UBEZPIECZENIE KAPITAŁU Z RENTĄ.

Napisał

B. Danielewicz.

Z pośród nieprzebranej liczby dających się pomyśleć rodzajów ubezpieczeń życiowych, wchodzi obecnie w użycie kombinacya, której bywa nadawane większe znaczenie praktyczne. Kombinacyą tą jest t. zw. ubezpieczenie kapitału z rentą.

Osoba x letnia ubezpiecza kapitał, płatny bezwarunkowo po upływie n lat. Jeżeli osoba ubezpieczona umrze przed upływem n lat, premie — o ile są wnoszone rocznie — przestają się nadal płacić, a kapitał nietylko we właściwym czasie zostanie wydany, ale nadto jeszcze instytucya wypłacać będzie corocznie z góry s% od kapitału ubezpieczonego, począwszy od chwili śmierci osoby ubezpieczonej, aż do terminu płatności kapitału.

Chodzi nam o wyprowadzenie wzoru na premie jednorazowe i roczne za pomieniony rodzaj ubezpieczeń.

W tym celu, utrzymując oznaczenia, przyjęte w książce p. t.: „Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych“ [1]), załóżmy, że ubezpieczamy jednocześnie, po jednostce kapitału, każdej z λ_x osób x letnich, mieszczących się w tablicy śmiertelności, którą przyjmujemy za podstawę do naszych obliczeń.

Przypuśćmy nadto, że śmiertelność tych osób rozkłada się jednostajnie w ciągu każdego roku, co wychodzi prawie na to samo, jak gdyby osoby ubezpieczone umierały w połowie każdego roku ubezpieczeniowego. Gdy wreszcie zastrzeżemy, aby ostatni procent był płacony za taką część roku, jaka pozostaje od rocznicy śmierci osoby ubezpieczonej do chwili terminu płatności kapitału, to na obecną wartość procentów, płaconych po zmarłych w 1-ym roku ubezpieczeniowym otrzymujemy wyrażenie:

---

[1]) Warszawa. 1896.

$$\frac{s}{100}\cdot\left(\varrho^{\frac{1}{2}}+\varrho^{\frac{3}{2}}+\varrho^{\frac{5}{2}}+\ldots+\varrho^{n-\frac{3}{2}}\right)\cdot\tau_x+\frac{s}{200}\cdot\varrho^{n-\frac{1}{2}}\cdot\tau_x$$

$$=\frac{s}{100}\cdot\left(\varrho^{\frac{1}{2}}+\varrho^{\frac{3}{2}}+\ldots+\varrho^{n-\frac{3}{2}}+\varrho^{n-\frac{1}{2}}\right)\cdot\tau_x-\frac{s}{200}\cdot\varrho^{n-\frac{1}{2}}\cdot\tau_x$$

$$=\frac{s}{100}\cdot\varrho^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1-\varrho^n}{1-\varrho}\cdot\tau_x-\frac{s}{200}\cdot\varrho^{n-\frac{1}{2}}\cdot\tau_x$$

$$=\frac{s}{100}\cdot\frac{\varrho^{\frac{1}{2}}}{1-\varrho}\cdot\left(\tau_x-\varrho^n\cdot\tau_x-\frac{1-\varrho}{2}\varrho^{n-1}\cdot\tau_x\right)$$

$$=\frac{s}{100}\cdot\frac{r^{\frac{1}{2}}}{(1-\varrho)\cdot\varrho^x}\cdot\left(\tau_x\cdot\varrho^{x+1}-\frac{1+\varrho}{2}\cdot\varrho^{x+n}\cdot\tau_x\right)$$

$$=\frac{s}{100}\cdot\frac{r^{\frac{1}{2}}}{(1-\varrho)\cdot\varrho^x}\cdot\left(m_x-\frac{1+\varrho}{2}\cdot\varrho^{x+n}\cdot\tau_x\right)$$

Po zmarł. w 2-im roku $=\frac{s}{100}\cdot\frac{r^{\frac{1}{2}}}{(1-\varrho)\cdot\varrho^x}\cdot\left(m_{x+1}-\frac{1+\varrho}{2}\cdot\varrho^{x+n}\cdot\tau_{x+1}\right)$

„ 3-im „ $=\frac{s}{100}\cdot\frac{r^{\frac{1}{2}}}{(1-\varrho)\cdot\varrho^x}\cdot\left(m_{x+2}-\frac{1+\varrho}{2}\cdot\varrho^{x+n}\cdot\tau_{x+2}\right)$

.

„ n-tym „ $=\frac{s}{100}\cdot\frac{r^{\frac{1}{2}}}{(1-\varrho)\cdot\varrho^x}\left(m_{x+n-1}-\frac{1+\varrho}{2}\cdot\varrho^{x+n}\cdot\tau_{x+n-1}\right)$

Razem, teraźniejsza wartość mających się wypłacić procentów, równa się:

$$\frac{s}{100}\cdot\frac{r^{\frac{1}{2}}}{(1-\varrho)\cdot\varrho^x}\cdot\left\{\left(\Sigma m_x-\Sigma m_{x+n}\right)-\frac{1+\varrho}{2}\cdot\varrho^{x+n}\cdot\left(\lambda_x-\lambda_{x+n}\right)\right\}.$$

Jednoczesna wartość jednostki kapitału, płatnego po n latach, wynosi ϱ^n; gdy więc — dla krótkości — premię jednorazową oznaczymy przez ${}_nP_x$, będziemy mieli:

$$ {}_nP_x \cdot \lambda_x = \varrho^n \cdot \lambda_x + \frac{s}{100} \cdot \frac{r^{\frac{1}{2}}}{(1-\varrho) \cdot \varrho^x} \cdot \left\{ \left(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n} \right) - \frac{1+\varrho}{2} \cdot \varrho^{x+n} \cdot \left(\lambda_x - \lambda_{x+n} \right) \right\}, $$

a stąd szukana premia jednorazowa

$$ \text{(I)} \qquad {}_nP_x = \varrho^n + r^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{s}{100 \cdot (1-\varrho) \cdot v_x} \cdot \left\{ \left(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n} \right) - \frac{1+\varrho}{2} \cdot \varrho^{x+n} \cdot \left(\lambda_x - \lambda_{x+n} \right) \right\}. $$

Wzorem na premię roczną, płatną przez lat n lub do chwili wcześniejszej śmierci osoby ubezpieczonej, jest oczywiście:

$$ \text{(II)} \qquad {}^np_x = \frac{v_x \cdot \varrho^n}{\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n}} + r^{\frac{1}{2}} \frac{s}{100 \cdot (1-\varrho) \cdot (\Sigma v_x - \Sigma v_{x+n})} \cdot \left\{ \left(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n} \right) - \frac{1+\varrho}{2} \cdot \varrho^{x+n} \cdot \left(\lambda_x - \lambda_{x+n} \right) \right\}. $$

Gdyby procent (resp. renta) miał być wypłacany z dołu, wówczas rata (płacona razem z kapitałem) wynosićby musiała nie $\frac{s}{200}$, lecz $\sqrt{1 + \frac{s}{100}} - 1$ i wtedy wzorem na premię jednorazową byłoby wyrażenie:

$$ \text{(I')} \qquad \varrho^n + \frac{s}{100} \cdot \frac{\varrho^{\frac{1}{2}}}{(1-\varrho) \cdot v_x} \cdot \left\{ \left(\Sigma m_x - \Sigma m_{x+n} \right) - \varrho^{x+n} \cdot \left(\lambda_x - \lambda_{x+n} \right) \right\} + \left(\sqrt{1 + \frac{s}{100}} - 1 \right) \frac{\varrho^{x+n}}{v_x} \cdot \left(\lambda_x - \lambda_{x+n} \right). $$

Zakładając, że procent, płacony od kapitału po śmierci osoby ubezpieczonej, równa się procentowi technicznemu, t. j. że

$$1 + \frac{s}{100} = r = \frac{1}{\varrho},$$

skąd

$$\frac{s}{100} = \frac{1-\varrho}{\varrho},$$

otrzymujemy na premię jednorazową wyrażenie:

$$\frac{r^{\frac{1}{2}}\left(\sum m_x - \sum m_{x+n}\right) + v_{x+n}}{v_x},$$

czyli ubezpieczenie identyfikuje się z t. zw. ubezpieczeniem mieszanem, jak też istotnie być powinno.

Gdy jednak ten ostatni przypadek nie zachodzi, lecz gdy procent od kapitału — jak to zwykle bywa — jest wyższy od technicznego i gdy wypłaca się z góry, premie roczne są wyższe od premij rocznych za ubezpieczenie mieszane, mianowicie przy tablicy śmiertelności 23 towarzystw niemieckich dla mężczyzn (M. I.), oraz przy

$$\varrho = \frac{1}{1{,}04}, \quad s = 5\%, \quad x = 40,$$

dla terminu $n = 10$ są wyższe o 0,835%

„ „ $n = 25$ „ „ 6,32%

„ „ $n = 40$ „ „ 15,00%.

Obliczanie każdorocznej rezerwy, zarówno przy życiu osoby ubezpieczonej, jako i po jej śmierci, nie przedstawia żadnych wyjątkowych trudności, gdyż w przypadku pierwszym, przy premiach rocznych, rezerwa stanowi różnicę pomiędzy premią jednorazową a wartością matematyczną mających się jeszcze wnieść premij, w przypadku zaś drugim, po upływie ν lat, rezerwa oblicza się ze wzoru:

$$\varrho^{n-r} + \frac{s}{100} \cdot \left(\varrho^{\frac{1}{2}} + \varrho^{\frac{3}{2}} + \ldots + \varrho^{n-r-\frac{3}{2}} \right) + \frac{s}{200} \cdot \varrho^{n-r-\frac{1}{2}}$$

$$= \varrho^{n-r} + r^{\frac{1}{2}} \frac{s}{200\,(r-1)} \cdot \left\{ 2 - \varrho^{n-r-1} \cdot (1 + \varrho) \right\},$$

który, jako niezależny od wieku, pozwala ułożyć jednę niewielką tabelkę dla wszystkich możliwych przypadków.

Z POWODU „ZASAD FIZYKI“

prof. A. **Witkowskiego**.

August **Witkowski**, profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego. Zasady Fizyki. Tom drugi, zeszyt pierwszy. Warszawa, 1897, 8°, str. 301. (Dzieła i Rozprawy Matematyczno-Fizyczne, wydawane przez A Czajewicza z zapomogi Kasy im. Mianowskiego).

„Zasady Fizyki“ prof. Witkowskiego składają się ze Wstępu i z sześciu części. Dwie pierwsze wypełniły tom, wydany przed kilku laty; zeszyt niniejszy przynosi część trzecią: „o cieple“; oraz czwartą: „fizykę cząsteczkową“. Powiedzmy odrazu, jakie zdanie utworzyliśmy o tej książce: jest, krótko mówiąc, doskonała.

Rozdział I (str. 1—34) zajmuje się Termometryą. Termometrya była punktem wyjścia w historycznym rozwoju nauki o cieple i powinnaby być niewątpliwie punktem wyjścia w jej budowie logicznej, gdyby nauki miały wogóle budowę logiczną, gdyby nie były podobne do przędzy, tkanej, gdzie tylko się trzyma. Ale, chociaż nauka nie jest logiczna, wykłady jej muszą być logiczne; dlatego Termometrya jest w „Zasadach Fizyki“ na miejscu możliwie najlepszem. Co więcej, sama w tych „Zasadach“ jest możliwie najlepsza. Zasadnicze pojęcia: temperatury i skali temperatur, termoskopu i termometru, rozszerzalności ciał, prawa gazów doskonałych są wprowadzone jasno, prosto,