Kończąc niniejszą notatkę, winniśmy zaznaczyć, że pragnęliśmy uwydatnić w niej dwie rzeczy: najprzód to, iż temperatura bezwzględna uważaną być może za napięcie energii cieplnej, i powtóre, że strata energii w zjawisku termodynamicznem wynika nie tylko z przyczyny niewyrównywania się samych temperatur, ale także z przyczyny niewyrównywania się napięć energij takich, jak ciśnienie i t. p. W doświadczeniu np. Joule'a, rozpraszanie się energii wynika jedynie z nierówności ciśnienia gazu i ciśnienia jego otoczenia (próżni, do której gaz przepływa).

H. Poincaré.

ZWIĄZKI POMIĘDZY ANALIZĄ I FIZYKĄ MATEMATYCZNĄ. [1]

I.

Nieraz zapewne zadawano wam pytanie, do czego służy matematyka i czy te delikatne konstrukcye, które dobywamy całkowicie z naszego umysłu, nie są sztucznemi i zrodzonemi z kaprysu.

Istnieją różnice pomiędzy osobami, stawiającemi takie pytanie. Ludzie praktyczni domagają się od nas jedynie wskazania sposobu robienia pieniędzy. Tacy nie zasługują właściwie na to, aby im odpowiadano; raczej ich samych należałoby zapytać, na co przyda się gromadzenie tylu bogactw i czy dla pozyskania

[1]) Rzecz, odczytana na I-ym międzynarodowym kongresie matematyków w Zurychu dnia 9 sierpnia r. z. (Patrz „Wiadomości matematyczne" T. I, str. 183—192), — wydrukowana w „Revue générale des sciences pures et appliquées" (15 listopada 1897); podajemy ją tu w przekładzie na podstawie upoważnienia otrzymanego od Autora. *S. D.*

czasu na ich zdobycie należy zaniedbywać sztukę i wiedzę, które jedynie tworzą dusze zdolne do korzystania z bogactwa.

Et, propter vitam, vivendi perdere causas.

Z drugiej strony, nauka utworzona wyłącznie ze względu na zastosowania, jest niemożliwą; prawdy są płodnemi wtedy tylko, gdy jakby łańcuchem wiążą slę jedne z drugiemi. Jeżeli utrzymamy z nich tylko te, od których oczekujemy bezpośrednich korzyści, wtedy nie stanie pierścieni pośrednich i nie będzie łańcucha.

Ludzie, najbardziej pogardzający teoryą, znajdują w niej, nie wiedząc o tem, pożywienie codzienne; bez tego pożywienia postęp nagle wstrzymałby się i wpadlibyśmy szybko w nieruchomość chińską.

Lecz pozostawmy już nieprzejednanych praktyków. Obok nich są tacy, których zaciekawia jedynie przyroda i którzy zapytują nas, czy jesteśmy w stanie dostarczyć im sposobów lepszego jej poznania. W odpowiedzi wystarczy wskazać im dwa pomniki już zarysowane: mechaniki niebiesklej i fizyki matematycznej. Bez wątpienia zgodzą się oni na to, że te pomniki warte są włożonego w nie trudu. Lecz nie dosyć na tem.

Matematyka ma cel podwójny. Powinna ona dostarczać narzędzi do badania przyrody. Lecz to nie jest wszystkiem; ma ona bowiem nadto cel filozoficzny i, jeżeli wolno mi powiedzieć, cel estetyczny. Powinna ona pobudzać filozofa do zgłębiania pojęć liczby, przestrzeni i czasu.

Młodzi zwłaszcza adepci umiejętności znajdują w niej rozkosze, podobne do tych, jakie daje malarstwo i muzyka. Podziwiają oni delikatną harmonię liczb i form; czaruje ich wszelkie nowe odkrycie, odsłaniające im nieoczekiwaną perspektywę. Czyż rozkosz, której doznają, nie ma charakteru estetycznego, lubo zmysły nie biorą w tem żadnego udziału? Nie wielu jest powołanych do pełnego korzystania z tych rozkoszy, to prawda; lecz czyż to samo nie ma miejsca dla sztuk najszlachetniejszych. I dla tego nie waham się wyrzec, że matematyka zasługuje na to, aby ją uprawiano dla niej samej, i że teorye, których nie można stosować do fizyki, należy badać tak samo, jak inne.

Gdyby nawet cel fizyczny i cel estetyczny nie godziły się ze sobą, nie powinnibyśmy w żaden sposób zarzucać jednego lub drugiego. Powiem więcej: oba te cele są nierozłączne, a najlepszym sposobem osiągnięcia jednego z nich, jest kierowanie się ku drugiemu, a przynajmniej nie tracenie nigdy drugiego z uwagi. Postaram się to udowodnić, zastanawiając się bliżej nad związkami pomiędzy matematyką czystą i jej zastosowaniami.

Matematyk nie ma być dla fizyka prostym dostawcą wzorów; spółpracownictwo ich winno być ściślejsze. Fizyka matematyczna i analiza czysta są nietylko potęgami, graniczącemi ze sobą i pielęgnującemi stosunki dobrego sąsiedztwa; lecz przenikają się one wzajemnie: duch ich jest jeden i ten sam. Stanie się to jeszcze jaśniejszem, gdy pokażę, co fizyka otrzymuje od matematyki, i co, w zamian za to, matematyka bierze od fizyki.

II.

Fizyk nie może żądać od analisty, aby mu wykrywał nowe prawdy; drugi, co najwyżej, może pomagać pierwszemu w przeczuwaniu ich.

Już od dłuższego czasu nikt nie myśli o wyprzedzaniu doświadczenia lub o zbudowaniu świata na kilku pospiesznych hypotezach. Ze wszystkich tych konstrukcyj, któremi lubowano się naiwnie wiek temu, pozostały dziś tylko ruiny.

Wszystkie prawa wydobywamy tylko z doświadczenia; lecz do wypowiedzenia ich trzeba posiadać język specyalny. Język zwykły jest za ubogi i przytem zbyt nieokreślony, aby mógł wyrażać stosunki tak delikatne, tak bogate i ściste. Oto pierwszy powód, dla którego fizyk nie może się obyć bez matematyki; ona to bowiem daje mu język jedyny, którym może przemawiać.

Język dobrze utworzony nie jest rzeczą obojętną. By nie wychodzić z dziedziny fizyki — weźmy dla przykładu wyraz ciepło. Człowiek nieznany, który ten wyraz utworzył, oddał całe pokolenie na pastwę błędowi. Ciepło uważano za substancyę, głównie dla tego, że oznaczano je przez rzeczownik i uważano za niezniszczalne. Przeciwnie ten, kto wynalazł wyraz elektryczność, miał to niezasłużone szczęście wyposażenia fizyki w nowe prawo, prawo zachowania elektryczności, które prostym trafem, okazało się dokładnem; przynajmniej do dnia dzisiejszego.

Ciągnąc dalej porównanie, powiedzieć mogę, że pisarze upiększający język i traktujący go, jako dzieło sztuki, czynią z niego zarazem narzędzie bardziej giętkie, nadające się do wyrażania odcieni myśli. Podobnie analista, dążący do celu czysto-estetycznego, ułatwia przez to tworzenie języka, bardziej przystosowanego do potrzeb fizyka.

Nie dość na tem. Prawo wypływa z doświadczenia, ale nie wypływa z niego bezpośrednio. Doświadczenie jest indywidualnem, prawo, wyprowadzone z niego, ogólnem; doświadczenie jest tylko przybliżonem, prawo jest ścisłem, a przynajmniej pragnie być takiem; doświadczenie odbywa się w warunkach skomplikowanych, wysłowienie prawa komplikacye te usuwa. Nazywamy tę czynność „poprawianiem błędów systematycznych". Słowem, aby z doświadczenia wyciągnąć prawo, potrzeba uogólniać; jest to konieczność, narzucająca się najbardziej podejrzliwemu obserwatorowi. Lecz jak uogólniać? Każdą prawdę szczególną można oczywiście rozszerzyć nieskończenie wielu sposobami. Pomiędzy tysiącem dróg, otwierających się przed nami, trzeba wybrać jednę, przynajmniej tymczasową. Cóż kierować będzie nami w tym wyborze?

Tylko analogia. Lecz jak nieokreślonem jest to słowo! Człowiek pierwotny zna tylko analogie grube, uderzające zmysły jego, analogie barw i dźwięków. Ten nie mógłby pomyśleć naprzykład o podobieństwie światła i ciepła promienistego.

Kto tedy nauczył nas poznawania analogij prawdziwych, głębokich, których oczy nie widzą a które rozum odgaduje? Jest to duch matematyczny, który gardzi materyą a przywiązuje się tylko do formy czystej. On to nas nauczył nadawać jednę nazwę rzeczom, różniącym się tylko materyą, nazywanie, naprzykład, tem samem mianem mnożenia kwaternionów i mnożenia liczb całkowitych.

Gdyby kwaterniony, o których wspomniałem, nie były tak żywo stosowane przez fizyków angielskich, wielu widziałoby w nich tylko próżne marzenie; tymczasem zbliżając to, co pozory oddalać się zdają, uczyniły one nas zdolniejszymi do przenikania tajemnic przyrody.

Oto usługi, jakich fizyk może oczekiwać od analizy. Lecz aby analiza te usługi oddawać mogła, powinna być uprawiana najszerzej, bez oglądania się na bezpośrednie korzyści; trzeba, aby matematyk pracował w niej jakby artysta. Żądamy tylko od niego, aby był nam pomocnym w patrzeniu. w wytykaniu drogi wśród labiryntu, który się przed nami roztacza. Widzi zaś lepiej ten, kto wzniósł się wyżej.

Przykładów na to mamy obfitość wielką; wybieram najbardziej uderzające.

Pierwszy z nich pokaże, że wystarcza zmiana języka, by módz dostrzedz uogólnienia, których poprzednio nie podejrzewano. Gdy prawo Newtona postawione zostało na miejsce prawa Keplera, znano tylko ruch eliptyczny. Odnośnie do tego ruchu oba prawa różnią się tylko formą; przechodzimy od jednego do drugiego za pomocą prostego różniczkowania. Tymczasem z prawa Newtona za pomocą bezpośredniego uogólnienia można wyprowadzić wszystkie działania perturbacyjne i całą mechanikę niebieską. Przeciwnie, gdyby utrzymano wysłowienie Keplera, nigdy nie możnaby było dojść do uważania orbit planet podległych perturbacyom — równania tych krzywych skomplikowanych nikt nie napisał — za uogólnienia naturalne elipsy; postęp obserwacyj służyłby tylko do powiększenia chaosu.

Drugi przykład zasługuje również na uwagę. Kiedy Maxwell rozpoczynał swoje badania, prawa elektrodynamiki, w tym czasie przyjęte, wyjaśniały wszystkie fakty znane. Żadne nowe doświadczenie nie przybywało na ich stwierdzenie. Lecz patrząc na te prawa z innego stanowiska, Maxwell spostrzegł, że równania stają się bardziej symetrycznemi, gdy dodajemy do nich pewien wyraz; wyraz ten wszakże był za mały, by mógł sprawić skutki, dające się ocenić za pomocą metod dawnych. Wiadomo, że poglądy Maxwella, powzięte a priori, czekały lat dwadzieścia na potwierdzenie doświadczalne; albo, jeżeli chcemy, Maxwell na dwadzieścia lat wyprzedził doświadczenie. Dlaczego tryumf ten osiągnął?

Najprzód dlatego, że Maxwell był głęboko przejęty poczuciem symetryi matematycznej. Czy byłby też takim, gdyby inni przed nim nie szukali tej symetryi dla jej własnego piękna?

Dalej dlatego, że Maxwell przywykł był myśleć „wektoryalnie“; wektory zaś wprowadzono do analizy przez teoryę liczb urojonych. Ci, co teoryę tę wynaleźli, nie podejrzewali wcale tych zastosowań, jakie znajdzie w niej badanie świata rzeczywistego; sama nazwa, liczbom tym nadana, stwierdza to dostatecznie.

Maxwell nie był, być może, biegłym analistą; biegłość ta wszakże byłaby dla niego tylko ciężarem bezużytecznym i krępującym. Posiadał on natomiast w wysokim stopniu głębokie poczucie analogij matematycznych. Oto dlaczego stworzył dobrą fizykę matematyczną.

Przykład Maxwella uczy nas jeszcze jednej rzeczy. W jaki sposób winniśmy traktować równania fizyki matematycznej? Czy mamy wyprowadzać z nich wprost wszystkie wyniki i uważać je jako rzeczywistości nietykalne? Bynajmniej. Mają one nas uczyć przedewszystkiem tego, co można i co należy w nich zmieniać. W ten sposób potrafimy wyciągać z nich coś pożytecznego.

Przykład trzeci pokaże nam, w jaki sposób możemy upatrywać analogie matematyczne pomiędzy zjawiskami, fizykalnie nie pozostającemi ze sobą w związku, ani pozornym ani rzeczywistym, któryby z praw jednego zjawiska pozwalał nam odgadywać prawa drugiego. Jedno równanie, np. równanie Laplace'a, spotykamy w teoryi przyciągania Newtonowskiego, w teoryi ruchu cieczy, potencyału elektrycznego, w teoryi magnetyzmu, rozchodzenia się ciepła i w innych jeszcze dziedzinach. Cóż stąd wypływa? Teorye te wydają się jakby obrazami, kalkowanemi jeden na drugim; jedna teorya wyjaśnia drugą, zapożyczając od niej wzajemnie języka. Zapytajcie naprzykład elektryków, czy nie radują się z wynalezienia wyrazu: „przepływ siły“, przejętego z hydrodynamiki i teoryi ciepła.

Tym sposobem, analogie matematyczne nie tylko pozwalają nam przeczuwać analogie fizykalne, lecz nadto nie przestają być użytecznemi, gdy tych ostatnich nie ma.

Słowem, zadaniem fizyki matematycznej jest nietylko ułatwianie fizykowi rachunku liczbowego pewnych stałych lub całkowania pewnych równań różniczkowych. Jest niem jeszcze i przedewszystkiem odsłanianie i ukazywanie pod nowym kątem widzenia ukrytej w rzeczach harmonii.

Ze wszystkich części analizy, części najwyższe, najbardziej czyste, że tak powiem, są najpłodniejszemi w rękach, umiejących się niemi posługiwać.

III.

Zobaczmy teraz, co analiza zawdzięcza fizyce.

Należałoby chyba zupełnie zapomnieć o historyi wiedzy, aby nie wiedzieć o tem, że pragnienie poznania przyrody wpływało stale i szczęśliwie na rozwój matematyki.

Przedewszystkiem fizyk stawia nam zagadnienia, których rozwiązania od nas żąda. Stawiając je, płaci szczodrze z góry za usługę, którą możemy mu wyświadczyć, dając rozwiązanie. Jeżeli wolno mi dalej ciągnąć porównanie ze sztukami pięknemi, to powiem, że matematyk, zapominający o istnieniu świata zewnętrznego, byłby podobny do malarza, umiejącego harmonijnie kombinować barwy i formy, ale nie posiadającego modeli. Jego potęga twórcza szybkoby się wyczerpała.

Kombinacye liczb i symboli stanowią mnogość nieskończoną. Jak w tej mnogości wybrać to, co jest godnem uwagi naszej? Czy mamy się poddać w tem jedynie kaprysowi? Kaprys ten, który zresztą szybkoby się zużył, odsunąłby nas daleko jednych od drugich, tak że po pewnym czasie przestalibyśmy się wzajemnie rozumieć.

Lecz jest to tylko drobna strona tej sprawy. Fizyka nie pozwoli nam zapewne rozproszyć się i uchroni nas nadto od większego niebezpieczeństwa: nie pozwoli nam obracać się bez przerwy w kółku. Stwierdza to historya, że fizyka nie tylko zmuszała nas do wyboru zagadnień z całego mnóstwa tych, które się nastręczały, lecz nadto narzucała nam takie zagadnienia, o których nie moglibyśmy nawet pomyśleć bez jej udziału. Urozmaiconą wielce może być wyobraźnia człowieka, przyrodą wszakże jest tysiąckrotnie bogatszą. By pójść jej śladami, musimy wybierać drogi dawniej zaniedbane, prowadzące nas nieraz na szczyty, z których odsłaniają się nowe krajobrazy.

Cóż może być bardziej użytecznego! Z symbolami matematycznemi jest to samo, co z rzeczywistościami fizycznemi; porównywając różne widoki, możemy zrozumieć wewnętrzną harmonię rzeczy, która jedynie jest piękna i dlatego godna naszych wysiłków.

Pierwszy przykład jest tak stary, że możnaby o nim zapomnieć; jest on wszakże najważniejszy ze wszystkich. Jedynym przedmiotem naturalnym myślenia matematycznego jest liczba całkowita. Świat zewnętrzny podsunął nam ilość ciągłą, którą odkryliśmy bez wątpienia, ale pod jego przymusem. Bez niej zaś nie byłoby analizy nieskończonościowej; cała nauka matematyczna sprowadziłaby się do arytmetyki lub do teoryi podstawień.

Badaniu ilości ciągłych poświęciliśmy wszystek czas i wszystkie siły nasze. Któż tego żałować będzie; któż powie, że czas i siły zostały tu naprózno stracone?

Analiza odsłania przed nami perspektywy nieskończone, których arytmetyka wcale nie podejrzywa; jednym rzutem oka ukazuje nam całość wspaniałą, której ład jest prosty i symetryczny; przeciwnie w teoryi liczb, gdzie panuje niespodzianka, wzrok zatrzymuje się, że tak powiem, na każdym kroku.

Zapewne może ktoś powiedzieć, że poza liczbą całkowitą nie ma ścisłości, a więc i prawdy matematycznej; że wszędzie ukrywa się ta liczba i dlatego trzeba starać się uczynić przejrzystemi pokrywające ją zasłony, chociażby to miało prowadzić do nieprzerwanych powtórzeń. Nie chciejmy być takimi purystami i bądźmy wdzięczni i l o ś c i c i ą g ł e j, która jedynie — lubo wszystko wychodzi z liczby całkowitej — nadawała się do wyprowadzenia z niej tylu rzeczy.

Czy potrzebuję zresztą przypominać, jak zadziwiające korzyści wyciągnął p. H e r m i t e z wprowadzenia ilości ciągłych do teoryi liczb? Tak więc właściwa dziedzina liczby całkowitej została zagarnięta; to zagarnięcie ustaliło porządek tam, gdzie dotąd panował bezład. Oto co zawdzięczamy i l o ś c i c i ą g ł e j, a więc przyrodzie fizycznej.

Szereg F o u r i e r a jest cennem narzędziem, którego analista wciąż używa; F o u r i e r wynalazł je dla rozwiązania zagadnienia fizykalnego. Gdyby zagadnienie to nie nasunęło się sposobem naturalnym, nigdy nie śmianoby przyznać praw przynależnych ilości nieciągłej i długo jeszcze poczytywanoby funkcye ciągłe jako jedynie prawdziwe. Przez to zaś pojęcie funkcyi rozszerzyło się znakomicie i doznało nieprzewidzianego rozwoju przez prace niektórych analistów — logików. Analiści ci zapędzili się w dziedziny, gdzie panuje najczystsza abstrakcya i oddalili się tym sposobem możliwie daleko od świata zewnętrznego. Fizykalne to zagadnienie dało im do tego pobudkę.

Wraz z szeregiem Fouriera i inne analogiczne szeregi weszły do dziedziny analizy; weszły one przez te same wrota; wymyślono je przez wzgląd na zastosowania. Dla przykładu wystarczy przytoczyć szeregi, których elementami są funkcye kuliste lub funkcye Lamégo.

Teorya równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego miała historyę analogiczną: rozwinęła się ona przedewszystkiem przez fizykę i dla fizyki. Gdyby analiści poddali się byli swoim naturalnym dążeniom, byliby w następujący sposób rozważali te równania i obierali warunki graniczne.

Weźmy naprzykład równanie pomiędzy dwiema zmiennemi x, y i niechaj F będzie funkcyą tych dwu zmiennych. Przyjęliby oni jako ilości dane F i $\frac{dF}{dx}$ dla $x = 0$. Tak uczyniła naprzykład Kowalewska w swej sławnej rozprawie. Lecz istnieje mnóstwo innych sposobów postawienia tego zagadnienia. Można dać sobie F wzdłuż obwodu zamkniętego, jak w zagadnieniu Dirichleta lub stosunek funkcyi F do $\frac{dF}{dn}$, jak w teoryi ciepła.

Wszystkie te sposoby stawiania zagadnień zawdzięczamy fizyce. Można więc powiedzieć, że bez fizyki nie znalibyśmy równań o pochodnych cząstkowych.

Uważam za bezpożyteczne zwiększanie liczby przykładów; podane wystarczają już do wysnucia potrzebnego wniosku. Kiedy fizycy żądają od nas rozwiązania zagadnienia, nie narzucają nam pańszczyzny; przeciwnie my to winniśmy im wdzięczność.

IV.

Nie dość na tem. Fizyka nie tylko daje nam sposobność do rozwiązywania zagadnień, lecz nadto pomaga nam znajdywać sposoby rozwiązywania i to dwojako: pozwala przeczuwać rozwiązanie, poddaje nam rozumowania.

Mówiłem już wyżej o równaniu Laplace'a, napotykanem w mnóstwie teoryj fizykalnych, dalekich od siebie Znajdujemy je również w teoryi odwzorowania podobnego w geometryi i w teoryi liczb urojonych — w analizie czystej. Tym sposobem analista w teoryi funkcyj zmiennych zespolonych, obok obrazu geometrycznego, stanowiącego narzędzie zwykłe, znajduje liczne obrazy fizyczne, których może z równem powodzeniem używać. Dzięki tym obrazom, może on jednym rzutem oka objąć to, co czysta dedukcya ukazuje mu tylko stopniowo. Gromadzi on przeto rozproszone elementy rozumowania i przez pewien rodzaj intuicyi odgaduje rozwiązanie, zanim je udowodni.

Odgadnąć przed udowodnieniem! Czyż potrzeba przypominać, że w ten sposób poczyniono wszystkie ważne odkrycia? Ileż to razy analogie fizykalne pozwalają nam przeczuwać prawdy, których nie jesteśmy w stanie udowodnić za pomocą rozumowań ścisłych! Tak naprzykład fizyka matematyczna wprowadza wielką liczbę rozwinięć na szeregi. Nikt nie wątpi, że te rozwinięcia są zbieżne, lecz pewności matematycznej co do tego niema. Są to zdobycze, pozostawione dla badaczy, którzy przyjdą po nas.

Z drugiej strony, fizyka matematyczna daje nam nietylko rozwiązania, lecz nadto w pewnej mierze i rozumowania. Wystarczy tu przypomnieć, w jaki sposob Klein w pewnej kwestyi, odnoszącej się do powierzchni Riemannowskich, korzystał z własności prądów elektrycznych. Prawda, że rozumowania tego rodzaju nie są ścisłemi w tem znaczeniu, jakie analista przywiązuje do tego wyrazu.

W tym względzie nasuwa się pytanie: w jaki sposób dowód niedość ścisły dla analisty może zadawalać fizyka? Zdaje się że nie może być dwu ścisłości; jedno z dwojga: ścisłość jest lub jej niema, a tam, gdzie jej niema, nie może być rozumowania.

Wyjaśnimy sobie lepiej ten pozorny paradoks, jeżeli przypomnimy sobie, w jakich warunkach liczbę można stosować do zjawisk przyrody. Skąd pochodzą wogóle trudności, napotykane wtedy, gdy dowód chcemy uczynić ścisłym? Natrafiamy prawie zawsze na trudności, gdy mamy udowodnić, że jakaś ilość dąży do granicy, albo że jakaś funkcya jest ciągłą lub że ma pochodną. Otóż, liczby, które fizyk mierzy za pomocą doświadczenia, są mu znane tylko przybliżenie; z drugiej zaś strony funkcya jakakolwiek różni się tak mało, jak chcemy, od funkcyi nieciąglej, i równocześnie tak mało, jak chcemy, od funkcyi ciągłej. Fizyk tedy może przyjąć dowolnie, że funkcya badana jest ciągłą lub nieciągłą; że ma pochodną lub jej niema, i to bez obawy wpadnięcia w sprzeczność z doświadczeniem, czy to obecnem, czy przyszłem. Pojmujemy, że przy tej swobodzie igra on z trudnościami, które zatrzymują analistę, gdyż zawsze może rozumować w ten sposób, jak gdyby funkcye wprowadzone do rachunku były wielomianami całkowitemi.

Lecz taki pogląd, wystarczający dla fizyki, nie odpowiada wymaganiom rozumowań analizy. Nie wynika stąd wszakże, by pogląd fizykalny nie mógł być pomocnym przy szukaniu rozumowań analitycznych.

Przekształcono już na rozumowania ścisłe tyle poglądów fizykalnych, że przekształcenie to jest dziś łatwem. Mógłbym przytoczyć obfite na to przykłady, gdybym się nie obawiał znużyć was tą zbyt długą już konferencyą.

Powiedziałem, zdaje mi się, dość na okazanie, że analiza czysta i fizyka matematyczna mogą służyć sobie wzajemnie bez żadnej ofiary wzajemnej i że każda z tych umiejętności może radować się z tego, co wznosi druga.