pierwiastną wszystkich kół badanego układu.

Weźmy w tym celu pod uwagę dwa dowolne okręgi kół powyższego układu; niech odpowiadające im parametry będą: x'_0, y'_0, r' i x''_0, y''_0, r''. Równanie osi pierwiastnej tych dwóch kół jest:

$$\begin{aligned}2(x''_0-x'_0)x+2(y''_0-y'_0)y+x'^2_0 \\ +y'^2_0-x''^2_0-y''^2_0-r'^2+r''^2=0\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Lecz parametry dwóch kół wybranych powinny zadość czynić równaniom (11) i (12), otrzymujemy przeto:

$$
(14) \qquad \left.\begin{aligned} r'^2 &= (x'_0 - a)^2 + (y'_0 - \gamma)^2 - \beta^2 - \delta^2 \\ r''^2 &= (x''_0 - a)^2 + (y''_0 - \gamma)^2 - \beta^2 - \delta^2 \end{aligned}\right\},
$$

$$
(15) \qquad \left.\begin{aligned} (x'_0 - a)\beta + (y'_0 - \gamma)\delta = 0 \\ (x''_0 - a)\beta + (y''_0 - \gamma)\delta = 0 \end{aligned}\right\}.
$$

Z równań (14) znajdujemy:

$$
-r'^2 + r''^2 = x''^2_0 - x'^2_0 - 2a(x''_0 - x'_0) + y''^2_0 - y'^2_0 - 2\gamma(y''_0 - y'_0);
$$

kładąc ten wzór na $-r'^2 + r''^2$ w równaniu (13), sprowadzimy równanie osi pierwiastnej do kształtu:

$$
(x''_0 - x'_0)(x - a) + (y''_0 - y'_0)(y - \gamma) = 0 .
$$

Z równań zaś (15) otrzymujemy:

$$
(x''_0 - x'_0)\beta + (y''_0 - y'_0)\delta = 0 ,
$$

tak że równanie osi pierwiastnej przyjmuje kształt:

$$
\frac{x-a}{\beta} = \frac{y-\gamma}{\delta},
$$

i widzimy, że ta oś pierwiastna jest właśnie prostą (5) i nie zależy od parametrów dwóch dowolnie wybranych okręgów układu kół.

Rezultaty, tu otrzymane, łatwo też otrzymać na drodze geometrycznej. Niech na prostej l koło C (oznaczamy tą literą środek koła) wyznacza dwa punkty urojone sprzężone (punkty podwójne odnośnej inwolucyi eliptycznej). Środkiem tych punktów, czyli środkiem inwolucyi jest pewien punkt rzeczywisty M, któremu w inwolucyi odpowiada nieskończenie daleki punkt prostej l; oznaczmy ten nieskończenie odległy punkt przez L_∞, średnica więc CM jest sprzężona ze średnicą CL_∞, skąd wynika, że prosta CM jest prostopadła do prostej l. Jeżeli inne koło C' przechodzi przez jeden z poprzednich punktów urojonych, to ono przechodzi i przez drugi z tych punktów, wyznacza więc na prostej tę samą inwolucyę, a więc znowu $C'M$ jest prostopadła do l. Widzimy więc, że środki wszystkich kół, przechodzących przez dane dwa punkty sprzężone, leżą na jednej linii prostej, prostopadłej do prostej, zawierającej te punkty, oraz że dwie te proste przecinają się w środku inwolucyi eliptycznej, której dane punkty urojone są punktami podwójnemi. Prosta l jest osią pierwiastną wszystkich tych kół, ponieważ przecina je w tych samych dwóch punktach urojonych (jest ich wspólną „sieczną idealną" podług terminologii Ponceleta); posiada ona wszystkie te własności osi pierwiastnych, które nie są zależne od tego, czy punkty przecięcia z okręgami kół są rzeczywiste, czy urojone, a więc np. styczne, poprowadzone z dowolnego punktu prostej l do wszystkich kół układu, mają jednakową długość, biegunowe dowolnego punktu prostej l względem wszystkich kół układu przecinają się w jednym punkcie na tej prostej, i t. p.

Punkt M w rozumowaniu geometrycznem jest identyczny z punktem:

$$x = a , \; y = \gamma$$

w rozumowaniu analitycznem; rzeczywiście, z punktem danym:

$$x_1 = a + \beta i , \; y_1 = \gamma + \delta i$$

sprzężony jest punkt:

$$x_2 = a - \beta i , \; y_2 = \gamma - \delta i ,$$

a środek między niemi jest:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = a , \; y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \gamma .$$

Znajdźmy jeszcze warunek analityczny, aby dwa punkty urojone należały do jednego rzeczywistego okręgu koła.

Jeżeli okrąg koła:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

ma zawierać dwa dane punkty urojone:

$$x = a + \beta i\,,\ y = \gamma + \delta i$$

$$x = a' + \beta' i\,,\ y = \gamma' + \delta' i\,,$$

to parametry koła muszą zadość czynić następującym czterem równaniom:

$$(x_0 - a)\beta + (y_0 - \gamma)\delta = 0$$

$$(x_0 - a')\beta' + (y_0 - \gamma')\delta' = 0\,,$$

$$r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - \gamma)^2 - \beta^2 - \delta^2$$

$$r^2 = (x_0 - a')^2 + (y_0 - \gamma')^2 - \beta'^2 - \delta'^2\,.$$

Rugując z tych równań parametry r, x_0, y_0, otrzymamy warunek szukany:

$$\begin{vmatrix} 2(a-a')\,, & 2(\gamma-\gamma')\,, & a^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2-(a'^2-\beta'^2+\gamma'^2-\delta'^2) \\ \beta\,, & \delta\,, & a\beta+\gamma\delta \\ \beta'\,, & \delta'\,, & a'\beta'+\gamma'\delta' \end{vmatrix} = 0\,.$$

Równanie kuli zawiera 4 parametry niezależne, dla tego **przez dany punkt urojony w przestrzeni przechodzi ∞^2 powierzchni kulistych.** Zbadajmy, jakie położenie zajmują te kule.

Jeżeli powierzchnia kuli

(16) $$x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

zawierać ma punkt urojony:

$$x = a + i\beta\,,\ y = \gamma + i\delta\,,\ z = \varepsilon + i\zeta\,,$$

to powinno być:

$$(a - x_0 + i\beta)^2 + (\gamma - y_0 + i\delta)^2 + (\varepsilon - z_0 + i\zeta)^2 = r^2\,,$$

czyli:

$$(17)\quad r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - \gamma)^2 + (z_0 - \varepsilon)^2 - \beta^2 - \delta^2 - \zeta^2$$

$$(18)\quad \beta(x_0 - a) + \delta(y_0 - \gamma) + \zeta(z_0 - \varepsilon) = 0 .$$

Na zasadzie równania (18) twierdzimy, że **środki wszystkich tych kul znajdują się w płaszczyznie rzeczywistej, która jest prostopadła do prostej, zawierającej dany punkt urojony, i przecina ją w punkcie:**

$$x = a ,\; y = \gamma ,\; z = \varepsilon .$$

Równanie (17) wyznacza długość promienia każdej kuli w funkcyi spółrzędnych jej środka.

Rezultat powyższy moglibyśmy z łatwością otrzymać geometrycznie zupełnie tak samo rozumując, jak w przypadku układu kół na płaszczyźnie.

Wszelka płaszczyzna rzeczywista, przechodząca przez dany punkt urojony, przecina układ kul według układu kół (w liczbie ∞^1), względem których prosta rzeczywista, zawierająca punkt dany, jest wspólną osią pierwiastną.

Jeżeli dane dwa punkty urojone (9) i (10) nie leżą na jednej płaszczyznie rzeczywistej, t. j. jeżeli dla nich nie spełnia się warunek (8), **to przez nie można poprowadzić jedną, zupełnie oznaczoną powierzchnię kulistą rzeczywistą.**

Jakoż, załóżmy, że powierzchnia (16) przechodzi przez punkty (9) i (10); wtedy parametry: x_0, y_0, z_0, r czynią zadość czterem następującym równaniom, analogicznym z równaniami (17) i (18):

$$(19)\quad \left.\begin{array}{l} \beta(x_0 - a) + \delta(y_0 - \gamma) + \zeta(z_0 - \varepsilon) = 0 \\ \beta'(x_0 - a') + \delta'(y_0 - \gamma') + \zeta'(z_0 - \varepsilon') = 0 \end{array}\right\}$$

$$(20)\quad \left.\begin{array}{l} r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - \gamma)^2 + (z_0 - \varepsilon)^2 - \beta^2 - \delta^2 - \zeta^2 \\ r^2 = (x_0 - a')^2 + (y_0 - \gamma')^2 + (z_0 - \varepsilon')^2 - \beta'^2 - \delta'^2 - \zeta'^2 \end{array}\right\} .$$

Rugując r^2 z równań (20), otrzymamy:

$$(21)\quad 2(\alpha-\alpha')x_0+2(\gamma-\gamma')y_0+2(\varepsilon-\varepsilon')z_0=\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2 +\varepsilon^2-\zeta^2-(\alpha'^2-\beta'^2+\gamma'^2-\delta'^2+\varepsilon'^2-\zeta'^2)\,.$$

Trzy równania pierwszego stopnia: (19) i (21) wyznaczają zupełnie określone wartości parametrów x_0, y_0, z_0, jeżeli tylko wyznacznik tych równań jest różny od zera, t. j. jeżeli nie spełnia się warunek (8). Każde z równań (20) daje wówczas wartość czwartego parametru r.

O WZORZE KEUCHELA
NA OBLICZANIE REZERWY PREMIOWEJ W UBEZPIECZENIACH ŻYCIOWYCH.

Podał

B. Danielewicz.

Do obliczania rezerwy od ubezpieczeń życiowych używa się wzorów:

$$(1)\qquad \mathrm{Res}\,(\nu)=P_{x+\nu}-{}^{n}p_x\,.\,{}^{n-\nu}R_{x+\nu}\,,\ \text{lub}$$

$$(2)\qquad \mathrm{Res}\,(\nu)=({}^{n-\nu}p_{x+\nu}-{}^{n}p_x)\,.\,{}^{n-\nu}R_{x+\nu}\ ^{1)}\,,$$

gdzie x oznacza wiek osoby w chwili zawierania umowy; n czas płacenia premij za dane ubezpieczenie; ν liczbę lat, po upływie której obliczamy rezerwę; $P_{x+\nu}$ premię jednorazową, jaką ubezpieczony musiałby jednokrotnie zapłacić, gdyby zawierał to samo ubezpieczenie w chwili obliczania rezerwy; ${}^{n}p_x$ oznacza premię opłacaną rocznie przez

[1] W niektórych przypadkach $\mathrm{Res}\,(\nu)=1-\dfrac{{}^{n-\nu}R_{x+\nu}}{{}^{n}R_x}$.