Uzupełnienie tych badań bezpośredniemi pomiarami wspomnianego stosunku drogą akustyczną stanowi przedmiot nieukończonych jeszcze poszukiwań profesora.

Obok tego prowadzą się w obecnej chwili w Zakładzie jeszcze dwie inne prace doświadczalne.

W sierpniu 1897 r.

PRZEGLĄD LITERATURY. BIBLIOGRAFIA.

F. Klein. Zur ersten Verteilung des Lobatschewsky — Preises. (Gutachten, betreffend den dritten Band der „Theorie der Transformationsgruppen" von S. Lie). 8° w. 27 str. 1897. Wydanie Towarzystwa fizyko-matematycznego w Kazaniu.

Treściwy ten referat, obok głównego swego zadania, t. j. oceny znaczenia znakomitych badań Liego, zawartych w tomie trzecim wielkiego dzieła „Theorie der Transformationsgruppen", zawiera zarazem przegląd krytyczny dotychczasowych badań nad podstawami nauki geometrycznej i przedstawienie niektórych własnych pomysłów samego Kleina w tej dziedzinie, jednej może z najpiękniejszych, jakie stworzyła matematyka nowoczesna.

Tom III dzieła Liego, pisze Klein, nietylko odpowiada warunkom konkursu, lecz tak dalece przewyższa wszystkie inne prace konkursowe, że nie może być żadnej wątpliwości co do przyznania jej nagrody. Rozstrzyga tu bowiem: z jednej strony nadzwyczajna gruntowność i ścisłość, z jaką Lie w piątym rozdziale tomu III-go traktuje zagadnienie, któremu nadał nazwę zagadnienia Riemanna — Helmholtza o przestrzeni; z drugiej zaś okoliczność, że metoda Liego jest następstwem logicznem długoletnich jego badań twórczych na polu geometryi, a zwłaszcza jego teoryi grup ciągłych. Dla scharakteryzowania stanowiska badań Liego w dziedzinie ogólnych badań geometrycznych, Klein poświęca najprzód słów kilka wyjaśnieniu znaczenia pewników lub postulatów, które uważa za idealny wyraz pewnych wyników obserwacyj i doświadczeń, mający charakter bezwzględnej ścisłości i ogólności, gdy same wyniki tych obserwacyj i doświadczeń stosują się tylko wewnątrz pewnych określonych granic dokładności i pod szczególnemi warunkami. Zastanawia się następnie nad pojęciem krzywej, które w matematyce ma ten sam charakter idealny, jaki jest właściwy pojęciu pewników. Że pogląd empiryczny, dzięki pewnym ukrytym jego właściwościom, doprowadził z koniecznością i wyłącznością do krzywych analitycznych, to w tem tkwi interesujące pytanie z dziedziny teoryi poznawania. Lecz do podobnych wyników ścisłych dotrzeć można wtedy dopiero, gdy na podstawie postulatów i związanych z niemi wniosków, budowla geometryi elementarnej jest już wzniesioną.

Przechodząc do zasadniczych założeń sławnej pracy Riemanna o „hypotezach geometryi", który uważa przestrzeń za rozmaitość liczbową ciągłą, trójwymiarową, Klein powiada, że założenia te dawniej poczytywać można było za wynik bezpośredni przyjęcia ciągłości przestrzeni, lecz że dziś droga do tych założeń prowadzi dopiero przez wzniesienie się od geometryi metrycznej, opartej na rozważaniu kół i kul, lub geometryi rzutowej, opartej na rozważaniu konfiguracyj linij prostych i płaszczyzn. Taż sama uwaga stosuje się również do tego założenia geometryi Riemannowskiej, według którego funkcye, określające stosunki miarowe przestrzeni, uważa się jako różniczkowalne. Lie wykazał w swej pracy istotne znaczenie tych założeń w każdym systemie pewników geometrycznych.

Można też oprzeć definicye różnych gatunków geometryi na podstawie pojęcia grupy, jak to uczynił Klein w swym programie Erlangeńskim (1872) [1]). Wychodzimy wtedy albo z faktu swobodnego poruszania się ciał stałych (twierdzenia o przystawaniu) albo z rozważania konfiguracyj, dających się utworzyć wewnątrz grupy z jej równowartościowych elementów.

W traktowaniu zagadnienia Riemanna—Helmholtza przyjmuje Lie jako jedynie dopuszczalne rozważanie ograniczonej części przestrzeni. W takiej przestrzeni swobodną poruszalność ciał można

[1]) Przekład w „Pracach matematyczno-fizycznych", t. VI, str. 27—61.

przyjąć dla każdej z trzech geometryj; Euklidesa, Łobaczewskiego, Riemanna; prowadzi to do wyrażenia elementu łuku za pomocą formy kwadratowej różniczek spółrzędnych, mianowicie takiej, dla której miara krzywizny jest stałą. Zadanie sprowadza się do tego, by za pomocą cech charakterystycznych odróżnić grupy sześcioparametrowe ruchu w tych trzech geometryach od innych grup ciągłych przekształceń, Klein streszcza i charakteryzuje dwie metody rozwiązania tego zagadnienia, podane przez Liego, i stwierdza za Liem pewną nieścisłość w dowodach Helmholtza, pochodzącą stąd, że założenia swoje, stosujące się do wymiarów skończonych, Helmholtz przeniósł milcząco w dziedzinę nieskończonej małości. Przedstawiwszy następnie w streszczeniu ważne wyniki dla geometryi, wypływające z tych subtelnych dociekań Liego, przechodzi Klein do scharakteryzowania swoich pomysłów, wzbogacających dotychczasową dziedzinę typów przestrzeni typami nowemi, które wiążą się algebraicznie z teoryą nieciągłych grup podstawień liniowych; w przypadku krzywizny dodatniej otrzymujemy tu, obok zwykłej przestrzeni eliptycznej, przestrzeń sferyczną, w której dwie linie geodezyjne przecinają się zawsze w dwu punktach. Postulaty tych geometryj ulegają poważnym modyfikacyom.

Zwracając się do podstaw geometryi metrycznej i rzutowej, wyjaśnia Klein postulaty, na mocy których, tak w jednej jak i w drugiej, każdemu punktowi na linii prostej odpowiada liczba (postulat ciągłości, postulat Archimedesa, liczby aktualnie nieskończenie małe Veronesego), czyli w jaki sposób wogóle utworom geometrycznym odpowiada continuum liczbowe. Wyjaśnienie tej pierwszorzędnej w geometryi sprawy opiera się na pracach samego Kleina, Schura, Pascha i innych.

W końcu swego referatu poświęca Klein kilka słów nowym badaniom Minkowskiego i Hilberta. Pierwszy z nich zastępuje zwykłe wyrażenie odległości dwu punktów jakąkolwiek funkcyą jednorodną stopnia pierwszego $\Omega(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, która, przyrównana do stałej, przedstawia powierzchnię nigdzie nie wklęsłą; przy takiem założeniu, linia prosta nie przestaje być najkrótszą odległością pomiędzy dwoma punktami, lecz niema wtedy ruchów w przestrzeni, prócz potrójnie nieskończonych przesunięć równoległych. Hilbert odwraca pytanie, bo pyta, jakie są najogólniejsze stosunki miarowe, przy których linia prosta pozostaje najkrótszą odległością pomiędzy dwoma punktami, i znajduje odpowiedź, której rozwiązanie Minkowskiego jest przypadkiem granicznym.

Ostatnie kartki wielce interesującego referatu poświęcone są charakterystyce poglądów Helmholtza na przestrzeń z jego „Populäre Vorträge“, w stosunku do geometryi rzutowej, której zasadnicze prawdy intuicyjnie pochwycił w swem przedstawieniu.

S. D.

C. A. Laisant. Le mathématique. Philosophie-Enseignement. Paris, George Carré et C. Naud. 1898. 8°, str. 292.

Tytuł ciekawy i nazwisko zaszczytnie znanego autora zapowiadały z góry, że treść dzieła będzie wielce interesująca. Istotnie, nie zawiedliśmy się bynajmniej, W przedmowie powiada autor, że nie pisze ani dla uczonych, ani w celu spopularyzowania matematyki dla osób, nie mających odpowiedniego przygotowania; że ma przedewszystkiem na widoku czytelników wykształconych, którym nie obcą jest matematyka, którzy wszakże nie mają dość czasu na specyalne studya w wielu gałęziach dziś tak bogatej i wyspecyalizowanej umiejętności, a mianowicie: inżynierów, mechaników, nauczycieli, wykładających w szkołach średnich i t. p.

Dzieło napisane jest barwnie, jasno, z talentem pisarskim i ze znajomością rzeczy, cechującą wytrawnego pracownika. Przypomina ono sposobem wykładu odpowiednie działy filozofii pozytywnej Comte'a, której Laisant jest zwolennikiem. Spotykamy tu w porządnie ułożonej całości wiele trafnych poglądów, bystrych spostrzeżeń i ważnych wskazówek dydaktycznych. Całość podzielona na trzy części, W pierwszej, złożonej z ośmiu rozdziałów, mowa jest o matematyce czystej, a mianowicie: o matematyce i jej działach, o arytmetyce i arytmologii, algebrze, rachunku nieskończonostkowym, o teoryi funkcyj, geometryi i mechanice rozumowej Część druga poświęcona jest matematyce stosowanej, a mianowicie uwagom ogólnym, zastosowaniom rachunku, zastosowaniom geometryi, zastosowaniom mechaniki. W części trzeciej zastanawia się autor nad nauczaniem matematyki i w siedmiu rozdziałach podaje pogląd ogólny na nauczanie matematyki, mówi o nauczaniu arytmetyki, algebry i rachunku wyższego, o nauczaniu geometryi, geometryi analitycznej, mechaniki. o hierarchii nauczania (we Francyi). Przytoczymy najbardziej charakterystyczne poglądy autora.

Matematykę czystą (Laisant proponuje przywrócenie nazwy „la mathématique“, jako bardziej odpowiadającej treści i zadaniu jedności nauki matematycznej, zamiast powszechnie dziś używanej w języku francuskim nazwy „les mathématiques“) dzieli na: arytmetykę i arytmologię, algebrę, rachunek nieskończonostkowy, teoryę funkcyj, — stanowiące naukę rachunku (Science de calcul); na geometryę i geometryę analityczną, stanowiące naukę rozciągłości (Science de l'étendue) i wreszcie na mechanikę rozumową, t. j. naukę o ruchu. W matematyce stosowanej stosuje podział, wyżej przez nas przy podaniu treści drugiej części książki wskazany. Nauce matematycznej przyznaje początek doświadczalny; w określeniu celu matematyki zgadza się w części z Comtem, który za zadanie tej nauki uważał głównie mierzenie pośrednie wielkości. Laisant uzupełnia to określenie, zaliczając do zadań matematyki pojęcie porządku oraz wszelkie formy i konstrukcye, z tem pojęciem związane. Zasadniczą cechą badania matematycznego jest abstrakcya; matematyka czysta od rzeczy konkretnych wznosi się ku abstrakcyi; matematyka stosowana od abstrakcyj powraca do rzeczy konkretnych.

Laisant, stojący na stanowisku doświadczalnem i pozytywnem, nie jest zwolennikiem teoryj czysto-formalnych; protestuje on naprzykład przeciwko wprowadzaniu ich do wykładu nauki o ułamkach, liczb ujemnych, niewymiernych, urojonych i t. p. Jako lubujący się w dochodzeniach arytmologicznych, zachęca on do uprawiania dość często zaniedbywanej w wykładach teoryi liczb. Przemawia gorąco za ekwipolencyami Bellavitisa i kwaternionami Hamiltona, które zdaniem jego nietylko wzbogacają wiedzę, lecz są zarazem doskonałem narzędziem dydaktycznem. Kładzie nacisk na szersze uwzględnienie teoryj i metod interpolacyi.

Nie odmawiając ważnego znaczenia geometryom nieeuklidesowym, uważa je wszakże raczej za ćwiczenia umysłu; podobnież zapatruje się na geometryę wielowymiarową. Pozostając konsekwetnie na stanowisku pozytywnem, zwraca uwagę na doniosłość metod geometryi nowożytnej, geometryi cynematycznej (według pomysłów Mannheima), geometryi trójkąta, geometrografii Lemoine'a, geometryi położenia (Analysis situs). W geómetryi analitycznej zwraca uwagę na ważność i pożytek spółrzędnych trójliniowych i czworościennych, rachunku geometrycznego i użytku ilości urojonych w geometryi. Cynematykę i statykę wydziela zupełnie z dziedziny mechaniki, uważając je za nauki czysto—geometryczne, mechanikę koncentrując głównie w dynamice.

Dziedzinę matematyki stosowanej oświetla ze wzmiankowanego wyżej punktu widzenia powrotu od abstrakcyj do świata konkretnego. Zalicza więc do niej: rachunek przybliżeń, tablice ułatwiające rachunek, metody graficzne rozwiązywania zagadnień, logismografię (nowo powstającą naukę prowadzenia ksiąg rachunkowych), chrematystykę (zastosowania matematyki do nauk ekonomicznych i socyologicznych), rachunek prawdopodobieństwa, machiny rachunkowe i t. p. Z nauk, stosujących głównie geometryę, należą do dziedziny stosowanej: topografia, hydrografia, geodezya, geografia matematyczna, astronomia sferyczna, geometrya wykreślna i jej gałęzie specyalne, stereotomia i ciesiołka, statyka graficzna, nomografia (d'Ocagne'a). Zastosowania mechaniki obejmują: mechanikę niebieską i mechanikę przemysłową, t. j. naukę o machinach, naukę wytrzymałości materyałów, hydraulikę i t. p. Każdej z tych gałęzi wiedzy stosowanej poświęca Laisant treściwe uwagi, omawiając ich cel, środki i zakres zastosowań.

W rzeczach nauczania matematyki we Francyi Laisant jest znawcą gruntownym i posiada bogate doświadczenie, czerpane na stanowisku repetytora Szkoły politechnicznej. Nie pisze on tu szczegółowej metodyki, a wypowiada tylko poglądy ogólne, zasługujące ze wszech miar na uwagę. Wychodzi z postulatu, że pojęcia matematyczne są niezbędne dla każdego i że każda średnia inteligencya zdolną jest do nabycia ich w pewnych granicach. Że najważniejszą zasadę nauczania słusznie poczytuje pobudzenie interesu wychowańca i rozwijanie jego samodzielności w ten sposób, by on zawsze miał to poczucie, iż odkrywa sam to, czego go uczą. Z tego stanowiska rozpatruje i krytykuje sposoby uczenia, używane we Francyi, wskazując środki poprawy, tak w metodach jak i programach. Przechodzi tym sposobem kolejno nauczanie arytmetyki, w której zachęca do korzystania z poglądów wypowiedzianych (w r. 1763) przez La Chalotais'a w dziele: „Essai d'éducation nationale du plan d'études pour la jeunesse“ i radzi wprowadzenie do wykładu arytmetyki szkolnej nauki przybliżeń i początków teoryi liczb. W algebrze zwraca uwagę na możność uproszczenia różnych teoryj elementarnych i rozszerzenia natomiast programów przez wprowadzenie rachunku pochodnych. W wykładzie geometryi elementarnej, polecając wyborne dzieła Rouche'a i Comberousse'a, radzi nadanie większej ciągłości i jednolitości wykładanym przedmiotom; wykazuje potrzebę szerszego uwzględnienia geometryi na linii prostej i stosowania, o ile można najprędzej, zasad nauki o przekształceniach figur. Trygonometryę uważa za naukę zupełnie sztuczną, sklejoną z części należących do algebry i do geometryi, jedynie w celach szkolnych, gdy tymczasem jest ona właściwie tych rozdziałem geometryi ogólnej. W wykładzie geometryi analitycznej radzi poświęcać więcej czasu konstrukcyom linij krzywych, rachunkowi geometrycznemu i cynematyce.

Wykład mechaniki tak zwanej „elementarnej“ uważa za nieracyonalny, nauczanie mechaniki bez odpowiednich narzędzi rachunku wyższego — za czystą chimerę. Wskazane wyżej rozszerzenie wykładu algebry w szkołach pozwoli, według niego, na stosowanie tego ważnego narzędzia w wykładzie szkolnym.

Rozdział o hierarchii nauczania zajmuje się głównie krytyką organizacyi nauczania, egzaminów i stopni naukowych we Francyi.

Taką jest treść dzieła, którego zadaniem jest widocznie ożywienie we Francyi ruchu na polu dydaktyki matematycznej. Lecz książka ta jest wielce interesującą i dla czytelników niefrancuskich Na trzeźwe i stanowcze poglądy autora w „filozofii“, matematyki, jak on ją pojmuje, w znacznej części można się zgodzić, jakkolwiek nie możemy podzielać jego sceptycyzmu względem metod czysto-formalnych, badań dzisiejszych nad istotą funkcyj (np. funkcyj nie mających pochodnych), nad podstawami nowej geometryi ogólnej i t. p. Właśnie doniosłego filozoficznego ich znaczenia autor nie uwzględnia, zaledwie dotykając tak pięknych badań, które są cechą dzisiejszej epoki matematycznej; o wielu teoryach zasługujących na wyróżnienie jak np. o teoryi podstawień i grup nie wspomniał. Matematyka w przedstawieniu autora nie jest tą wiedzą swobodną w swym rozwoju, w której najbardziej na pozór od świata realnego odległe spekulacye mają prawo obywatelstwa, a jak doświadczenie pokazuje, nie są zupełnie bezpłodnemi. Co się tyczy niewłaściwości wprowadzania tych trudnych pojęć do wykładu elementarnego, to pod tym względem można się zgodzić z autorem. Kształcenie bowiem młodych umysłów w dziedzinie matematyki nie da się pogodzić z piętrzeniem trudności i subtelności, wymagających większej dojrzałości i odpowiedniego umocnienia się w rzeczach zasadniczych. To też uwagi dydaktyczne autora są słuszne i cenne, a wskazane w nich sposoby podniesienia poziomu matematyki w szkołach — pożądane. Inne pytanie, czy i o ile środki te dadzą się wprowadzić do dzisiejszych programów szkolnych, przeciążających nieraz młode umysły balastem wątpliwej często wartości kształcącej i rzeczowej. Reforma na polu nauczania matematyki tylko powoli da się przeprowadzić. Głos Laisanta jest jednym z poważniejszych głosów, nawołujących do tej poprawy.

S. D.

W tomie I-ym „Wiadomości matematycznych“ (str. 27—28) podana była wzmianka o ukazaniu się tomu I-go dzieła „Traité elémentaire de Mécanique chimique, fondée sur la Thermodynamique“, przez P. Duhema, profesora Uniwersytetu w Bordeaux. Możemy uzupełnić obecnie notatkę ówczesną wiadomością o zawartości tomu drugiego tego dzieła (Paryż 1898). Trzy „księgi“ tego tomu zawierają: teoryę parowania, par nasyconych, stanów przesyconych cieczy i pary, topienia się i modyfikacyj, ulegających prawom podobnym, jak parowanie i topienie się; punkt potrójny; naukę o przejściu ciągłem ze stanu ciekłego do gazowego, o punkcie krytycznym, o równaniu charakterystycznem płynów, o cieple właściwem par i adiabatycznych zjawiskach w układach, złożonych z cieczy i pary. Dalej: prawa gazów doskonałych, twierdzenie o nieodwracalnem i odwracalnem mieszaniu się gazów, teoryę dysocyacyi układów gazowych, teoryę dysocyacyi ciał stałych na gazowe lub na ciekłe i gazowe.

Dzieło, które wytwarza się stopniowo z „Mécanique chimique“ (wyjdzie, o ile wiemy, jeszcze tom III-ci) zajmie, pośród literatury termodynamicznej, miejsce zgoła wybitne. Prof. Duhem rozumuje gruntownie i ściśle i wykłada jasno. Stan nauki zna i rozumie, jak tylko badacz i samodzielny myśliciel rozumieć go może. Z książki tej jednak czerpiemy nietylko uznanie i wdzięczność dla jej wytrawnego autora; czerpiemy nadto zadowolenie i otuchę, widząc, jak powoli, lecz stale, pogłębia i rozrasta sposób patrzenia na zjawiska, zwany „Termodynamiką“.

Wł. N.

Zasady magnetyzmu i elektryczności, wyłożone dla uczniów elektrotechniki przez Andrzeja Jamiesona, uzupełnione następnie przez D-ra I. Kolerta, przełożył z uwzględnieniem 3-go wydania angielskiego St. Stetkiewicz. W dwóch tomach z licznemi figurami w tekście. Tom I. Cena rs. 1 kop. 25, w oprawie rs. 1 kop. 35. Warszawa. Nakładem Hipolita Wawelberga 8°, str. 351.