Przykłady obliczania całek eliptycznych pierwszego gatunku za pomocą średnich arytmetyczno-geometrycznych,

podał

J. Kowalczyk.

1. Poprzedzimy te przykłady przypomnieniem znanej własności całek eliptycznych pierwszego gatunku, polegającej na tem, że każda z nich daje się przeksrtałcić na inną całkę tegoż gatunku o module dowolnie mniejszym lub większym od modułu całki danej [1]).

Jeżeli położymy

$$k = \sin a, \; k_1 = \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}, \; \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \cos a \operatorname{tg}\varphi ,$$

będzie:

$$(1) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2\cos^2 \frac{1}{2} a} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - k_1{}^2 \sin^2 \varphi_1}} .$$

2. Wiadomo, że z ilości m i n, które są liczbami danemi, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}(m + n), \text{ jako średnią arytmetyczną,}$$

$$\sqrt{mn}, \text{ jako średnią geometryczną.}$$

Jeżeli utworzymy kolejno:

$$\frac{1}{2}(m + n) = m_1 \quad , \quad \sqrt{mn} = n_1$$

---

1) Porówn. J. Bertrand. Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. T. II. Calcul intégral, str. 660.

$$\frac{1}{2}(m_1 + n_1) = m_2 \quad , \quad \sqrt{m_1 n_1} = n_2$$

$$\frac{1}{2}(m_2 + n_2) = m_3 \quad ; \quad \sqrt{m_2 n_2} = n_3$$

. . . . . .

$$\frac{1}{2}(m_{s-1} + n_{s-1}) = m_s \quad , \quad \sqrt{m_{s-1} n_{s-1}} = n_s \; ,$$

przekonamy się, że m_s i n_s tak zbliżą się do siebie, iż będzie:

$$\lim m_s = \lim n_s \quad , \quad \text{dla } s = \infty \; .$$

Dla dostatecznie wielkich wartości s m_s i n_s są już bardzo blizkiemi.

Takie ilości wprowadził Gauss do rachunku i nazwał je arytmetyczno-geometrycznemi średniemi.

Jako przykład weźmy: $m = 3$, $n = 11$; będzie:

$m_1 = 7$	$\log m_1 = 0.84510$
$n_1 = 5.7446$	$\log n_1 = 0.75926$
$m_2 = 6.3723$	$\log n_2 = 0.80218$
$n_2 = 6.3413$	$\log m_2 = 0.80430$
$m_3 = 6.3568$	$\log n_3 = 0.80324$
	$\log m_3 = 0.84324$

A więc logarytmy liczb m_3 i n_3 zgadzają się w pięciu pierwszych cyfrach dziesiętnych. Zgodność ich można doprowadzić do dowolnej liczby cyfr, jeżeli użyjemy w rachunku logarytmów więcej niż pięciocyfrowych.

Przykład: $m = 1$, $n = 80$.

$m_1 = 40.5$	$\log m_1 = 1.60746$
$n_1 = 9.0$	$\log n_1 = 0.95424$
$m_2 = 24.75$	$\log n_2 = 1.28085$
$n_2 = 19.092$	$\log m_2 = 1.39358$

$m_3 = 21.921$	$\log n_3 = 1.337215$
$n_3 = 21.7378$	$\log m_3 = 1.3408604$
$m_4 = 21.8294$	$\log n_4 = 1.3390377$
$n_4 = 21.8292$	$\log m_4 = 1.3390418$
$m_5 = 21.8293$	$\log n_5 = 1.3390398$
	$\log m_5 = 1\ 3390398$

Mamy tu zgodność pierwszych siedmiu cyfr dziesiętnych.

3. Łatwo zmiarkować z podanych przykładów, że rachunek jest bardzo prosty i łatwy; zastosujemy go do obliczenia całek eliptycznych 1-go gatunku. Kładąc we wzorze (1) $k = \sin a$, znajdujemy:

$$(2)\quad u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2\varphi}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}a} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \mathrm{tg}^4\frac{1}{2}a \sin^2\varphi}}$$

Legendre ułożył wartości całek podobnych w tablice, ale użycie tych tablic nie znalazło takiego rozpowszechnienia, jak tablice funkcyj trygonometrycznych; w wielu jednak przypadkach zachodzi potrzeba wyrażenia ilości u w liczbach. Są na to różne sposoby, ale najprostszy polega na średnich ilościach arytmetyczno-geometrycznych.

Wyrażenie (2) można przekształcić, podstawiając w niem:

$$1 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\ ,$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}\ ,$$

poczem otrzyma się:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \cos^2 a \sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{4}(1+\cos a)^2\cos^2\varphi + \cos a \sin^2\varphi}}\ ,$$

a gdy położymy:

$$\frac{n}{m} = \cos \alpha ,$$

będzie całka kształtu:

$$(3) \qquad u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2\varphi + n^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{4}(m+n)^2 \cos^2\varphi + (\sqrt{mn})^2 \sin^2\varphi}} .$$

Jeżeli do zamiany amplitudy φ na φ_1, φ_2, ... zastosujemy wyrażenia:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{n}{m} \operatorname{tg}\varphi &= \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) , \\ \frac{n_1}{m_1} \operatorname{tg}\varphi_1 &= \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{n_s}{m_s} \operatorname{tg}\varphi_s &= \operatorname{tg}(\varphi_{s+1} - \varphi_s) , \end{aligned}$$

i przez n_s, m_s rozumieć będziemy ilości, wyprowadzone w sposób powyżej wskazany, dojdziemy nareszcie do ilości n_s i m_s, które będzie można poczytać za równe, tak że będzie można przyjąć:

$$\varphi_{s+1} = 2\varphi_s$$

t. j.

$$\varphi_s = \frac{1}{2} \varphi_{s+1} .$$

Kiedy atoli w ilości pod pierwiastkiem kwadratowym m i n są równe, wtedy cała ta ilość staje się $= m_s$, co dzieje się przy amplitudzie φ_s; całka zatem będzie równa:

$$u = \frac{\varphi_s}{2^s m_s} . \tag{5}$$

Jeżeli u ma być wyrażone w częściach promienia, potrzeba φ_s podzielić przez 206264.″8, która to ilość odpowiada promieniowi koła, w sekundach wyrażonemu.

W szczególnym przypadku, gdy

$$\varphi = \frac{1}{2}\pi = 90^0 ,$$

czyli

$$\operatorname{tg}\varphi = \infty = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) ,$$

jest podług (4):

$$\begin{aligned}
\varphi_1 - \varphi &= \frac{1}{2}\pi \quad , & \varphi_1 &= \pi \\
\varphi_2 - \varphi_1 &= \pi \quad , & \varphi_2 &= 2\pi \\
\varphi_3 - \varphi_2 &= 2\pi \quad , & \varphi_3 &= 4\pi = 2^2\pi \\
\varphi_4 - \varphi_3 &= 4\pi \quad , & \varphi_4 &= 8\pi = 2^3\pi
\end{aligned}$$

. . . .

ogólnie zatem:

$$\varphi_s = 2^{s-1}\pi .$$

Całka eliptyczna pierwszego gatunku, w granicach 0 i $\frac{1}{2}\pi$ uważana, nazywa się, jak wiadomo zupełną i podług Jacobi'ego oznacza się głoską K. Biorąc zatem wyrażenie (1) w granicach wspomnianych, mamy:

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \cos^2 a \sin^2\varphi}},$$

a po podstawieniu w (5) wartości $\varphi_s = 2^{s-1}\pi$, otrzymujemy:

$$K = \frac{\pi}{2m_s} = \frac{\pi}{2\mu}, \quad \mu = m_s. \tag{6}$$

Łatwiejszego nad taki sposób obliczenia całek eliptycznych zupełnych próżno byłoby szukać.

4. Ponieważ przy podobnych rachunkach dobrze mieć pod ręką wzory, mogące służyć do sprawdzenia otrzymanego wypadku, przeto podamy takie wzory, nadmieniając, że one różnią się od przytoczonych wyżej tylko sposobem wykonania samego rachunku.

Do sprawdzenia wyrażenia (5) posłuży:

$$u = \frac{1}{2^s}\varphi_s\left(\sec\frac{1}{2}a \sec\frac{1}{2}a_1 \sec\frac{1}{2}a_2 \ldots\right)^2, \tag{5 bis}$$

gdzie:

$$\sin a_1 = \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a \quad, \quad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \cos a \operatorname{tg}\varphi$$

$$\sin a_2 = \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a_1 \quad, \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos a_1 \operatorname{tg}\varphi_1$$

$$\sin a_3 = \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a_2 \quad, \quad \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \cos a_2 \operatorname{tg}\varphi_2$$

. . . .

Takie podstawienia wprowadził John Landen w „Philosophical Transactions“ w r. 1771, 1775.

Porównawszy te podstawienia z (4), widzimy, że $\frac{n_s}{m_s}$ są $\cos a_s$; w odpowiednich też rachunkach mogą te ilości sprawdzać się wzajemnie; niezgodność ich może tylko być w jednościach ostatniej cyfry logarytmów do rachunku użytych.

Do sprawdzenia całki:

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2\varphi}}$$

mamy:

$$K = \frac{1}{2}\pi\left(\sec\frac{1}{2}a \sec\frac{1}{2}a_1 \sec\frac{1}{2}a_2 \ldots\right)^2 .$$

P r z y k ł a d 1. Znaleźć K, gdy $a = 30^0$.

$$\log\cos a = 9.9375306 = \log n$$

$$\begin{aligned}
m &= 1 \\
n &= 0.8660254 \\
m_1 &= 0.9330127 \\
n_1 &= 0.9306049 \\
m &= 0.9318088 \\
n_2 &= 0.9318081 \\
m_3 &= 0.9318085 \\
n_3 &= 0.9318083 \\
m_4 = \mu &= 0.9318084
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log n_1 &= 9.9687653 \\
\log m_1 &= 9.9698876 \\
\log n_2 &= 9.9693264 \\
\log m_2 &= 9.9693267 \\
\log n_3 &= 9.9693266 \\
\log m_3 &= 9.9693267
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \mu &= 9.9693266 \\
\log 2 &= 0.3010300 \\
& \ 0.2703566 \\
\log \pi &= 0.4971499 \\
\log K &= 0.2267933
\end{aligned}$$

Sprawdzenie podług (5 bis):

$$\frac{1}{2}a = 15^0,$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} a = 9.4280525$$

$$\log \sin a_1 = 8.8561050 \quad ; \quad a_1 = 4^0\ 7'\ 1.''9\,,$$

$$\frac{1}{2} a_1 = 2^0\ 3'\ 31.''0\,,$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} a_1 = 8.5556386$$

$$\log \sin a_2 = 7.1112772 \quad ; \quad a_2 = 0^0\ 4'\ 26.''5\,,$$

$$\frac{1}{2} a_2 = 0^0\ 2'\ 13.''2\,,$$

$$a_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
\log \sec \frac{1}{2} a &= 0.0150562 \\
\log \sec \frac{1}{2} a_1 &= 0.0002804 \\
\log \sec \frac{1}{2} a_2 &= \underline{0.0000001} \\
& 0.0153367 \\
& 0.0306734 \\
\log \frac{\pi}{2} &= \underline{0.1961199} \\
\log K &= 0.2267933
\end{aligned}$$

P r z y k ł a d 2 Znaleść:

$$u = \int_0^{\varphi = 50^0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi}}$$

gdy

$$a = 30^\circ\,.$$

Stosownie do (3) jest:

$$m = 1\,,\ n = \cos a\,.$$

Z poprzedzającego przykładu są wiadome $m_1, n_1; m_2, n_2; m_3, n_3$; podług (4) zatem rachunek jest krótki

$$\begin{aligned}
\log\cos a &= 9.9375306 \\
\log \operatorname{tg} \varphi &= 0.0761865 \\
\hline
\log \operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi) &= 0.0137171 \\
\varphi_1-\varphi &= 45^0 54' 16.''9 \\
\varphi &= 50^0 \\
\hline
\varphi_1 &= 95^0 54' 16.''9 \\
\log \operatorname{tg} \varphi_1 &= 0.9852782_n \\
\log \frac{n_1}{m_1} &= 9.9988777 \\
\hline
\log \operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1) &= 0.9841559_n \\
\varphi_2-\varphi_1 &= 95^0 55' 16.''7 \\
\varphi_1 &= 95^0 54' 16.''9 \\
\hline
\varphi_2 &= 191^0 49' 33.''6 \\
\log \operatorname{tg} \varphi_2 &= 9.3209446 \\
\log \frac{n_2}{m_2} &= 9.9999998 \\
\hline
\log \operatorname{tg}(\varphi_3-\varphi_2) &= 9.3209444 \\
\varphi_3-\varphi_2 &= 191^0 49' 33.6 \\
\varphi_3 &= 383^0 39'\ 7.''2
\end{aligned}$$

Podstawiając tę wartość w wyrażenie (5), mamy:

$$u = \frac{383^0 39' 7.''2}{8 m_3} = \frac{47^0 57' 23.''5}{m_3},$$

a w częściach promienia:

$$u = \frac{172643.''5}{206264.8\, m_3}$$

$$\begin{aligned}
\log 172643.5 &= 5.2371502 \\
\log 206264.8 &= 5.3144251 \\
\hline
&\ 9.9227251 \\
\log m_3 &= 9.9693266 = \log \mu \\
\hline
\log u &= 9.9533985\,.
\end{aligned}$$

Sprawdzenie podług (5 bis) daje taki sam wypadek.

P r z y k ł a d 3. Znaleść:

$$u = \int_0^1 \frac{d\varphi}{3\sqrt{1-\frac{5}{9}\sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{9\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}}.$$

Granica wyższa $1 = \varphi =$ arc. $57^0 17' 44.''8$,

$$m = 3\ ,\ n = 2\ ,\ \cos a = \frac{2}{3} = \frac{n}{m}$$

$m_1 = 2.5$	$\log n_1 = 0.3890757$
$n_1 = 2.44949$	$\log m_1 = 0.3979400$
$m_2 = 2.474745$	$\log n_2 = 0.3935079$
$n_2 = 2.474616$	$\log m_2 = 0.3935304$
$m_3 = 2.474680 = n_3$	$\log n_3 = 0.3935191$

Dalszy rachunek podług (4) daje:

$$\begin{aligned}
\log\cos a &= 9.8239087\\
\log \operatorname{tg}\varphi &= 0.1924024\\
&\ 0.0163111\\
\varphi_1 - \varphi &= 46^0\ 4'32.''5\\
\varphi &= 57^0 17' 44.''8\\
\varphi_1 &= 103^0 22' 17.''3\\
\log \operatorname{tg}\varphi_1 &= 0.6239559_n\\
\log\frac{n_1}{m_1} &= 9.9911337\\
&\ 0.6150916_n\\
\varphi_2 - \varphi_1 &= 103^0 38' 13.''3\\
\varphi_2 &= 207^0\ 0' 30.''6\\
\log \operatorname{tg}\varphi_2 &= 9.7073251\\
\log\frac{n_2}{m_2} &= 9.9999775\\
&\ 9.7073026\\
\varphi_3 - \varphi_2 &= 207^0 0' 26.''3\\
\varphi_3 &= 414^0 0' 56.''9\\
\frac{1}{2^3}\varphi_3 &= 51^0 45'\ 7.''1 = 186307.''1
\end{aligned}$$

$$\log \frac{1}{2^3}\varphi_3 = 5.2702294$$
$$\log 206264.8 = 5.3144251$$
$$9.9558043$$
$$\log m_3 = 0.3935191$$
$$\log u = 9.5622852$$

Sprawdzenie podług (5 bis):

$$\sin^2 a = \frac{5}{9}$$
$$a = 48^0 11'22.''9$$
$$a_1 = 11^0 32'13.''1$$
$$a_2 = 0^0 35'5.''1$$

$$\frac{1}{8}\varphi_3 = 186307.''1, \text{ jak poprzednio;}$$

$$\log\left(\sec\frac{1}{2}a \sec\frac{1}{2}a_1 \sec\frac{1}{2}a_2\ldots\right)^2 = 0.0836022$$

$$\log \frac{\frac{1}{8}\varphi_3}{206264.8} = 9.9558043$$
$$0.0394065$$
$$\log 3 = 0.4771213$$
$$\log u = 9.5622852$$